Elektrodynamik
Serie 1

SS 05
Prof. G. Blatter

Aufgabe 1.1 Diskrete und kontinuierliche Darstellung der δ-Funktion

a) Verifiziere für eine Kette der Länge L und mit Gitterpunkten im Abstand a die Gültigkeit der folgenden Darstellungen des Kronecker δ Symbols,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} e^{-ik_m x_n} = \delta_{m,0} \qquad\qquad \frac{1}{N}\sum_{m=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} e^{ik_m x_n} = \delta_{n,0}.$$

wobei $N = L/a$ gerade, $k_m = 2\pi m/L$, $x_n = an$. $\qquad m, n \in \{-\frac{N}{2}, \ldots, \frac{N}{2} - 1\}$

b) Betrachte folgende drei Grenzfälle dieser Gleichungen:

- kontinuierliche Behandlung der Gitterpunkte im Limes $a \to 0$ bei festem L. (Saite)
- kontinuierliche Behandlung der k-Werte: $L \to \infty$ bei festem a. (1d-Kristall)
- $a \to 0$, $L \to \infty$.

Betrachte dass im zweiten Fall für ein beliebiges k gilt (Poisson Formel)

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{ix_n k} = \frac{2\pi}{a}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta\left(k + \frac{2\pi}{a}m\right).$$

Aufgabe 1.2 Cavendish Experiment

Das elektrostatische Potential im Innern einer geladenen leitenden Kugel ist konstant, und das elektrische Feld verschwindet. Dies ist eine einzigartige Eigenschaft des Coulombfeldes, die sich im Gauss'schen Gesetz ausdrückt. Eine Abweichung vom Coulombgesetz führt auf ein endliches Feld im Innern der Kugel.
Nachdem 1705 das erste Elektroskop mit Strohhalmen von Hawksbee erfunden wurde, verifizierte Cavendish 1772 das Coulombgesetz mit folgendem Nullexperiment. Er nahm zwei konzentrische Metallkugeln, verbunden durch einen elektrischen Kontakt, und lud die äussere mit statischer Ladung auf. Nach Entfernung des Kontaktes entlud und entfernte er die äussere Kugel, mass die Ladung auf der Innenkugel mittels eines Elektrometers und fand Null.

a) Bestimme die Ladungsverteilung auf zwei konzentrischen, elektrisch verbundenen Metallkugeln unter folgenden beiden Annahmen für das Potential einer Punktladung:

$$\text{i)}\ \frac{q}{r^{1-\varepsilon}}, \qquad\qquad \text{ii)}\ \frac{q}{r}e^{-\mu r}$$

Das zweite Potential entspricht einem Yukawa-Potential, welches für endliche Photonmasse von den Proca-Gleichungen vorausgesagt wird. Stelle das Vorzeichen und den Betrag der Ladung Q_1 fest, welche sich auf der inneren Kugel einstellt bei gegebener totaler Ladung Q.

b) Anhand der experimentellen Angaben schätze man ab, mit welcher Präzision Cavendish eine Abweichung vom Coulombfeld in ε oder μ messen konnte. Man bestimme daraus eine obere Schranke für die Photonenmasse ($\mu = mc/\hbar$).

Elektroskop: Ansprechspannung $U_{\mathrm{min}} = 100\,\mathrm{V}$, Kapazität $C_{\mathrm{El}} = 50\,\mathrm{pF}$
Durchschlagsfeld $E_{\mathrm{max}} = 10^5\,\mathrm{V/m}$
Radius der inneren Kugel $R_1 = 15\,\mathrm{cm}$ und der äusseren Kugel $R_2 = 30\,\mathrm{cm}$.