Übung 1. Feldoperatoren

Lernziel: Die Feldoperatoren erzeugen oder vernichten ein Teilchen an einem bestimmten Ort, im Gegensatz zu den Auf- und Absteigoperatoren, welche Teilchen mit einem bestimmten Impuls (oder Mode) erzeugen oder vernichten. Wie die Auf- und Absteigoperatoren spannen sie den Fockraum auf. Hier werden ihre Eigenschaften untersucht.

Die Feldoperatoren Ψ sind wie folgt definiert

$$\Psi(\vec{x}) = \sum_\lambda \phi_\lambda(\vec{x}) a_\lambda \ , \quad \Psi^\dagger(\vec{x}) = \sum_\lambda \phi^*_\lambda(\vec{x}) a^\dagger_\lambda \ , \tag{1}$$

wobei $\{\phi_\lambda(\vec{x})\}$ ein vollständiges orthonormalsystem an Einteilchenwellenfunktionen ist und $a^\dagger_\lambda$, a_λ die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren sind.

(a) Zeige, dass die Feldoperatoren unabhängig von der Wahl des VONS $\{\phi_\lambda(\vec{x})\}$ sind.

Hinweis: Zwei VONS $\phi_\lambda(\vec{x})$ und $u_\lambda(\vec{x})$ sind durch eine unitäre Transformation verbunden, d.h. $u_\lambda(\vec{x}) = \sum_\mu U_{\lambda\mu}\phi_\mu(\vec{x})$. Bestimme die zugehörige Transformation der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren.

(b) In der Vorlesung (Gl. (16.78)) wurde bereits gezeigt, dass

$$[\Psi_{s_1}(\vec{x}), \Psi^\dagger_{s_2}(\vec{y})]_\pm = \delta_{s_1 s_2}\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) \ , \tag{2}$$

bzw. $[\Psi(x), \Psi^\dagger(y)]_\pm = \delta(x-y)$ in Kurznotation, in welcher x stellvertretend für alle Indizes steht. Mit Hilfe der Feldoperatoren Ψ können wir einen n-Teilchenzustand in der Ortsbasis darstellen als

$$|x_1, \dots, x_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\Psi^\dagger(x_n)\dots\Psi^\dagger(x_1)|0\rangle \ . \tag{3}$$

Zeige zunächst, dass

$$\begin{aligned}\Psi(y)\Psi^\dagger(x_n)\dots\Psi^\dagger(x_1) = &\sum_{i=1}^{n}(\mp\Psi^\dagger(x_n))\dots(\mp\Psi^\dagger(x_{i+1}))[\Psi(y),\Psi^\dagger(x_i)]_\pm\Psi^\dagger(x_{i-1})\dots\Psi^\dagger(x_1)\\ &+ (\mp\Psi^\dagger(x_n))\dots(\mp\Psi^\dagger(x_1))\Psi(y)\end{aligned} \tag{4}$$

und nutze das Ergebnis, um zu zeigen, dass

$$\langle y_1, \dots, y_n | x_1, \dots, x_m\rangle = \frac{\delta_{nm}}{n!}\sum_{\pi\in S_n}(\mp)^{\mathrm{sgn}(\pi)}\delta(x_{\pi(1)}-y_1)\dots\delta(x_{\pi(n)}-y_m) \ . \tag{5}$$

Exercise 2. Representation of operators

Goal: We have already seen that writing many particles states in Fock space can be more convenient. However, to actually make calculations with this formalism, the relevant operators should also be represented using the creation and annihilation operators or field operators. In this question we see how to do this for three important one particle operators.

Any one particle operator can be written using the creation and annihilation operators, or using field operators, in the following way (see Section 16.5.3 in the Script):

$$A_1 = \sum_{i,j} \langle i|A_1|j\rangle a_i^\dagger a_j \tag{6}$$

$$= \int d^3r \Psi^\dagger(\vec{r}) A_1 \Psi(\vec{r}) \tag{7}$$

Show the following:

(a) $T = \sum_{\vec{k}} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}$.

(b) $\rho(\vec{q}) = \sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}+\vec{q}}$, where $\rho(\vec{q})$ is the Fourier transform of $\rho(\vec{r})$.

(c) $\vec{j}(\vec{r}) = \frac{\hbar}{2mi}[\Psi^\dagger(\vec{r})\vec{\nabla}\Psi(\vec{r}) - (\vec{\nabla}\Psi^\dagger(\vec{r}))\Psi(\vec{r})]$.

Exercise 3. Correlation functions in a Fermi sea

Goal: Correlation functions describe the probability of processes where one particle is annihilated and another created. In this question we investigate the behaviour of such functions in a Fermi sea.

Consider a gas of N identical fermions with spin 1/2. The fermions are free and non-interacting. The ground state is then given by

$$|\Phi_0\rangle = \prod_{|\vec{k}|\leqslant k_F,\, s} c_{\vec{k}\,s}^\dagger \;|0\rangle \ . \tag{8}$$

One defines the *one-particle correlation function* $G_s(\vec{x}-\vec{y})$ as

$$G_s(\vec{x}-\vec{y}) = \frac{n}{2}\, g_s(\vec{x}-\vec{y}) = \langle \Phi_0 |\, \Psi_s^\dagger(\vec{x})\Psi_s(\vec{y})\, | \Phi_0 \rangle \ . \tag{9}$$

This is the amplitude of recreating a fermion of spin s at position $\vec{x}$ when one was annihilated at position $\vec{y}$ with same spin.

(a) Using explicit expressions for the field operators $\Psi_s(\vec{x})$, calculate $G_s(\vec{x}-\vec{y})$ and sketch its graph as function of $|\vec{x}-\vec{y}|$. Show that $\lim_{\boldsymbol{r}\to 0} G_s(\boldsymbol{r}) = \frac{n}{2}$ and $\lim_{r\to\infty} G_s(\boldsymbol{r}) = 0$.

Likewise, one can define the *pair correlation function* $g_{ss'}(\vec{x}-\vec{y})$ by

$$\left(\frac{n}{2}\right)^2 g_{ss'}(\vec{x}-\vec{y}) = \langle \Phi_0 |\, \Psi_s^\dagger(\vec{x})\Psi_{s'}^\dagger(\vec{y})\Psi_{s'}(\vec{y})\Psi_s(\vec{x})\, | \Phi_0 \rangle \ . \tag{10}$$

(b) Rewrite Eq. (10) in the form

$$\left(\frac{n}{2}\right)^2 g_{ss'}(\vec{x}-\vec{y}) = \frac{1}{V^2} \sum_{\vec{k}_1\,\vec{k}_2\,\vec{q}_1\,\vec{q}_2} \mathrm{e}^{-i(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\cdot\vec{x}}\, \mathrm{e}^{-i(\vec{q}_1-\vec{q}_2)\cdot\vec{y}}\, \langle \Phi_0 | c_{\vec{k}_1,s}^\dagger c_{\vec{q}_1,s'}^\dagger c_{\vec{q}_2,s'} c_{\vec{k}_2,s} | \Phi_0 \rangle \ . \tag{11}$$

(c) Assume first that $s \neq s'$. Calculate $g_{ss'}(\vec{x}-\vec{y})$.

(d) Next, consider the case where $s = s'$ and calculate $g_{ss}(\vec{x}-\vec{y})$. Plot the quantity $g_{ss}(\vec{x}-\vec{y})$ as a function of $|\vec{x}-\vec{y}|$.