Theoretische Physik, Übung 9.

FS15 *Abgabe: 29.04.15*

1. Feld einer gleichförmig bewegten Ladung

Eine Punktladung e bewegt sich auf der Trägheitsbahn $\vec{x} = \vec{v}t$, $\vec{v} = (v, 0, 0)$. Berechne die Felder $\vec{E}(\vec{x}, t)$, $\vec{B}(\vec{x}, t)$. In welchen Richtungen ist $\vec{E}(\vec{x}, t = 0)$ am stärksten, bzw. am schwächsten bei gleichem Abstand $|\vec{x}|$ von der Ladung?

Hinweis: Berechne die Felder zuerst im Ruhesystem des Teilchens.

2. Dualer Feldtensor

Definiere den dualen Feldtensor

$$\mathcal{F}_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \tag{1}$$

und den dualen Strom

$$\mathcal{J}_{\nu\rho\sigma} = j^{\mu} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \,,$$

wobei $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ der vollständig antisymmetrische Tensor mit $\varepsilon_{0123} = +1$ ist (Parität der Permutation $(0123) \mapsto (\mu\nu\rho\sigma)$).

Bemerkung: Dualität ist hier nicht im Sinne des Dualraums, sondern der Hodge-Dualität zu verstehen (s. Anhang B, unwesentlich für diese Aufgabe). Daraus folgt, dass $\mathcal{F}$ und $\mathcal{J}$ Tensoren sind; alternativ auch aus Übung 1.2, wonach $|g|^{1/2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$, $(g = \det(g_{\mu\nu}))$ ein Tensor unter beliebigen Koordinatentransformationen ist (bzw. $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ unter Lorentz-Transformationen).

i) Drücke die Tensorkomponenten $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ durch $\vec{E}$ und $\vec{B}$ aus. Die Dualität erweist sich als eine elektrisch-magnetische.

ii) Zeige: Die Maxwell-Gleichungen lauten

$$\mathcal{F}^{\mu\nu}{}_{,\mu} = 0 \,,$$
$$\mathcal{F}_{\rho\sigma,\mu} + \mathcal{F}_{\mu\rho,\sigma} + \mathcal{F}_{\sigma\mu,\rho} = -\frac{1}{c}\mathcal{J}_{\rho\sigma\mu} \,.$$

Hinweis: Zeige

$$\mathcal{F}_{\rho\sigma,\mu} + \mathcal{F}_{\mu\rho,\sigma} + \mathcal{F}_{\sigma\mu,\rho} = F^{\alpha\nu}{}_{,\alpha} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \,. \tag{2}$$

In der $(\vec{E},\, \vec{B})$-Notation gehen die linken Seiten der homogenen und inhomogenen Maxwell-Gleichungen auseinander hervor unter $(\vec{E},\, \vec{B}) \rightsquigarrow (-\vec{B},\, \vec{E})$. Obige Gleichungen bringen diese Symmetrie in relativistischer Notation zum Ausdruck.