Quantenmechanik II
Serie 11

Aufgabe 11.1 Der Casimir Effekt

Eine interessante Folgerung aus den Vakuum-Fluktuationen des freien, quantisierten elektromagnetischen Feldes ist das Auftreten einer Kraft zwischen zwei ungeladenen, metallischen Körpern. Diese Kraft folgt daraus, dass die Nullpunkts-Energie des quantisierten elektromagnetischen Feldes vom Abstand zwischen den beiden Körpern abhängt, da durch eine relative Verschiebung der Körper die Randbedingungen verändert werden. Diese sogenannte Casimir Kraft hängt von der Geometrie der Körper ab und kann sowohl attraktiv als auch repulsiv sein. Am einfachsten lässt sie sich für weit ausgedehnte parallele Metallplatten berechen. In diesem Fall ist die Kraft attraktiv, wie wir sehen werden.

a) Betrachte eine rechteckige Kiste mit den Abmessungen $L_x \times L_y \times L_z$ und perfekt leitenden, metallischen Wänden. Da die elektromagnetischen Felder im Metall veschwinden, gelten die Randbedingungen $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$ und $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0$. Die Eigenschwingungen des elektrischen Feldes in der ladungsfreien Kiste sind stehende Wellen der Form

$$\begin{aligned} E_x(x,y,z,t) &= E_x^0 \cos(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z)e^{-i\omega_k t} \\ E_y(x,y,z,t) &= E_y^0 \sin(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)e^{-i\omega_k t} \\ E_z(x,y,z,t) &= E_z^0 \sin(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z)e^{-i\omega_k t}, \end{aligned} \tag{1}$$

mit $k_i = \pi n_i / L_i$ und $\omega_k = ck = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$. Da die Kiste ladungsfrei ist, muss zusätzlich $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}^0 = 0$ gelten. Zeige, dass die gesamte Nullpunktsenergie des elektromagnetischen Feldes in der Kiste durch

$$\begin{aligned} E_0(L_x, L_y, L_z) &= \frac{\hbar c}{2}\Bigg\{ \sum_{n_x=1}^{\infty}\sum_{n_y=1}^{\infty}\sqrt{\left(\frac{n_x\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y\pi}{L_y}\right)^2} \\ &\quad + \sum_{n_y=1}^{\infty}\sum_{n_z=1}^{\infty}\sqrt{\left(\frac{n_y\pi}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z\pi}{L_z}\right)^2} + \sum_{n_z=1}^{\infty}\sum_{n_x=1}^{\infty}\sqrt{\left(\frac{n_z\pi}{L_z}\right)^2 + \left(\frac{n_x\pi}{L_x}\right)^2}\Bigg\} \\ &\quad + \hbar c \sum_{n_x=1}^{\infty}\sum_{n_y=1}^{\infty}\sum_{n_z=1}^{\infty}\sqrt{\left(\frac{n_x\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y\pi}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z\pi}{L_z}\right)^2} \end{aligned} \tag{2}$$

gegeben ist.

b) Betrachte nun eine Kiste mit den Abmessungen $R \times L \times L$ und einer dünnen metallischen Trennwand senkrecht zur x-Achse mit einem Abstand a zu einer der beiden Wände. Die Nullpunkts-Energie des elektromagnetischen Feldes für diese Anordnung ist durch

$$E_{\mathrm{tot}}(R,a,L) = E_0(a,L,L) + E_0(R-a,L,L) \tag{3}$$

gegeben. Es ist zu erwarten, dass $E_{\mathrm{tot}}(R,a,L) < E_0(R,L,L)$ gilt, da durch die zusätzliche Randbedingung weniger Moden vorhanden sind. Um die auf die Trennwand wirkende Kraft zu erhalten, berechne man zuerst die Energiedifferenz zwischen der Anordnung mit der Trennwand im Abstand a und der Anordnung mit der Trennwand im Abstand $R/2$. (Der Faktor $1/2$ mag hier etwas willkürlich erscheinen. Allerdings kann $1/2$ an dieser Stelle durch ein beliebiges η mit $0 < \eta < 1$ ersetzt werden, ohne das Schlussresultat zu beeinflussen.)

$$\Delta E_{\mathrm{tot}}(R,a,L) = E_{\mathrm{tot}}(R,a,L) - E_{\mathrm{tot}}(R,R/2,L) \tag{4}$$

Die Berechnung von ΔE_{tot} ist nicht ohne weiteres möglich, da die einzelnen Summanden divergieren. Deshalb führen wir einen ultraviolett cutoff α ein und berechnen

$$\Delta E_{\text{tot}}^{\alpha}(R,a,L) = E_0^{\alpha}(a,L) + E_0^{\alpha}(R-a,L) - 2E_0^{\alpha}(R/2,L) \tag{5}$$

mit

$$E_0^{\alpha}(d,L) = \hbar c \sum_{n_x=1}^{\infty}\sum_{n_y=1}^{\infty}\sum_{n_z=0}^{\infty} k(d,L) e^{-\alpha k(d,L)/\pi}, \tag{6}$$

wobei

$$k(d,L) = \sqrt{\left(\frac{n_x\pi}{d}\right)^2 + \left(\frac{n_y\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n_z\pi}{L}\right)^2}.$$

Zeige, dass formal $\lim_{\alpha\to 0^+} \Delta E_{\text{tot}}^{\alpha} = \Delta E_{\text{tot}}$ gilt. Wie sich herausstellen wird, ist dieser Grenzwert endlich. Man kann die Einführung des cutoffs α einfach als mathematischen Trick betrachten, der uns ermöglicht ΔE_{tot} zu berechen. Andererseits kann man ihm auch eine physikalische Bedeutung beimessen: Für grosse Frequenzen ($\omega \gg \omega_{\text{Plasma}}$) wird die metallische Trennwand transparent, d.h. sie liefert keine zusätzlichen Randbedingungen. Deshalb müssen solche Moden aus der Berechnung der Casimir Kraft ausgeschlossen werden. Wir wollen hier aber sehr gute Leiter betrachten, und insbesondere soll $\alpha/a \ll 1$ gelten. Die Energie pro Flächeneinheit, die benötigt wird um zwei unendlich ausgedehnte, unendlich weit enfernte und unendlich gut leitende parallele Metallplatten auf eine Distanz a zu bringen, ist dann durch

$$\epsilon_{\text{C}}(a) = \lim_{\alpha\to 0}\lim_{R\to\infty}\lim_{L\to\infty} \Delta E_{\text{tot}}^{\alpha}(R,a,L)/L^2 \tag{7}$$

gegeben. Zeige, dass

$$\epsilon_0^{\alpha}(d) = \lim_{L\to\infty} E_0^{\alpha}(d,L)/L^2 = \frac{\hbar c\pi^2}{4}\sum_{l=1}^{\infty}\int_0^{\infty} dz \frac{l^3}{d^3}\sqrt{1+z}\exp\left(-\frac{\alpha l}{d}\sqrt{1+z}\right). \tag{8}$$

c) Um die Summe über l ausführen zu können, sollten alle l im Exponenten stehen. Verwende die Identität $x^3\exp(\alpha x) = (d^3/d\alpha^3)\exp(\alpha x)$ und zeige, indem du die Summe und das Integral ausführst, dass

$$\epsilon_0^{\alpha}(d) = \frac{\hbar c\pi^2}{2}\frac{d^2}{d\alpha^2}\frac{1}{(e^{\alpha/d}-1)\alpha}. \tag{9}$$

Entwickle (9) für kleine α mit Hilfe der Entwicklung

$$\frac{x}{e^x-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n x^n}{n!},$$

wobei B_n die Bernoulli Zahlen sind. Zeige, dass

$$\epsilon_0^{\alpha}(d) = \frac{\hbar c\pi^2}{2}\left[6B_0\frac{d}{\alpha^4} + 2B_1\frac{1}{\alpha^3} + \frac{2B_4}{4!}\frac{1}{d^3} + \mathcal{O}(\alpha)\right] \tag{10}$$

und damit ergibt sich mit $B_4 = -1/30$

$$\epsilon_{\text{C}}(a) = -\frac{\pi^2}{720}\frac{\hbar c}{a^3}. \tag{11}$$

Berchne damit die Casimir Kraft pro Einheitsfläche zwischen zwei leitenden Platten. Wie gross ist die Kraft in dyn=10^{-5}N zwischen zwei Platten mit Fläche $1cm^2$ im Abstand $1\mu m$?

NB. Die Casimir Kraft wurde schon 1948 von Casimir vorausgesagt, wurde aber erst vor ein paar Jahren wirklich gemessen. cf.

S.K. Lamoreaux, Phys. Rev. Lett. **78**, 5 (1997).

U. Mohideen and A. Roy, Phys. Rev. Lett. **81**, 4549 (1998).

A. Roy and U. Mohideen, Phys. Rev. Lett. **82**, 4380 (1999).

M.I.(A.R.)