ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Elektrodynamik
Serie 9

SS 05
Prof. G. Blatter

Aufgabe 9.1 Abschirmung von Ladungen im Metall

Wird in einem Medium von beweglichen Ladungsträgern ein (elektrostatisches) Potential angelegt, richtet sich die Ladungsdichte $n(\boldsymbol{x})$ danach aus, und das Potential wird abgeschirmt. In Metallen sind die Leitungselektronen quasi frei, und ihre Dichte wird abhängig vom Potential, gemäss

$$n(\boldsymbol{x}) = n\Big(\phi(\boldsymbol{x})\Big).$$

Diese Gleichung kann nach dem Potential entwickelt werden,

$$n(\boldsymbol{x}) = n_o + n'\phi(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2}n''\phi(\boldsymbol{x})^2 + \ \dots\ .$$

Wir wollen nach dem linearen Term abbrechen. n_o verschwindet im Metall wegen der Ladungsneutralität. Stelle die Poissongleichung auf für das elektrostatische Potential und schreibe sie in der Form

$$\Delta\phi(\boldsymbol{x}) - \frac{1}{\lambda^2}\phi(\boldsymbol{x}) = -4\pi\rho_{ext}(\boldsymbol{x})\,. \tag{1}$$

Was beschreibt die Längenskala λ? Bestimme die Lösung dieser Gleichung für eine Punktladung q, und berechne die totale induzierte Ladung im Metall. Wie lässt sich diese aufgrund der Abschirmung verstehen?
Die Abschirmung kann auch durch eine Dielektrizätskonstante beschrieben werden, welche im Fourierraum durch

$$-\boldsymbol{q}^2\phi(\boldsymbol{q}) = -\frac{4\pi\rho_{ext}(\boldsymbol{q})}{\varepsilon(\boldsymbol{q})}$$

definiert ist. Skizziere die q-Abhängigkeit von ε.

Aufgabe 9.2 Streufeld eines geladenen Vortex

Betrachte ein metallisches Medium im unteren Halbraum $z < 0$. Der obere Halbraum sei Vakuum. Ein geladener Vortex durchziehe senkrecht das Medium. Solche Vortices entstehen zum Beispiel in Hochtemperatursupraleitern, wenn ein senkrechtes Magnetfeld angelegt wird. Das Magnetfeld wird vom Supraleiter verdrängt bis auf vertikal verlaufende Tubi, welche den ganzen Fluss des Feldes führen. In diesen Vortices ist die Supraleitung unterdrückt. Dies führt unter anderem dazu, dass sich die Ladungsträgerkonzentration verändert und der Vortex eine effektive elektrische Ladung erhält. Wir wollen das elektrische Streufeld bestimmen, das ein geladener Vortex im oberen Halbraum produziert.
Das elektrostatische Potential genügt den Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \Delta\phi(\boldsymbol{x}) &= 0, \qquad z > 0 \\ \Delta\phi(\boldsymbol{x}) - \frac{1}{\lambda^2}\phi(\boldsymbol{x}) &= -4\pi\delta(x)\,\delta(y)\,, \qquad z < 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Löse diese Gleichungen im Fourierraum und stelle sie im direkten Raum formal als Superposition von ebenen Wellen dar. Gesucht ist eine stetig differenzierbare Lösung im ganzen Raum.
Bestimme das Streufeld im oberen Halbraum unter Benützung von $z \gg \lambda$ und $z > r$ bei der Rücktransformation. Wie kann man dieses elektrostatische Feld charakterisieren?

Aufgabe 9.3 Dirac Quantisierungsbedingung

Eines der fundamentalen Rätsel der Natur ist die Quantisierung der Ladung. Dirac zeigte, dass die blosse Existenz magnetischer Monopole eine Erklärung hierfür liefern könnte.
a) Berechne die Impulsänderung einer Ladung, welche an einem magnetischen Monopolfeld

$$\frac{g\boldsymbol{r}}{r^3}$$

vorbeifliegt, in der Approximation unveränderter Flugbahn der Ladung. Berechne daraus die Drehimpulsänderung in Flugrichtung. In der Quantenmechanik ist der Drehimpuls quantisiert in Vielfachen der Planck'schen Konstante $\hbar$. Leite daraus die Dirac'sche Quantisierungsbedingung $ge/\hbar c = n/2$ $(n \in Z)$ her.
b) Alternativ, berechne den totalen Drehimpuls des elektromagnetischen Feldes einer elektrischen und magnetischen Ladung im Abstand $\boldsymbol{R}$ und bestimme damit den Drehimpuls des Feldes vor und nach Experiment (a). Leite daraus die Dirac'sche Quantisierungsbedingung her. (Auch hier musst Du die Quantisierung des Drehimpulses der elektrischen Ladung aus der Quantenmechanik voraussetzen.)