Elektrodynamik
Serie 5

Aufgabe 5.1 Besselfunktion

Verifiziere die Relation

$$J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu J_\nu(x) \tag{1}$$

für die Besselfunktionen ganzzahliger Ordnung ν, welche in (2.90) gegeben sind durch

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!\,\Gamma(j+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j}. \tag{2}$$

Tipp: Verwende $\Gamma(j+1) = j!$ und

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = 0 \qquad \text{f"ur} \quad x = 0, -1, -2, \ldots, \tag{3}$$

da $\Gamma(x)$ dort Pole hat.

Aufgabe 5.2 Laplaceoperator in $\mathbb{R}^n$

a) Finde den Radialteil des Laplaceoperators in n Dimensionen, das heisst den Laplaceoperator angewendet auf eine rotationsinvariante Funktion $f(r)$,

$$r = |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}. \tag{4}$$

Tipp: Verwende die Kettenregel:

$$\Delta f(r) = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2 f(|x|) = \cdots . \tag{5}$$

b) Zur Vereinfachung der Laplacegleichung $\Delta f = 0$ ersetze man die Funktion durch den Ansatz $f(r) = u(r)/r^\alpha$ um eine (einfachere) Gleichung f"ur $u(r)$ zu erhalten. Bestimme das geeignete α in n Dimensionen, sodass keine Terme mit $u'(r)$ vorkommen. Betrachte speziell den 2- und 3-dimensionalen Fall.

Aufgabe 5.3 Atomic Force Microscope (AFM)**

In der folgenden Aufgabe wird die Detektion eines Dipolfeldes durch ein AFM untersucht. Für eine aktuelle Anwendung mögen Interessierte dazu den Artikel von Blatter *et al.* in Physical Review Letters (Vol. 77, Nr. 3, S. 566) konsultieren.
Im Folgenden sei die Mikroskopspitze gemäss Skizze unten gegeben. Sie wird als Hyperboloid modelliert, dessen Öffnungswinkel 2ϑ und Distanz ζ zur Probe gegeben sind.

a) Löse die Laplacegleichung mit azimuthaler Symmetrie, $\Delta V(r,z) = 0$, und mit der Randbedingung $V = V_0 = konst.$ auf der Spitze und $V = 0$ auf der ebenen Probe. Dazu gehe man zu hyperbolischen Koordinaten ξ und η über, welche definiert sind durch

$$r = f\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}, \qquad z = f\xi\eta. \tag{6}$$

$\pm f$ markiert die Lage der Brennpunkte auf der z-Achse einer Schar von Ellipsen und Hyperbeln, welche ein krummliniges Koordinatensystem bilden. Das feste f ist so zu wählen, dass eine Hyperbel mit der AFM Spitze zur Deckung kommt. Für feste ξ bzw. η beschreiben diese Parametrisierungen Ellipsen bzw. Hyperbeln in der (r,z)-Ebene (Die Bedeutung von ξ und η drückt sich leicht in den Distanzen s_1 und s_2 eines beliebigen Punktes zu den Brennpunkten $(0, \pm f)$ aus: $2f\xi = s_1 + s_2$, $2f\eta = s_2 - s_1$). Der Laplaceoperator (NICHT zu berechnen) in den neuen Koordinaten ist gegeben durch

$$\Delta V(\xi,\eta) = \frac{1}{f^2(\xi^2-\eta^2)}\left[\partial_\xi(\xi^2-1)\partial_\xi V + \partial_\eta(1-\eta^2)\partial_\eta V\right]. \qquad (7)$$

b) Es sei ein Dipol $\boldsymbol{d} = d\boldsymbol{e}_z$ in die Oberfläche der Probe adsorbiert. Man berechne die Kraft auf die Spitze, welche durch diesen Dipol verursacht wird. Dies tue man mittels "actio = reactio", indem man die Kraft des Feldes auf den Dipol berechnet. Die Energie des Dipols im äusseren Feld ist gegeben durch $U = -\frac{1}{2}\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{E}$ (der Faktor $\frac{1}{2}$ berücksichtigt, dass das E-Feld nur im oberen Halbraum existiert). Berechne die Kraft parallel zur Oberfläche $F_\parallel$. Sei die Geometrie des Mikroskopes gegeben durch $\zeta = 1\text{Å}$ und $\theta = \pi/10$ und sei $V_0 = 0.1$ Volt die Spannungsdifferenz. Wie gross ist die Kraft (in Newton) verursacht durch einen Dipol der Stärke $d = e(1\text{Å})$? Kann man derartige Kräfte mit heutiger Technologie messen?

c) (Fakultativ) Als Zusatzaufgabe kann man sich der Berechnung der senkrechten Kraft widmen. Die Mikroskopspitze muss dabei nach oben geschoben werden, ohne dass man ihre Form (Krümmung) verändert.