## Übung 1. Zweite Quantisierung

*Lernziel: Um Zustände zu beschreiben, die nicht aus einer festen Anzahl Teilchen bestehen, führen wir den Formalismus der zweite Quantisierung ein. Hier gehen wir durch den Aufbau und die Grundlagen.*

Betrachte einen Einteilchenhamiltonoperator $H_0$, mit Eigenzustände $|\alpha\rangle$ (Eigenfunktionen $\phi_\alpha(x)$) und Eigenenergien $E_\alpha$. Jeder Zustand $|\alpha\rangle$ heisst *Mode*.

Wir beschreiben jetzt $N$ identischen Teilchen im Zustand $|\Psi\rangle$. Dieser kann in der Produktbasis $|\alpha_1\rangle|\alpha_2\rangle\cdots|\alpha_N\rangle$ mit den Koeffizienten $c_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_N}$ zerlegt werden.

(a) Welche Symmetrien weisen die Koeffizienten $c_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_N}$ auf?

(b) Ein Zustand $|\Psi\rangle$ von $N$ identischen Teilchen lebt in einem Unterraum von $\mathcal{H}^{\otimes N}$ (dem Symmetrischen oder Antisymmetrischen). Finde eine Basis $|n_1, n_2, \cdots\rangle$ dieses Unterraums ($|\vec{n}\rangle$ oder $|[n_\alpha]\rangle$ für allgemeinere, z.B. kontinuierliche, Moden), d.h., eine Basis in welcher die Koeffizienten $f(n_1, n_2, \ldots)$ von $|\Psi\rangle$ keine Bedingungen mehr hat.

(c) Der zwei-Teilchen nichtwechselwirkender Hamiltonoperator lautet $H_2 = H_0^{(1)} + H_0^{(2)}$, wobei die zwei Terme auf das erste bzw. das zweite Teilchen wirken. Verifiziere für $N = 2$, dass

$$H_2|n_1, n_2, \cdots\rangle = \left(\sum_\alpha n_\alpha E_\alpha\right)|n_1, n_2, \cdots\rangle \ . \tag{1}$$

Damit entsprechen wirklich die $n_\alpha$'s "wie viele Teilchen in der Mode $\alpha$ sind."

(d) Warum nennt man den Zustand $|0\rangle \equiv |n_1 = 0, n_2 = 0, \cdots\rangle$ *Vakuum-Zustand*? Wie stellt man den Vakuumzustand in der Basis $|\alpha_1\rangle|\alpha_2\rangle\cdots$ dar?

*Hinweis: Think twice.*

Wir nehmen jetzt hier als Definition vom Erzeugungsoperator $a_\alpha^\dagger$ und vom Vernichtungsoperator $a_\alpha$ die Folgenden, für Bosonen:

$$a_\alpha^\dagger|n_1, n_2, \cdots\rangle = \sqrt{n_\alpha + 1}\,|n_1, \cdots, n_\alpha + 1, \cdots\rangle \ ; \tag{2a}$$
$$a_\alpha|n_1, n_2, \cdots\rangle = \sqrt{n_\alpha}\,|n_1, \cdots, n_\alpha - 1, \cdots\rangle \ , \tag{2b}$$

und für Fermionen:

$$a_\alpha^\dagger|n_1, n_2, \cdots\rangle = (-1)^{S^\alpha_{[n_\alpha]}}\,\delta_{n_\alpha,0}\,|n_1\cdots, n_\alpha + 1, \cdots\rangle \ ; \tag{3a}$$
$$a_\alpha|n_1, n_2, \cdots\rangle = (-1)^{S^\alpha_{[n_\alpha]}}\,\delta_{n_\alpha,1}\,|n_1\cdots, n_\alpha - 1, \cdots\rangle \ , \tag{3b}$$

wobei $S^\alpha_{[n_\alpha]} = \sum_{\alpha'>\alpha} n_\alpha$ (dies geht davon aus, dass die Moden "geordnet" werden können). In beiden Fällen ist $a_\alpha|0\rangle = 0$.

(e) Verifiziere, dass der Erzeugungsoperator tatsätzlich zum Vernichtungsoperator hermitisch konjugiert ist (wie die Notation darauf hinweist), und dass $a_\alpha^\dagger a_\alpha$ der Besetzungszahloperator ist.

(f) Zeige, dass folgende Kommutationsrelationen erfüllt sind:

$$[a_\alpha, a_{\alpha'}] = 0 \ ; \qquad [a^\dagger_\alpha, a^\dagger_{\alpha'}] = 0 \ ; \qquad [a_\alpha, a^\dagger_{\alpha'}] = \delta_{\alpha,\alpha'} \qquad \text{für Bosonen;} \tag{4a}$$

$$\{a_\alpha, a_{\alpha'}\} = 0 \ ; \qquad \{a^\dagger_\alpha, a^\dagger_{\alpha'}\} = 0 \ ; \qquad \{a_\alpha, a^\dagger_{\alpha'}\} = \delta_{\alpha,\alpha'} \qquad \text{für Fermionen.} \tag{4b}$$

(g) Betrachte ein System mit drei fermionischen Moden. Berechne den folgenden Vakuumserwartungswert:

$$\langle 0 | a_3 a_1 a_2 a^\dagger_2 a^\dagger_1 a^\dagger_3 | 0 \rangle \ . \tag{5}$$

**Exercise 2. Free Electron Gas**

*Goal: Here, we use the formalism of second quantization to describe a gas of noninteracting electrons. In its ground state, all modes below the Fermi energy are filled. In this exercise, we see that we can rewrite the creation and annihilation operators such that other states are seen as excitations of the ground state.*

The Hamiltonian of a gas of $N$ free electrons is written in the second quantization formalism as

$$H = \sum_{\boldsymbol{k},s} \xi_k \, c^\dagger_{\boldsymbol{k},s} c_{\boldsymbol{k},s} \ , \tag{6}$$

where $c_{\boldsymbol{k},s}$ (resp. $c^\dagger_{\boldsymbol{k},s}$) is the annihilation (resp. creation) operator of the electron mode $\boldsymbol{k}, s$ of energy $\xi_k = \epsilon_k - \mu$. (Here $\epsilon_k = \hbar^2 k^2/(2m)$ and $\mu$ is the chemical potential, $\mu = E_F$ at $T = 0$.) The index $s$ distinguishes the two spin components.

(a) Calculate the ground state energy of the system, and show that it is equal to

$$E_G = 2 \sum_{k<k_F} \xi_k \ . \tag{7}$$

Let's look at excitations that are holes under the Fermi level and electrons above the Fermi level. We would like to rewrite the Hamiltonian in a form which involves explicitly only these excitations. We define the creation and annihilation operators of an excitation $\alpha^\dagger_{\boldsymbol{k},s}$, $\alpha_{\boldsymbol{k},s}$ by

$$\alpha_{\boldsymbol{k},s} = \begin{cases} c_{\boldsymbol{k},s} & \text{for } k > k_F \\ c^\dagger_{-\boldsymbol{k},-s} & \text{for } k < k_F \end{cases} \quad ; \quad \alpha^\dagger_{-\boldsymbol{k},-s} = \begin{cases} c^\dagger_{-\boldsymbol{k},-s} & \text{for } k > k_F \\ c_{\boldsymbol{k},s} & \text{for } k < k_F \end{cases} \ . \tag{8}$$

(b) Show that the $\alpha$, $\alpha^\dagger$'s obey fermionic commutation relations.

(c) Argue that Eq. (8) is a unitary transformation of the creation and annihilation operators. Such a transformation is also called a *Bogoliubov transformation*. What happens if you act with the annihilators $c_{\boldsymbol{k},s}$ and $\alpha_{\boldsymbol{k},s}$ on the ground state of the gas?

(d) Rewrite the Hamiltonian (6) in the form

$$H = \sum_{\boldsymbol{k}} |\xi_k| \left( \alpha^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow} \alpha_{\boldsymbol{k}\uparrow} + \alpha^\dagger_{\boldsymbol{k}\downarrow} \alpha_{\boldsymbol{k}\downarrow} \right) + E_G \ . \tag{9}$$