Übung 1. Wellenfunktionen-Quiz

Lernziel: Identische Teilchen zeigen in der Quantenmechanik eine besondere Symmetrie: Die Wellenfunktion von identischen Bosonen (Fermionen) muss symmetrisch (antisymmetrisch) unter Permutationen der Teilchen sein. Hier untersuchen wir Beispiele von Mehrteilchen Wellenfunktionen und ihre Symetrieeigenschaften.

(a) Welche der folgenden Wellenfunktionen sind möglich, und warum?

(1) Im Grundzustand eines Heliumatoms besitzen beide Elektronen die räumliche Wellenfunktion $\psi(r, \theta, \phi)$.

(2) Zwei Elektronen sind im Zustand

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(f(r_1)g(r_2) - g(r_1)f(r_2)) \otimes |\downarrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2 \tag{1}$$

(3) Zwei Elektronen sind im Zustand

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(f(r_1)g(r_2) \otimes |\uparrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2 - g(r_1)f(r_2) \otimes |\downarrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2) \tag{2}$$

(4) Zwei Elektronen sind im Zustand

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(f(r_1)g(r_2) - g(r_1)f(r_2)) \otimes |\uparrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2 \tag{3}$$

(5) Drei Elektronen sind im Zustand

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(f(r_1)g(r_2)h(r_3) - f(r_2)g(r_3)h(r_1) + f(r_3)g(r_1)h(r_2)) \otimes |\uparrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2 \otimes |\uparrow\rangle_3 \tag{4}$$

(b) Wie viele Konfigurationen gibt es bei 3 möglichen Zuständen χ_1, χ_2, χ_3 von drei Teilchen, wenn

(1) die Teilchen unterscheidbar sind?

(2) die Teilchen ununterscheidbare Bosonen sind?

(3) die Teilchen ununterscheidbare Fermionen sind? Gib für diesen Fall die Gesamtwellenfunktion an.

Übung 2. Streuung identischer Teilchen

Lernziel: Die Annahme, dass Wellenfunktionen von mehreren Teilchen Symmetrieeigenschaften haben, kann in verschiedenen Szenarien verifiziert werden. Hier betrachten wir Streuung von identischen Teilchen und untersuchen die Unterschiede in den Streuquerschnitten für verschiedene Spin Statistiken.

Wir betrachten die Streuung zweier identischer Teilchen im Schwerpunktsystem mit einem spinunabhängigen Streuungs-Hamiltonian. In diesem Bezugssystem können wir nicht zwischen einer Streuung des Teilchens um Winkel Θ und einer Streuung um Winkel $\pi - \Theta$ unterscheiden. Wir erhalten daher einen Interferenzterm zwischen den beiden Amplituden $f(\Theta)$ und $f(\pi - \Theta)$, der durch die Symmetriebedingung auf die Wellenfunktion eindeutig bestimmt ist.

(a) Schreibe für den Fall einer Streuung identischer spinloser Bosonen die auslaufende Welle mit Hilfe der Streuamplituden $f(\Theta)$ und $f(\pi - \Theta)$. Was ergibt sich demnach für den differentiellen Wirkungsquerschnitt?

(b) Gib im Falle von identischen Fermionen die Wirkungsquerschnitte für die folgende Zustände an. Vergleiche diese jeweils für den Winkel $\Theta = \pi/2$ mit dem Ergebnis für unterscheidbare Teilchen.

(1) zwei Elektronen im Singlet-Zustand
(2) zwei Elektronen im Triplet-Zustand
(3) unpolarisierte Elektronen.
Hinweis: Dies ist eine Kombination der beiden vorherigen Fälle.

Übung 3. Spin und Permutationssymmetrie

Lernziel: Der abstrakte mathematische Formalismus der symmetrischen Gruppe stellt sich für die Beschreibung von Vielteilchensystemen als sehr hilfreich heraus. In dieser Aufgabe werden wir Beziehungen zwischen Projektoren der symmetrischen Gruppe und Projektoren auf dem Spinraum herleiten.

Unter den irreduziblen Darstellungen der Permutationsgruppe S_N gibt es nur zwei, die 1-dimensional sind: Die symmetrische und die antisymmetrische. Ein Hilbertraum K, der eine unitare Darstellung P_σ, ($\sigma \in S_N$) trägt, zerfällt in (möglicherweise triviale) invariante Unterräume, worin bis auf Wiederholungen nur je eine irreduzible Darstellung vorkommt.

Jeder irreduziblen Darstellung entspricht so ein orthogonaler Projektor in K, insbesondere S der symmetrischen und A der antisymmetrischen (vgl. Vorlesung).

(a) Für $N = 2$ gibt es keine weiteren irreduziblen Darstellungen ausser den beiden namentlich erwähnten. Zeige dies durch $S + A = \mathbb{I}$.

Ohne Beweis: Fur $N = 3$ gibt es genau eine weitere, “gemischt symmetrische” irreduzible Darstellung. Sei G der entsprechende orthogonale Projektor. Drucke S, A, G durch die Operatoren P_σ aus.

Hinweis: $S + A + G = \mathbb{I}$.

Sei nun $H_{1/2} = \mathbb{C}^2$ der Hilbertraum eines Spin $\frac{1}{2}$-Teilchens ($\hbar = 1$), und $K = H_{1/2}^{\otimes N}$ der von N unterscheidbaren. Unter dem Spin versteht man eine darin vorkommende irreduzible Darstellung der $SU(2)$; unter der Permutationssymmetrie eine der S_N.

(b) Sei $N = 2$. Eigenwerte des Gesamtspins $(\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2$ sind $s(s + 1)$ mit $s = 0, 1$ und Eigenprojektoren $P(s)$. Zeige die Entsprechung

$$P(1) = S, \quad P(0) = A \tag{5}$$

und daraus

$$(\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2 = \mathbb{I} + P_{(12)}. \tag{6}$$

(c*) Sei $N = 3$. Die Werte s des Gesamtspins $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3$ sind $s = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ (wieso?). Man überlege sich, dass $A = 0$ und $S, G \neq 0$.

Zeige die Entsprechung in der Form

$$P\left(\frac{3}{2}\right) = S, \quad P\left(\frac{1}{2}\right) = G. \tag{7}$$

Hinweis: Schreibe $\vec{S}^2$ *einmal mit Hilfe von* $(\vec{S}_{i+1} + \vec{S}_{i+2})^2$, $(i = 1, 2, 3)$ *und* (6)*, das andere Mal als Spektralzerlegung nach den Projektoren* $P(s)$.