Aufgabe 10.1 Bogoliubov-Valatin Tranformation für das freie Elektronengas

Der Hamilton-Operator für ein freies Elektronengas wird in zweiter Quantisierung geschrieben als

$$\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}s} \xi_k c^\dagger_{\mathbf{k}s} c_{\mathbf{k}s}, \tag{1}$$

wobei s den zwei Spin Komponenten enspricht und $\xi_k = \epsilon_k - \mu$, mit dem chemischen Potential $\mu = E_\mathrm{F}$ (bei $T = 0$). Wir möchten den Hamilton-Operator in einer anderen, aber äquivalenten Form schreiben, in der die Anregungen des Systems quasi-Teilchen entsprechen. Wir definieren den Erzeugungsoperator $\alpha^\dagger_{\mathbf{k}\uparrow}$ eines Quasiteilchens mit Spin $\uparrow$ und Impuls $\mathbf{k}$ als eine Linearkombination von $c_{-\mathbf{k}\downarrow}$ und $c^\dagger_{\mathbf{k}\uparrow}$ durch eine Bogoliubov-Valatin Transformation

$$\begin{pmatrix} c_{\mathbf{k}\uparrow} \\ c^\dagger_{-\mathbf{k}\downarrow} \end{pmatrix} = U_\mathbf{k} \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{k}\uparrow} \\ \alpha^\dagger_{-\mathbf{k}\downarrow} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

wobei $U_\mathbf{k}$ eine 2×2 Matrix ist. Zeige, dass die Operatoren $\alpha_{\mathbf{k}s}, \alpha^\dagger_{\mathbf{k}s}$ eine fermionische Statistik erzeugen falls $U_\mathbf{k}$ unitär ist, das heisst,

$$U_\mathbf{k} = \begin{pmatrix} u_\mathbf{k} & -v^*_\mathbf{k} \\ v_\mathbf{k} & u^*_\mathbf{k} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

mit der Bedingung $|u_\mathbf{k}|^2 + |v_\mathbf{k}|^2 = 1$. Um die Anregungen eines freien Elektronengases zu beschreiben, wählen wir $u_\mathbf{k} = 1$, $v_\mathbf{k} = 0$ für $k > k_\mathrm{F}$ und $u_\mathbf{k} = 0$, $v_\mathbf{k} = 1$ für $k < k_\mathrm{F}$. Zeige, dass der Hamilton-Operator die Form

$$\mathcal{H} = \sum_\mathbf{k} |\xi_k| \Big(\alpha^\dagger_{\mathbf{k}\uparrow} \alpha_{\mathbf{k}\uparrow} + \alpha^\dagger_{\mathbf{k}\downarrow} \alpha_{\mathbf{k}\downarrow} \Big) + E_G, \tag{4}$$

mit der Grundzustandenergie $E_G = 2 \sum_{k<k_\mathrm{F}} \xi_k$ annimmt.

Aufgabe 10.2 Bogoliubov-Theorie des schwach wechselwirkenden Bose-Gases

Wir betrachten den allgemeinen Hamilton-Operator mit einer Paarwechselwirkung in Impulsdarstellung

$$\mathcal{H} = \sum_\mathbf{k} \frac{k^2}{2m} a^\dagger_\mathbf{k} a_\mathbf{k} + \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k},\mathbf{p},\mathbf{q}} V_\mathbf{q} a^\dagger_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} a^\dagger_{\mathbf{p}-\mathbf{q}} a_\mathbf{p} a_\mathbf{k}, \tag{5}$$

wobei $\hbar = 1$ gesetzt ist und die Operatoren $a^\dagger_\mathbf{k}$ und $a_\mathbf{k}$ Bose-Vertauschungsrelationen genügen. $V_\mathbf{q}$ ist die Fourier-Transformierte der Paarwechselwirkung

$$V_\mathbf{q} = \int d^3x \, e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} V(\mathbf{x}). \tag{6}$$

Im Falle des idealen Bose-Gases ist der Grundzustand mit $\mathbf{k} = 0$ makroskopisch besetzt. In einem schwach wechselwirkenden Bose-Gas wird sich der Grundzustand nur leicht vom Grundzustand des idealen Bose-Gases unterscheiden, d.h. die Anzahl der Teilchen N_0 im Grundzustand wird viel größer sein als die Anzahl der Teilchen in angeregten Zuständen, so dass $N - N_0 \ll N_0$ erfüllt ist, wobei N die Gesamtteilchenzahl des Systems beschreibt. Man kann dann nur Wechselwirkungen von Teilchen im Grundzustand mit Teilchen im Grundzustand und Wechselwirkungen von Teilchen in angeregten Zuständen mit Teilchen im Grundzustand betrachten und

Wechselwirkungen von Teilchen in angeregten Zuständen mit Teilchen in angeregten Zuständen vernachlässigen. Die Wirkung von a_0 und $a_0^\dagger$ auf den Grundzustand mit N_0 Teilchen ist

$$\begin{aligned} a_0 \, |N_0, \ldots\rangle &= \sqrt{N_0} \, |N_0 - 1, \ldots\rangle, \\ a_0^\dagger \, |N_0, \ldots\rangle &= \sqrt{N_0 + 1} \, |N_0 + 1, \ldots\rangle. \end{aligned} \tag{7}$$

Da der Grundzustand makroskopisch besetzt ist, entsprechen beide Relationen näherungsweise der Multiplikation mit $\sqrt{N_0}$. Der Kommutator $a_0 a_0^\dagger - a_0^\dagger a_0 = 1$ ist im Vergleich zu den Matrixelementen von a_0 und $a_0^\dagger$ klein. Daher können die Operatoren $a_0 = a_0^\dagger = \sqrt{N_0}$ durch eine c-Zahl genähert werden.

a) Zeige, dass der Hamilton-Operator (5) mit den obigen Näherungen die Form

$$\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}} \frac{k^2}{2m} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \frac{N}{V} \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}} V_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \frac{N^2}{2V} V_0 + \frac{N}{2V} \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}} V_{\mathbf{k}} \left(a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{-\mathbf{k}}^\dagger + a_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}} \right) \tag{8}$$

annimmt. Hierbei wurde N_0 durch N und die Zahl der Teilchen in angeregten Zuständen ausgedrückt

$$N = N_0 + \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}. \tag{9}$$

b) Der Hamilton-Operator (8) ist nicht diagonal. Wir wollen ihn durch eine Bogoliubov-Transformation der Form

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{k}} &= u_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} \alpha_{-\mathbf{k}}^\dagger \\ a_{\mathbf{k}}^\dagger &= u_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}}^\dagger + v_{\mathbf{k}} \alpha_{-\mathbf{k}}, \end{aligned} \tag{10}$$

mit reellen Koeffizienten $u_{\mathbf{k}}, v_{\mathbf{k}}$ diagonalisieren. Zeige, dass $u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2 = 1$ $(\star)$, wenn man voraussetzt, dass $\alpha_{\mathbf{k}}$ und $\alpha_{\mathbf{k}}^\dagger$ Bose-Vertauschungsrelationen erfüllen.

c) Setze nun (10) in (8) ein und leite eine Bedingung für $u_{\mathbf{k}}$ und $v_{\mathbf{k}}$ her, so dass die nichtdiagonalen Elemente des Hamilton-Operators verschwinden. Bestimme aus $(\star)$ und dieser Bedingung die Koeffizienten $u_{\mathbf{k}}$ und $v_{\mathbf{k}}$ und zeige, dass

$$\mathcal{H} = E_0 + \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}} \omega_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}}^\dagger \alpha_{\mathbf{k}}, \tag{11}$$

mit

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{N^2}{2V} V_0 - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}} \left(\frac{k^2}{2m} + n V_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}} \right), \\ \omega_{\mathbf{k}} &= \sqrt{\left(\frac{k^2}{2m} \right)^2 + \frac{n k^2 V_{\mathbf{k}}}{m}}, \end{aligned} \tag{12}$$

geschrieben werden kann.

d) Betrachte nun eine Kontaktwechselwirkung der Form $V(\mathbf{x}) = \lambda \delta(\mathbf{x})$ mit einem reellen Parameter λ. Entwickle $\omega_{\mathbf{k}}$ für kleine und große k und diskutiere die Grenzfälle. Um Suprafluidität zu erhalten, muss für die Geschwindigkeit einer Flüssigkeit gelten

$$v < \min_{\mathbf{k}} \left(\frac{d\omega_{\mathbf{k}}}{dk} \right) \qquad \text{(Landau – Kriterium)}. \tag{13}$$

Was kann man im Grenzfall kleiner $\mathbf{k}$ für ein schwach wechselwirkendes Bose-Gas über dessen suprafluiditäts Eigenschaften sagen

(i) für $\lambda \to 0$,

(ii) für endliches λ?

CK