Quantenmechanik II
Serie 13

Aufgabe 13.1 Das "Kleinsche Paradoxon"

Wir betrachten ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Potential A_μ beschrieben durch die Klein-Gordon Gleichung

$$\left[-\left(i\partial_\mu - eA_\mu\right)\left(i\partial^\mu - eA^\mu\right) + m^2\right]\psi(x) = 0. \tag{1}$$

Wobei $x = (t, \mathbf{x})$ und $c = \hbar = 1$.

a) **Freies Teilchen**

Finde die Eigenwerte und Eigenfunktionen für das freie Problem ($A_\mu = 0$) in einer Box mit Volumen L^3 und periodischen Randbedingungen. Berechne die erhaltene Norm

$$\int_{L^3} d\mathbf{x}\left[\psi^*(\mathbf{x})i\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial t}\psi(\mathbf{x}) - 2eA^0\psi^*(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})\right]. \tag{2}$$

b) **Potentialstufe**

Wir suchen nun die Lösungen für das Problem mit $\mathbf{A} = 0$ und $A_0(\mathbf{x}) = eV\theta(x_3)$ beschrieben durch

$$\left(\Box + m^2 + 2ieV\frac{\partial}{\partial t} - e^2V^2\right)\psi(x) = 0, \tag{3}$$

wobei $V = 0$ für $x_3 < 0$. Betrachte wiederum eine Box L^3 mit periodischen Randbedingungen.

(i) Wir suchen Lösungen der Form

$$\begin{aligned}\psi_I(x_3, t) &= Ae^{i(px_3 - Et)} + Be^{-i(px_3 + Et)} &(4)\\ \psi_{II}(x_3, t) &= Ce^{i(Px_3 - Et)} + De^{-i(Px_3 + Et)}, &(5)\end{aligned}$$

wobei $\psi_I(x_3, t)$ bei $x_3 < 0$ und $\psi_{II}(x_3, t)$ bei $x_3 > 0$ lebt. Finde p und P. Worin unterscheiden sich diese Lösungen vom nichtrelativistischen Fall?

(ii) Um ein Gefühl für die Lösungen zu bekommen, berechnen wir die erhaltene Norm (2) für $\psi_{II}(x_3, t)$ und $D = 0$ ("auslaufende Welle").

(iii) Betrachte ein Wellenpaket, zusammen gesetzt aus den gefundenen Lösungen:

$$\psi_{I(II),\mathrm{wp}}(x_3, t) = \int_{E_0 - \Delta E}^{E_0 + \Delta E} dE\, e^{\cdots}. \tag{6}$$

Gib die Form der Wellenpaket $\psi_{I,\mathrm{wp}}$ mit $B = 0$ und $\psi_{II,\mathrm{wp}}$ mit $D = 0$ für $\Delta E \ll E_0 + m^2$. Was findet man für eine Gruppengeschwindigkeit?

(iv) Um die Beschreibung zu komplettieren, setzen wir die Lösungen für die beiden Halbräume zusammen. Wir wollen eine einfallende Welle von links betrachten, d.h. wir setzen $C = 0$ und $A = 1$. Finde B, und D.

(v) Berechne die Norm (2) der Wellenpaket für $t \to \pm\infty$. Was ist an der Barriere passiert?

S.H.