ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

# Elektrodynamik
# Serie 2

SS 05
Prof. G. Blatter

---

### Aufgabe 2.1

a) Berechne die Green'schen Funktionen $G(\boldsymbol{r})$ des Laplace-Operators in 3 Dimensionen. Das heisst, finde die Lösung zu der Gleichung

$$\Delta G(\boldsymbol{r}) \quad = \quad 4\pi\delta(\boldsymbol{r})$$

b) Berechne die Green'sche Funktion des Laplace-Operators in 2 Dimensionen:

$$\Delta G(\boldsymbol{r}) = 2\pi\delta(\boldsymbol{r})$$

c) Berechne die Green'sche Funktion $\tilde{G}(\boldsymbol{r})$ des Operators $\nabla \wedge \nabla$ in 2 Dimensionen. D.h, löse die Gleichung

$$\nabla \wedge \nabla\tilde{G}(\boldsymbol{r}) = 2\pi\delta(\boldsymbol{r}).$$

Erkläre den Zusammenhang der beiden Green'schen Funktionen in 2 Dimensionen mit der Hilfe der komplexen Analysis.

**Hinweis:** harmonische Funktion und Cauchy-Riemann'sche Gleichung.

### Aufgabe 2.2

Betrachte ein 2-dimensionales Gitter von kleinen Inseln, die durch Tunnel-Kontakte verbunden sind. Wir modellieren solche Barrieren mit Kondensatoren der Kapazität $C_1$ und nehmen zusätzlich an, dass alle Inseln mit der Erde durch einen Kondensator $C_0$ verbunden sind. Wir wollen hier einen Ausdruck für die Energie eines solchen Systems herleiten, wenn jede Insel $j$ mit einer Ladung $Q_j$ geladen ist.

1. Berechne die Kapazität $C = Q/V$ eines Plattenkondensators der Fläche $A = 10^4\,\mathrm{nm}^2$ mit Abstand $d = 1\,\text{Å}$ zwischen den Platten. Berechne dann die Energie, falls $Q = e$.

2. Betrachte eine Insel $j$ mit ihren 5 Kondensatoren. Die Insel hat die Ladung $Q_j$ und das Potential $V_j$. Die Erde hat das Potential $V_E = 0$, und die benachbarten Inseln haben die Potentiale $V_{j\pm e_x}$, $V_{j\pm e_y}$. Leite einen Ausdruck für die Ladung $Q_j$ als Funktion der 5 Kapazitäten und Spannungen her.

3. Finde einen Ausdruck der Form $E = \sum_{ij} Q_i(C^{-1})_{ij}Q_j$ für die totale Energie des Systems, wobei jede Insel durch ihre Lage $j = (r_x, r_y)$, ihre Ladung $Q_j$ und ihre Spannung $V_j$ gegeben ist. Diagonalisiere dann die Matrix $C$. Betrachte insbesondere den Fall $C_0 \to 0$.

4. Betrachte im Limes $C_0 \to 0$ den Fall, wo nur zwei Ladungen $Q_{j_1}$ und $Q_{j_2}$ von Null verschieden sind und vergleiche die Energie mit der Energie von zwei Ladungen an den Orten $r_1$ und $r_2$. Was ist der qualitative Unterschied der beiden Probleme ?

Einige nützliche Formeln:

$$\begin{aligned}
J_\nu(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(x\sin(\phi)-\nu\phi)}d\phi \\
\int_0^\infty \frac{J_\nu(bx)x^{\nu+1}}{(x^2+a^2)^{\mu+1}}dx &= \frac{a^{\nu-\mu}b^\mu}{2^\mu\Gamma(\mu+1)}K_{\nu-\mu}(ab) \\
K_0(z) &\sim \begin{cases} -\ln(z) & \text{falls } z \to 0 \\ \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} & \text{falls } z \to \infty \end{cases}
\end{aligned}$$