Kontinuumsmechanik
Serie 8

Aufgabe 8.1 Strömung zwischen zwei koaxialen Zylindern

a) Berechne das Geschwindigkeitsprofil für eine inkompressible Flüssigkeit zwischen zwei koaxialen, langen Zylindern (mit Radien $R_1 < R_2$ und Länge $L \gg R_2$), die sich mit Winkelgeschwindigkeiten Ω_1 und Ω_2 drehen. Benütze dazu die Navier-Stokes-Gleichung und drücke sie mit Hilfe zylindrischer Koordinaten aus.

b) Berechne das Drehmoment der viskosen Kräfte auf den Zylinder. Tipp: zeige, dass die Geschwindigkeitsdifferenz zwischen zwei Schalen mit Radius r und $r + \Delta r$ für einen rotierenden Beobachter durch $\Delta v = r\partial_r \Omega(r)\Delta r$ gegeben ist und benutze die Definition des Reibungskoeffizienten

$$\mu = \frac{F(r)}{A\partial_r v} ,$$

wobei F die Kraft auf die Fläche A ist (F/A ist die Schubspannung).

c) Beschreibe, wie man mit einer solchen Apparatur die Viskosität μ einer Flüssigkeit messen kann ($\rightarrow$ Couette-Viskosimeter).

Aufgabe 8.2 Dynamik linearer Wirbel in 2D

a) Betrachte ein ideales Fluidum mit N parallelen idealen Wirbellinien. Die Gleichung, welche das Geschwindigkeitsfeld beschreibt hat nach Skript die Form

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \sum_{j=1}^{N} \Omega_j \ \hat{z} \ \delta(\vec{r} - \vec{r}_j) ,$$

mit $\vec{r} = (x, y, 0)$. Zeige, dass für ein unendliches Gebiet die allgemeine Lösung gegeben ist durch

$$\vec{v} = -\sum_{j=1}^{N} \Omega_j \vec{\nabla} \times \hat{z} \ G(\vec{r}, \vec{r}_j) ,$$

wobei $G(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = \frac{1}{2\pi} \ln |\vec{r} - \vec{r}_j|$. Tipp: G ist die Greens-Funktion in 2D.

b) Ein Wirbel mit endlicher Ausdehnung a wird beschrieben durch die Gleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{\Omega} \ \frac{e^{-r^2/2a^2}}{2\pi a} .$$

Wie sieht das Geschwindigkeitsprofil $\vec{v}(\vec{r})$ aus?

c) Zwei Wirbel entgegengesetzter Zirkulation laufen auf eine planare Wand zu. Beschreibe ihre Trajektorien. Tipp: Verwende Spiegelwirbellinien.

Aufgabe 8.3 Schalldämpfung in viskosem Gas

Betrachtet sei ein Gas mit nicht verschwindender Viskosität. Es sei charakterisiert durch die Zustandsgleichung $P = P(\rho)$, wobei P den Druck und ρ die Massendichte bezeichne. Weiterhin seien die Schwankungen von Druck, δP, und Dichte, $\delta\rho$, sehr klein gegenüber den zeitlich konstanten räumlichen Mittelwerten P_0 und ρ_0.

a) Zeige, dass unter den obigen Vorraussetzungen die zeitliche Entwicklung der Zustandsgrössen P und ρ näherungsweise gegeben ist durch:

$$\left(\triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\delta P = -\frac{4}{3}\frac{\mu}{\rho_0 c^2}\triangle\frac{\partial}{\partial t}\delta P \tag{1}$$

Hierbei ist

$$c^2 := \frac{\partial}{\partial\rho}P(\rho_0) \tag{2}$$

das Betragsquadrat der (freien) Schallgeschwindigkeit und μ der Reibungskoeffizient. (Tipp: Verwende die Navier-Stokes-Gleichung!)

b) Löse die obige Gleichung und diskutiere sie: Wann leitet das Gas den Schall? Wie lange dauert es, bis die Intensität einer einzelnen ebenen Schallwelle um die Hälfte beziehungsweise um ein Viertel gesunken ist? Welche Strecke hat der Schall dann jeweils zurückgelegt? Welche Frequenzen leitet das Gas am besten, niedrige oder hohe?