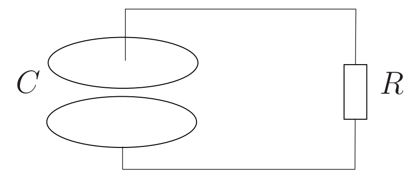
Theoretische Physik, Übung 5.

FS15 *Abgabe: 25.03.13*

1. Energiefluss bei Entladung eines Kondensators

Diskutiere qualitativ den Energiefluss (Poynting-Vektor) bei der langsamen Entladung eines Kondensators über einen Widerstand.



2. Satellit an der Leine

Auf einer Mission des Space Shuttle (1996) wurde ein Satellit über ein 20 km langes Spannseil ausgesetzt. Das Seil war leitend und durch einen Mantel vom umgebenden verdünnten Plasma (ionisiertes Gas) isoliert. Erkläre, wieso ein Strom im Seil floss. Berechne grössenordnungsmässig die elektromotorische Kraft längs des Seils. Woher stammte die dabei umgesetzte Energie?

Hinweis: Der Erdradius misst ungefähr 6'400 km. Das Magnetfeld in Erdnähe beträgt $\sim 40\mu$T in SI-Einheiten (1 Tesla =1 Vs/m^2).

Bemerkung: In der Vorlesung werden Heaviside-Lorentz-Einheiten verwendet. Beim Übergang zu SI-Einheiten ist

$$1 \rightsquigarrow \varepsilon_0^{-1}\,, \qquad c^{-2} \rightsquigarrow \mu_0$$

im Coulomb- bzw. Ampèreschen Kraftgesetz, (1.1) bzw. (2.1), zu ersetzen. Statt c^{-2} in gleiche Teile auf Feld (2.2) und Kraft (2.3) aufzuteilen, steht μ_0 im SI definitionshalber nur in (2.2). Da die Kraft rein mechanisch definiert ist, folgt aus (2.3) $c^{-1}e_{\mathrm{HL}}\vec{B}_{\mathrm{HL}} = e_{\mathrm{SI}}\vec{B}_{\mathrm{SI}}$. Insbesondere folgt für die Lorentz-Kraft $[e(\vec{v}/c) \wedge \vec{B}]_{\mathrm{HL}} = [e\vec{v} \wedge \vec{B}]_{\mathrm{SI}}$.

3. Vollständig und teilweise polarisiertes Licht

Eine monochromatische elektromagnetische Welle der Fortpflanzungsrichtung $\vec{e}_3$ ist in komplexer Notation von der Form

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{e}_3 \wedge \vec{E}\,, \qquad \vec{E}(\vec{x},t) = \vec{E}(t - \vec{e}_3 \cdot \vec{x}/c)\,, \\ \vec{E}(t) &= \vec{E}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}\,, \qquad \vec{E}_0 = (E_1, E_2, 0)\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Die Polarisation der Welle wird durch den komplexen Vektor

$$\underline{E} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \tag{2}$$

beschrieben, der vier reelle Freiheitsgrade beinhaltet.

Eine Polarisationsmessung besteht darin, dass zuerst ein Anteil der Welle gefiltert wird, und zwar in Richtung einer bestimmten Polarisation $\underline{\varepsilon}$, $((\underline{\varepsilon}, \underline{\varepsilon}) = 1)$, d.h. $\underline{E} \rightsquigarrow \underline{E}' = (\underline{\varepsilon}, \underline{E})\underline{\varepsilon}$, und sodann dessen Intensität

$$I = \frac{c}{2}(\underline{E}', \underline{E}') = \frac{c}{2}|(\underline{\varepsilon}, \underline{E})|^2$$

gemessen. Ändert sich die Polarisation um eine Phase, $\underline{E} \rightsquigarrow e^{i\varphi}\underline{E}$, so verzögert sich bloss das physikalische Feld $\operatorname{Re}\vec{E}(t)$, was ohne Einfluss auf die Messungen bleibt. Somit verbleiben drei Freiheitsgrade, die es auf experimentell nützliche Weise auszudrücken gilt.

Eine *fast* monochromatische Welle wird beschrieben durch die Ersetzung $\underline{E} \rightsquigarrow \underline{E}(t)$ in (2), wobei die entsprechende Amplitude $\vec{E}_0(t)$ in (1) nun

- langsam veränderlich ist auf der Zeitskala $2\pi/\omega_0$ (Periode); die für $\vec{E}_0(t)$ charakteristische Zeitskala heisst Kohärenzzeit τ.
- rasch veränderlich ist auf der Zeitskala der Messungen. Die Amplituden $\vec{E}_0(t_i)$, $(i = 1, 2)$ erweisen sich als unkorreliert, wenn $t_2 - t_1 \gg \tau$.

Man fasse $\underline{E}$ als Zufallsvariable auf. Mittelwerte bezeichnen wir mit $\langle \cdot \rangle$. Die strikt monochromatische Welle entspricht dem deterministischen Spezialfall einer reinen Polarisation.

Ziel der Aufgabe ist es, folgende Aussage zu verdeutlichen: Die Polarisation des Lichts wird durch die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} \langle E_1\overline{E}_1\rangle & \langle E_1\overline{E}_2\rangle \\ \langle E_2\overline{E}_1\rangle & \langle E_2\overline{E}_2\rangle \end{pmatrix} = S^*, \qquad \text{d.h. } S = \langle \underline{E}\,\underline{E}^*\rangle \tag{3}$$

beschrieben, wobei $\underline{E}^* = (\overline{E}_1, \overline{E}_2)$.

i) Zeige, dass S von der Form

$$S = s_0\sigma_0 + s_1\sigma_1 + s_2\sigma_2 + s_3\sigma_3 \equiv s_0 1_2 + \vec{s}\cdot\vec{\sigma} \tag{4}$$

ist, wobei $s_i \in \mathbb{R}$ (vier Stokessche Parameter), $\sigma_0 = 1_2$ und

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(Pauli-Matrizen). *Hinweis:* Die 2×2-Matrizen $S = S^*$ bilden einen reellen Vektorraum. Was ist seine Dimension?

ii) Drücke die s_i durch die Mittelwerte $\langle E_j\overline{E}_k\rangle$ aus. *Hinweis:* $(S, T) = \operatorname{tr}(ST)/2$ ist ein Skalarprodukt. Ferner gilt $\sigma_i^2 = 1_2$ und $\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3$ (und zyklisch).

iii) Zeige, dass im Fall einer reinen Polarisation ($\vec{E}_0$ fest, Mittelwerte überflüssig)

$$|\vec{s}| = s_0 \tag{5}$$

gilt. Dies entspricht den drei erwähnten Freiheitsgraden. *Hinweis:* Berechne S^2 für diesen Fall und nimm die Spur.

iv) Zeige, dass im Allgemeinen

$$|\vec{s}| \le s_0 .$$

Hinweis: Mittle über (5); alternativ, zeige: $S \ge 0$ und die Eigenwerte von S sind $s_0 \pm |\vec{s}|$.

v) Finde die Bedeutung von s_0 und s_i/s_0, $(i = 1, 2, 3)$. Was bedeutet $\vec{s} = 0$? *Hinweis:* Die Eigenwerte von σ_i sind ±1, $(i = 1, 2, 3)$. Was sind die Eigenvektoren, $\vec{e}_\pm^{(i)}$? Drücke s_i durch die Koeffizienten $\alpha_\pm^{(i)}$ in der Zerlegung $\underline{E} = \alpha_+^{(i)}\vec{e}_+^{(i)} + \alpha_-^{(i)}\vec{e}_-^{(i)}$ aus. Verwende dazu, dass die Spur basisunabhängig ist.

Bemerkung: In der Optik sind die Matrizen σ_i etwas anders definiert. Hier wurden die in der Quantenmechanik üblichen Pauli-Matrizen verwendet.