

**Aufgabe 12.1 Formfaktor**

Wir modellieren einen einfachen Kristall durch identische dielektrische Kügelchen von der Grössenordnung eines Atoms ( $R \sim 1\text{\AA}$ ), die in einem Gitter arrangiert sind. Eine ebene Lichtwelle fällt auf diesen Kristall und streut daran. Zu berechnen ist der differentielle Wirkungsquerschnitt der gestreuten Strahlung. Von entscheidender Wichtigkeit ist dabei der Formfaktor der Verteilung der Streuer. Für kristalline Verteilungen erhält man ein charakteristisches Muster von Streurichtungen (Lichtpunkten auf einem Schirm), das sogenannte Laue-Beugungsbild, mit dem man die Kristallstruktur bestimmen kann.

- Berechne den differentiellen Wirkungsquerschnitt für einen kubischen Kristall der Kantenlänge  $Na$ , wobei  $a$  die Distanz zwischen zwei Atomen ist. Die ebene Welle treffe normal auf eine der Seitenflächen ( $xy$ -Ebene) auf. Zeichne das Muster der Peaks im Bereich  $0 \leq \theta < \pi/2$  für  $\frac{a}{\lambda} \in [1, 3]$ . (Verwende dabei Polarkoordinaten  $(r, \phi) \equiv (\theta, \phi)$ )
- Wie sieht der Formfaktor aus im Limes  $N \rightarrow \infty$ ?
- Berechne nun auch den Wirkungsquerschnitt für einen kubisch raumzentrierten Kristall, das heisst einen kubischen Kristall (Ausmasse und Atomabstand wie im Teil a)), der zusätzlich in der Mitte jeder kubischen Zelle ein Atom hat. Welche Streupunkte verschwinden oder kommen dazu in der Skizze bei a)?

**Aufgabe 12.2 Quadrupolmoment**

- Beweise die Beziehung  $\text{Tr}(Q_{ij}) = \sum_i Q_{ii} = 0$  für den Quadrupoltensor einer Ladungsverteilung. Wie gross sind die Quadrupolmomente einer radialsymmetrischen und einer axialsymmetrischen Ladungsverteilung? (Benütze Symmetrieüberlegungen und die obige Beziehung.)
- Berechne die Quadrupolmomente für eine Ladungsverteilung der Form  $\sigma(r, \theta, \phi, t) = \delta(r - r_0)(\sigma_0 + \Delta\sigma_0(\cos(2\theta) + \frac{1}{3})) \sin(\omega t)$ . Hat diese Ladungsverteilung auch andere nichttriviale Momente?

**Aufgabe 12.3 Hertzscher Dipol**

Ein *Hertzscher Dipol* liegt vor, wenn wir eine bewegliche Ladung  $Q$  zusammen mit einer ihr benachbarten ruhenden Ladung  $-Q$  zu einem zeitlich veränderlichen Moment  $\mathbf{p}(t) = Q\mathbf{l}(t)$  zusammenfassen, wo  $\mathbf{l}(t)$  den vektoriellen und zeitlich veränderlichen Abstand beider Ladungen ist. Gesucht ist die von diesem Dipol ausgesendete elektromagnetische Strahlung weit weg von den beiden Ladungen.

- Der Hertzsche Vektor ist definiert als

$$\mathbf{\Pi}(\mathbf{x}, t) := \mathbf{p}(t - r/c)/r,$$

wobei  $r := |\mathbf{x}|$  die Distanz zur ruhenden Ladung bezeichnet. Für die Potentiale  $\Phi$  und  $\mathbf{A}$  wählen wir die Lorentzgleichung,  $\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Phi = 0$ . Zeige, dass im Grenzfall wo  $r \gg |\mathbf{l}|$  die beiden Potentiale gegeben sind durch

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{\Pi}(\mathbf{x}, t), \quad \Phi(\mathbf{x}, t) = -\nabla \cdot \mathbf{\Pi}(\mathbf{x}, t),$$

und leite daraus die Ausdrücke für das elektrische bzw. das magnetische Feld her.

- b) Die Bahn der beweglichen Ladung sei geradlinig parallel zur z-Achse. In welche Richtung zeigt der Hertzsche Vektor? Der Beobachtungspunkt  $\mathbf{x}$  sei Ursprung eines (orientierten) Dreibeins  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_\varphi)$ :  $\mathbf{e}_r := \mathbf{x}/r$ ,  $\mathbf{e}_\vartheta$  ist der Einheitsvektor senkrecht zu  $\mathbf{e}_r$  in der  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_z)$ -Ebene, und  $\mathbf{e}_\varphi$  ist der auf  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\vartheta)$  senkrecht stehende Einheitsvektor (sphärische Koordinaten). Schreibe den Vektor  $\mathbf{\Pi}$  in dieser Basis und bestimme die Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  in der Fernzone (man behalte nur Terme  $O(\frac{1}{r})$ ). Welche Struktur hat die elektromagnetische Strahlung weit weg vom Dipol?
- c) Die Ladung  $Q$  schwinde harmonisch mit der Frequenz  $\omega$  auf und ab. Wie sehen  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  für diesen Spezialfall aus?