

Allgemeine Mechanik

WS 02/03

G.M. Graf

ETH Zürich

Kapitel		Seite
1.	Newtonsche Mechanik	1
2.	Das Zweikörpersystem	10
3.	Das restringierte Dreikörperproblem	18
4.	Schwingungen	28
5.	Lagrangesche Systeme	41
6.	Der Kreisel	59
7.	Hamiltonsche Systeme	67
8.	Ausblick auf die Wellenmechanik	83
9.	Relativistische Mechanik	89
10.	Ausblick auf die allgemeine Relativitätstheorie	103
	Literaturverzeichnis	109

Dank gebührt W. Hunziker auf dessen Vorlesungsskript dieser Text weitgehend basiert, sowie Frau A. Schultze für die sorgfältige Textverarbeitung.

1 Newtonsche Mechanik

1. Raum und Zeit

Wir fassen die klassische Vorstellung von Raum und Zeit zusammen, die vor dem Auftritt der speziellen Relativitätstheorie (1905) das Fundament der Mechanik und der Physik überhaupt war. Nach Festlegung der Einheiten der Länge (Massstäbe) und der Zeit (Uhren), sowie eines Bezugssystems, kennzeichnen wir **Ereignisse** durch $(t, \vec{x}) \in \mathbb{R}^{1+3}$ mit

t : Zeitkoordinate
 $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$: kartesische Koordinaten.

Eine absolute, vom Bezugssystem unabhängige Bedeutung haben die Grössen

- $|t_1 - t_2|$: Zeitabstand von zwei beliebigen Ereignissen $(t_1, \vec{x}_1), (t_2, \vec{x}_2)$ (1.1)
(\implies Gleichzeitigkeit ist absolut);

- falls $t_1 = t_2$:
 $|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|$: Raumabstand von zwei gleichzeitigen Ereignissen. (1.2)

Die Koordinatentransformationen, die diese Grössen invariant lassen, sind

$$\begin{aligned} t' &= \lambda t + a, & (\lambda = \pm 1, a \in \mathbb{R}), \\ \vec{x}' &= R(t)\vec{x} + \vec{b}(t), & (R(t) \in \text{SO}(3), \vec{b}(t) \in \mathbb{R}^3), \end{aligned} \tag{1.3}$$

d.h. wir haben noch die Wahl

- der Zeitrichtung ($\leftrightarrow \lambda$),
- des Zeitnullpunkts ($\leftrightarrow a$),
- eines beliebig bewegten, kartesischen räumlichen Bezugssystems ($\leftrightarrow R(t), \vec{b}(t)$).

Die Transformationen (1.3) bilden eine Gruppe, was die Äquivalenz dieser Koordinatensysteme hinsichtlich (1.1, 1.2) zum Ausdruck bringt.

2. Trägheitsgesetz

Vom Standpunkt der Mechanik sind jedoch nicht alle diese Koordinatensysteme äquivalent. Die besondere Klasse der **Inertialsysteme** ist ausgezeichnet durch das **Trägheitsgesetz**:

$$\ddot{\vec{x}} = 0, \quad \left(\cdot = \frac{d}{dt}\right) \tag{1.4}$$

bzw. $\vec{x}(t) = \vec{x}(0) + \dot{\vec{x}}(0)t$

für **freie Teilchen**, d.h. diese bewegen sich geradlinig und gleichförmig. In einem Inertialsystem treten die Trägheitsbahnen $t \mapsto (t, \vec{x}(t))$ als Geraden im \mathbb{R}^4 auf. Alle anderen Inertialsysteme ergeben sich dann durch diejenigen Transformationen (1.3), die geradentreu sind. Es sind dies die **Galilei-Transformationen**

$$\begin{aligned} t' &= \lambda t + a, & (\lambda = \pm 1, a \in \mathbb{R}), \\ \vec{x}' &= R\vec{x} + \vec{v}t + \vec{b}, & (R \in O(3), \vec{v}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3), \end{aligned} \tag{1.5}$$

die wiederum eine Gruppe bilden. Wir **postulieren** die Existenz eines Inertialsystems (und somit unendlich vieler, gleichförmig gegen einander bewegter Inertialsysteme); experimentell ist ein Bezugssystem mit Ursprung im Schwerpunkt des Sonnensystems, dessen Achsen nach Fixsternen orientiert sind, mit grosser Genauigkeit ein Inertialsystem. Soweit nichts anderes gesagt wird, bezeichnen fortan (t, \vec{x}) die Koordinaten eines Ereignisses in einem beliebigen Inertialsystem.

Die durch (1.1, 1.2, 1.4) gegebene Struktur der Raum-Zeit kann auch koordinatenfrei formuliert werden; s. p. 9.

3. Schwerpunktsatz

Jedes Partikel besitzt eine unveränderliche Masse $m > 0$, die (nach Festlegung einer Masseneinheit) durch den Schwerpunktsatz charakterisiert ist: Für ein isoliertes System von N Teilchen mit Koordinaten $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N$ gilt

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{x}}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = 0. \tag{1.6}$$

Hier ist $\vec{p}_i = m_i \dot{\vec{x}}_i$ der **Impuls** des Teilchens i . Gl. (1.6) ist der Erhaltungssatz für den Gesamtimpuls $\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$; mit dem **Schwerpunkt**

$$\vec{X} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{x}_i, \quad M = \sum_{i=1}^N m_i,$$

lässt er sich auch schreiben als $\ddot{\vec{X}} = 0$, bzw.

$$\vec{X}(t) = \vec{X}(0) + \frac{\vec{P}}{M}t,$$

d.h. der Schwerpunkt \vec{X} bewegt sich auf einer Trägheitsbahn.

Bei **Streuprozessen** können Teilchen entstehen oder verschwinden unter Erhaltung von \vec{P} in jedem Inertialsystem. Anwendung auf zwei über $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{v}t$ verbundene Inertialsysteme hat wegen $\vec{p}'_i = \vec{p}_i + m_i \vec{v}$ zur Folge, dass die Gesamtmasse M konstant ist. Insbesondere ist die Masse additiv, falls sich mehrere Teilchen zu einem einzigen verbinden.

4. Bewegungsgleichungen

N Teilchen bilden ein **mechanisches System**, falls ihre **Bahn** (oder Bewegung) $(\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_N(t))$ durch beliebige **Anfangsbedingungen**

$$\vec{x}_1(t_0), \dots, \vec{x}_N(t_0); \dot{\vec{x}}_1(t_0), \dots, \dot{\vec{x}}_N(t_0) \tag{1.7}$$

zu einer beliebigen Zeit t_0 bestimmt ist. Insbesondere ist die Beschleunigung $\ddot{\vec{x}}_i(t_0)$ bestimmt, d.h. es gibt Funktionen \vec{F}_i , derart dass

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i(t) = \underbrace{\vec{F}_i(\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_N(t), \dot{\vec{x}}_1(t), \dots, \dot{\vec{x}}_N(t), t)}_{\text{Kraftgesetz des Systems}} \quad (1.8)$$

(**Newtonsche Bewegungsgleichungen**). Umgekehrt folgt aus dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen, dass (unter schwachen Voraussetzungen an die \vec{F}_i) die Bewegung durch die Anfangsdaten (1.7) bestimmt ist.

Beispiele

Sonnensystem:

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = -G \sum_{k \neq i} m_i m_k \frac{\vec{x}_i - \vec{x}_k}{|\vec{x}_i - \vec{x}_k|^3} \quad (1.9)$$

System geladener Teilchen:

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \sum_{k \neq i} e_i e_k \frac{\vec{x}_i - \vec{x}_k}{|\vec{x}_i - \vec{x}_k|^3} \quad (1.10)$$

Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld:

$$m \ddot{\vec{x}} = e \vec{E}(\vec{x}, t) + \frac{e}{c} \dot{\vec{x}} \wedge \vec{B}(\vec{x}, t) \quad (1.11)$$

Oszillator mit Reibungskraft und Anregung (1-dimensional):

$$m \ddot{x} = -f x - r \dot{x} + k(t) . \quad (1.12)$$

Die Beschreibung dieser Systeme als mechanische Systeme setzt Näherungen voraus. In (1.9, 1.10) wurden Feldwirkungen durch Fernwirkungen ersetzt. In (1.11) ist $\vec{E}(\vec{x}, t)$, $\vec{B}(\vec{x}, t)$ ein äusseres elektromagnetisches Feld ohne Einschluss des vom Teilchen selbst erzeugten Feldes. In (1.12) ist $-r\dot{x}$ eine summarische Beschreibung der Reibung, ohne Berücksichtigung der Dynamik des dämpfenden Mediums.

Typische Kraftgesetze sind wie folgt aufgebaut: \vec{F}_i setzt sich zusammen aus

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(\text{in})} + \vec{F}_i^{(\text{ex})} , \quad (1.13)$$

wobei die **äussere Kraft** $\vec{F}_i^{(\text{ex})} = \vec{F}_i^{(\text{ex})}(\vec{x}_i, \dot{\vec{x}}_i, t)$ unabhängig von $\vec{x}_j, \dot{\vec{x}}_j (j \neq i)$ ist, die **innere Kraft** $\vec{F}_i^{(\text{in})} = \vec{F}_i^{(\text{in})}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$ nur von der Lage der Teilchen abhängt und sich somit statisch ausmessen lässt. Zudem ist $\vec{F}_i^{(\text{in})}$ die Superposition von 2-Körperkräften:

$$\vec{F}_i^{(\text{in})} = \sum_{k \neq i} \vec{F}_{ik} ,$$

(**Kräfteparallelogramm**), wobei $\vec{F}_{ik} = \vec{F}_{ik}(\vec{x}_i, \vec{x}_k)$ die vom Teilchen k auf das Teilchen i wirkende Kraft ist. Für das (abgeschlossene) 2-Teilchensystem gilt nach (1.6)

$$\vec{F}_{ik} + \vec{F}_{ki} = 0$$

(**actio = reactio**). Wenn das Kraftgesetz in jedem Inertialsystem gleich lauten soll, so ist es von der Form

$$\vec{F}_{ik} = f_{ik}(|\vec{x}_i - \vec{x}_k|) \frac{\vec{x}_i - \vec{x}_k}{|\vec{x}_i - \vec{x}_k|} \quad (1.14)$$

mit einer beliebigen skalaren Funktion $f_{ik}(r) = f_{ki}(r)$, d.h. die Kraft liegt in der Verbindungsgeraden der beiden Teilchen und hängt betragsmässig nur von ihrem Abstand ab.

Beweis: Verlangt wird für ein mechanisches 2-Teilchensystem, dass die Bewegungsgleichungen

$$m_1 \frac{d^2 \vec{x}_1}{dt^2} = \vec{F}_{12}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \quad \text{und} \quad m_1 \frac{d^2 \vec{x}'_1}{dt'^2} = \vec{F}'_{12}(\vec{x}'_1, \vec{x}'_2)$$

(beachte: selbes Kraftgesetz \vec{F}_{12}) zueinander äquivalent sind unter Wechsel (1.5) des Inertialsystems:

$$\vec{x}'_i(t') = R\vec{x}_i(\lambda(t' - a)) + \vec{v} \cdot \lambda(t' - a) + \vec{b}. \quad (1.15)$$

Es genügt, Translationen \vec{b} und Drehungen R zu betrachten, um zu schliessen, dass $\vec{F}'_{12}(\vec{x}'_1, \vec{x}'_2) = \vec{F}_{12}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$ und

$$R\vec{F}_{12}(\vec{x}) = \vec{F}_{12}(R\vec{x}), \quad (R \in \text{SO}(3)). \quad (1.16)$$

Wählt man speziell R mit Achse in Richtung $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ der Verbindungsgeraden, d.h. $R\vec{x} = \vec{x}$, so folgt mit $R\vec{F}_{12}(\vec{x}) = \vec{F}_{12}(\vec{x})$ die Behauptung über die Richtung der Kraft:

$$\vec{F}_{12}(\vec{x}) = f_{12}(\vec{x}) \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}.$$

Aus (1.16) folgt nun $f_{12}(\vec{x}) = f_{12}(R\vec{x})$ für jede Drehung R , also $f_{12}(\vec{x}) = f_{12}(|\vec{x}|)$. \square

Die Kräfte (1.14) besitzen stets ein **Potential**:

$$\vec{F}_{ik} = -\frac{\partial}{\partial \vec{x}_i} V_{ik}(|\vec{x}_i - \vec{x}_k|), \quad V'_{ik}(r) = -f_{ik}(r). \quad (1.17)$$

Dementsprechend gilt

$$\vec{F}_i^{(\text{in})} = -\frac{\partial}{\partial \vec{x}_i} V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N), \quad V = \sum_{i < k} V_{ik}(|\vec{x}_i - \vec{x}_k|).$$

Etwas allgemeiner betrachten wir auch innere Kräfte der Form

$$\vec{F}_i^{(\text{in})} = -\frac{\partial}{\partial \vec{x}_i} V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N), \quad (1.18)$$

wobei das Potential invariant ist unter euklidischen Bewegungen

$$V(R\vec{x}_1 + \vec{a}, \dots, R\vec{x}_N + \vec{a}) = V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N), \quad (R \in \text{O}(3), \vec{a} \in \mathbb{R}^3). \quad (1.19)$$

5. Erhaltungssätze

Für mechanische Systeme (1.8) gelten

(a) **Impulssatz**

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\sum_i \vec{p}_i}_{\vec{P}} = \underbrace{\sum_i \vec{F}_i}_{\vec{F}: \text{resultierende Kraft}} . \quad (1.20)$$

(b) **Drehimpulssatz**

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\sum_i \vec{x}_i \wedge \vec{p}_i}_{\vec{L}} = \underbrace{\sum_i \vec{x}_i \wedge \vec{F}_i}_{\vec{M}: \text{resultierendes Drehmoment bzgl. } \vec{x} = 0} . \quad (1.21)$$

Der **Drehimpuls** \vec{L} lässt sich zerlegen in Anteile der Schwerpunktsbewegung und der inneren Bewegung relativ zum Schwerpunkt:

$$\vec{L} = \vec{X} \wedge \vec{P} + \vec{L}_S , \quad \vec{L}_S = \sum_i (\vec{x}_i - \vec{X}) \wedge (\vec{p}_i - m_i \dot{\vec{X}}) .$$

(c) **Energiesatz**

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i^2}_T = \underbrace{\sum_i \vec{F}_i \cdot \dot{\vec{x}}_i}_{\text{Leistung der Kräfte}} \quad (1.22)$$

Die **kinetische Energie** lässt sich ebenso zerlegen in

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\vec{X}}^2 + T_S , \quad T_S = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\dot{\vec{x}}_i - \dot{\vec{X}})^2 .$$

Für Systeme vom Typ (1.13, 1.18, 1.19) verschwinden die Beiträge $\vec{F}^{(\text{in})} = \sum_i \vec{F}_i^{(\text{in})}$ und $\vec{M}^{(\text{in})} = \sum_i \vec{x}_i \wedge \vec{F}_i^{(\text{in})}$ zu (1.20, 1.21), und ihre Leistung verringert das Potential:

$$(i) \quad \vec{F}^{(\text{in})} = 0 , \quad (ii) \quad \vec{M}^{(\text{in})} = 0 , \quad (iii) \quad \sum_i \vec{F}_i^{(\text{in})} \cdot \dot{\vec{x}}_i = -\frac{dV}{dt} .$$

Beweis: Für jeden Einheitsvektor \vec{e} gilt

(i) $\vec{e} \cdot \vec{F}^{(\text{in})} = -\frac{d}{d\lambda} V(\vec{x}_1 + \lambda \vec{e}, \dots, \vec{x}_N + \lambda \vec{e})|_{\lambda=0} = 0$ wegen (1.19).

(ii) Für die Drehung $R(\varphi)$ vom Winkel φ um \vec{e} gilt $\frac{d}{d\varphi} R(\varphi) \vec{x}|_{\varphi=0} = \vec{e} \wedge \vec{x}$, also

$$\vec{e} \cdot \vec{M}^{(\text{in})} = \sum_i (\vec{e} \wedge \vec{x}_i) \cdot \vec{F}_i^{(\text{in})} = -\frac{d}{d\varphi} V(R(\varphi) \vec{x}_1, \dots, R(\varphi) \vec{x}_N)|_{\varphi=0} = 0 .$$

(iii) ist evident. □

Ist das System zudem **abgeschlossen** ($\vec{F}_i^{(\text{ex})} = 0$), so besitzt es die 10 klassischen **Erhaltungsgrößen** (oder: Integrale der Bewegung)

$$\left. \begin{array}{l} \vec{P} \\ M\vec{X} - \vec{P}t \end{array} \right\} \quad 6 \text{ Schwerpunktsintegrale}$$

$$\vec{L}, \quad (\text{oder } \vec{L}_S) \quad 3 \text{ Drehimpulsintegrale} \quad (1.23)$$

$$T + V, \quad (\text{oder } T_S + V) \quad \text{Energieintegral.}$$

6. Galilei-Invarianz

Das **klassische Relativitätsprinzip** verlangt, dass die Bewegungsgleichungen eines abgeschlossenen Systems in jedem Inertialsystem gleich lauten, also invariant sind unter Galilei-Transformationen (1.5). Die Bewegungsgleichungen (1.8, 1.18, 1.19) genügen diesem Postulat:

$$m_i \frac{d^2 \vec{x}_i}{dt^2} = - \frac{\partial}{\partial \vec{x}_i} V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$$

ist äquivalent zu

$$m_i \frac{d^2 \vec{x}'_i}{dt'^2} = - \frac{\partial}{\partial \vec{x}'_i} V(\vec{x}'_1, \dots, \vec{x}'_N),$$

denn wegen (1.15, 1.19) transformieren beide Seiten wie Vektoren: $\vec{u}' = R\vec{u}$. Nebst obiger **passiver Interpretation** des Relativitätsprinzips (beschreiben $\vec{x}_i(t)$ und $\vec{x}'_i(t')$ die selbe Bahn bzgl. verschiedener Inertialsysteme, so erfüllen sie die selbe Bewegungsgleichung), gibt es auch eine **aktive**: bzgl. einem festen Inertialsystem ist mit $\vec{x}_i(t)$ auch $\vec{x}'_i(t')$ eine mögliche Bahn. Besonders eindrücklich ist die Invarianz unter Zeitumkehr:

$$t' = -t, \quad \vec{x}' = \vec{x}.$$

Sie besagt, dass mit jeder Bewegung $\vec{x}(t)$ auch die zeitumgekehrte Bewegung $\vec{x}(-t)$ möglich ist.

Die 10 Erhaltungsgrößen (1.23) stehen in Beziehung zu den 10 kontinuierlichen Parametern \vec{b}, \vec{v}, R, a ($3 + 3 + 3 + 1$) der Galilei-Gruppe (mehr dazu später, s. p. 54).

7. Beschleunigte Bezugssysteme

Wir transformieren die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}$$

eines Teilchens vom x -System (Inertialsystem) in ein beliebig bewegtes y -System durch

$$\vec{x} = R(t)\vec{y} + \vec{b}(t), \quad (R(t) \in \text{SO}(3), \vec{b}(t) \in \mathbb{R}^3).$$

Dann gilt

$$\dot{\vec{x}} = \dot{R}\vec{y} + R\dot{\vec{y}} + \dot{\vec{b}}, \quad \ddot{\vec{x}} = \ddot{R}\vec{y} + 2\dot{R}\dot{\vec{y}} + R\ddot{\vec{y}} + \ddot{\vec{b}},$$

also wegen $R^T R = 1$ (T = transponiert)

$$m\ddot{\vec{y}} = R^T \vec{F} - 2mR^T \dot{R}\dot{\vec{y}} - mR^T \ddot{R}\vec{y} - mR^T \ddot{\vec{b}}. \quad (1.24)$$

Diskussion

$R^T \vec{F} =: \vec{K}$ ist der Vektor der y -Komponenten der Kraft;

$R^T \vec{\ddot{b}} =: \vec{a}$ sind die y -Komponenten der Beschleunigung des Punktes $\vec{y} \equiv 0$.

Die Abbildung $\Omega := R^T \dot{R}$ ist antisymmetrisch, denn aus $R^T R = 1$ folgt

$$R^T \dot{R} + \dot{R}^T R = \Omega + \Omega^T = 0 .$$

Somit hat Ω die Form

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} : \quad \Omega \vec{y} = \vec{\omega} \wedge \vec{y} , \quad (\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)) .$$

Ein im y -System ruhender Punkt hat im x -System die Geschwindigkeit $\dot{\vec{x}} = \dot{R} \vec{y} + \dot{\vec{b}}$; $R^T \dot{\vec{x}} = \vec{\omega} \wedge \vec{y} + R^T \dot{\vec{b}}$ sind die y -Komponenten dieser Geschwindigkeit und folglich:

$\vec{\omega}$ sind die y -Komponenten der Winkelgeschwindigkeit des y -Systems relativ zum x -System.

Weiter gilt

$$\begin{aligned} R^T \ddot{R} &= \dot{\Omega} - \dot{R}^T \dot{R} = \dot{\Omega} - \dot{R}^T R R^T \dot{R} = \dot{\Omega} + \Omega^2 , \\ R^T \ddot{R} \vec{y} &= \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{y} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{y}) . \end{aligned}$$

Insgesamt lautet (1.24) nun

$$m \ddot{\vec{y}} = \vec{K} - 2m(\vec{\omega} \wedge \dot{\vec{y}}) - m(\dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{y}) - m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{y}) - m\vec{a} . \quad (1.25)$$

Die rechts neben \vec{K} auftretenden Terme heissen **Scheinkräfte**, insbesondere

$-2m\vec{\omega} \wedge \dot{\vec{y}}$: Coriolis-Kraft

$-m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{y})$: Zentrifugalkraft.

Dies sind die einzigen Scheinkräfte bei gleichförmiger Rotation des y -Systems ($\vec{\omega} = \text{konstant}$, $\vec{a} = 0$). Erwähnt sei noch

$-m\vec{a}$: Führungskraft.

Bemerkung. Scheinkräfte sind proportional zur **trägen Masse** m_T des Teilchens, die Gravitationskraft $m_S \vec{g}$ zur **schweren Masse** m_S . Die beiden sind aber gleich

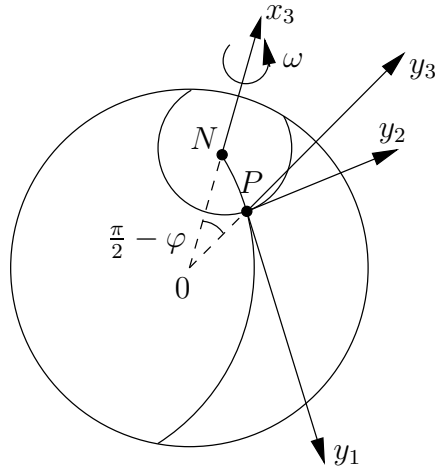
$$m_S = m_T ,$$

(Experiment: $m_S/m_T = 1 \pm 10^{-12}$). In einem homogenen Schwerfeld \vec{g} lautet die Bewegungsgleichung eines Teilchens relativ zu einem frei fallenden, nicht rotierenden Bezugssystem

$$m_T \ddot{\vec{y}} = m_S \vec{g} - m_T \vec{g} = 0 , \quad (1.26)$$

d.h. die Schwerkraft ist wegtransformiert. In einem inhomogenen Schwerfeld trifft dies nur lokal zu — eine wichtige Grundlage der Allgemeinen Relativitätstheorie, s. Kap. 10.

Anwendung. Freier Fall auf der Erdoberfläche



φ : geographische Breite von P .

$(0, \vec{x})$: "raumfestes" Inertialsystem mit x_3 -Achse nach Nordpol N .

(Wir vernachlässigen: Bewegung der Erde um die Sonne; Polschwankungen). Dann lauten die Bewegungsgleichungen für einen Massenpunkt in der Nähe von P :

$$\ddot{\vec{y}} = \vec{g}' - 2\vec{\omega} \wedge \dot{\vec{y}} \quad (1.27)$$

mit

$$\vec{\omega} = (-\omega \cos \varphi, 0, \omega \sin \varphi), \quad \omega = 2\pi/\text{Tag}.$$

und

$$\begin{aligned} \vec{g}' &= \vec{g} - \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{y}) - \vec{a} = \vec{g} - \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (\vec{0P} + \vec{y})) \\ &\equiv (0, 0, -g), \quad (g \cong 9,81\text{m/s}^2) \end{aligned}$$

für $|\vec{y}| \ll |\vec{0P}|$: Die Resultierende \vec{g}' von Führungs- und Schwerebeschleunigung legt die Richtung der Vertikalen durch P fest.

Gl. (1.27) lautet in Komponenten:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= 2\omega \sin \varphi \dot{y}_2, \\ \ddot{y}_2 &= -2\omega \sin \varphi \dot{y}_1 - 2\omega \cos \varphi \dot{y}_3, \\ \ddot{y}_3 &= -g + 2\omega \cos \varphi \dot{y}_2. \end{aligned}$$

Anfangsbedingungen ($t = 0$): $y_1 = y_2 = 0, y_3 = h > 0, \dot{\vec{y}} = 0$. Die erste, bzw. dritte Gleichung liefert

$$\dot{y}_1 = 2\omega \sin \varphi y_2, \quad \dot{y}_3 = -gt + 2\omega \cos \varphi y_2; \quad (1.28)$$

eingesetzt in die zweite

$$\ddot{y}_2 + 4\omega^2 y_2 = 2gt\omega \cos \varphi.$$

Allgemeine Lösung:

$$y_2 = \frac{g \cos \varphi}{2\omega} t + A \sin 2\omega t + B \cos 2\omega t.$$

Die Anfangsbedingung liefert $B = 0, A = -(2\omega)^{-2} g \cos \varphi$, also

$$y_2 = \frac{g \cos \varphi}{2\omega} \left(t - \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t \right);$$

dies ist > 0 für $t > 0$: **Ostablenkung**. Da $\omega t \sim \text{Fallzeit}/\text{Tag} \ll 1$ entwickeln wir nach Potenzen von ωt und finden

$$y_2 = \frac{gt^2}{3} \cos \varphi \cdot \omega t.$$

Aus (1.28) können y_1, y_3 bestimmt werden — der Effekt ist aber nur von der Ordnung $(\omega t)^2$. Bei Aufprall ist $gt^2/2 = h$, also

$$y_2 = \frac{1}{3}\omega \left(\frac{8h^3}{g}\right)^{1/2} \cos \varphi .$$

Beispiel: für $\varphi = 45^\circ, h = 100$ m ist $y_2 \cong 1,6$ cm.

8. Die Struktur der Galilei-Raumzeit

Wir kommen auf die Abschnitte 1, 2 zurück, deren Inhalt wir nun koordinatenfrei fassen. Sei V ein reeller Vektorraum ($\dim V = n$). Ein affiner Raum E ist ein “Vektorraum ohne Ursprung”, dessen Punkte sich um Vektoren aus V unterscheiden. Präziser:

Definition. Ein **affiner Raum** E über V ist eine Menge versehen mit einer Abbildung

$$+ : (E, V) \rightarrow E, \quad (p, \vec{v}) \mapsto p + \vec{v},$$

so dass

- i) $(p + \vec{v}_1) + \vec{v}_2 = p + (\vec{v}_1 + \vec{v}_2), \quad (p \in E, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V)$
- ii) Zu jeden $p, q \in E$ gibt es genau ein $\vec{v} \in V$ mit $p + \vec{v} = q$. Man schreibt $\vec{v} = \vec{pq}$.

Bemerkung. Durch Auszeichnung eines Punktes $O \in E$ (“Ursprung”) entsteht eine Bijektion

$$V \rightarrow E, \quad \vec{v} \mapsto O + \vec{v};$$

durch weitere Auszeichnung einer Basis $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ für V eine Bijektion

$$\mathbb{R}^n \rightarrow E, \quad (x^1, \dots, x^n) \mapsto O + \sum_{i=1}^n x^i \vec{e}_i .$$

Man bezeichnet $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ als Koordinatensystem für E .

Definition. Eine **Galilei-Raumzeit** ist ein 4-dimensionaler affiner Raum E mit folgenden Eigenschaften:

- i) Auf dem Differenzraum V existiert eine ausgezeichnete Linearform τ . (Interpretation: $|\tau(\vec{pq})|$ ist der Zeitunterschied zwischen den Ereignissen p, q).
- ii) Auf dem Unterraum $V_0 = \{\vec{v} \in V \mid \tau(\vec{v}) = 0\}$ ist eine positiv definite Bilinearform (\cdot, \cdot) gegeben. (Interpretation: $|\vec{pq}| = (\vec{pq}, \vec{pq})^{1/2}$ ist der Raumabstand von zwei gleichzeitigen Ereignissen p, q).

Durch diese Definition ausgezeichnet sind Koordinatensysteme $(O, \vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ mit

$$\begin{aligned} |\tau(\vec{e}_0)| &= 1, \\ \tau(\vec{e}_i) &= 0, \quad (\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 3) . \end{aligned}$$

(Interpretation: Inertialsysteme). Man überlegt sich, dass die Transformationen unter ihnen die Galilei-Transformationen (1.5) sind.

2 Das Zweikörper-System

1. Der allgemeine Fall

Zwei Punktteilchen wechselwirken mittels einer Zentralkraft (1.17): Zu lösen sind die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{\vec{x}}_1 = -\frac{1}{m_1} \frac{\partial}{\partial \vec{x}_1} V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|), \quad \ddot{\vec{x}}_2 = \frac{1}{m_2} \frac{\partial}{\partial \vec{x}_1} V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) \quad (2.1)$$

mit einem Potential $V(r)$.

Beispiel. Gravitation $V(r) = -Gm_1m_2/r$. Dann gelten (2.1) auch für ausgedehnte, sphärisch symmetrische Körper (Himmelskörper, in guter Näherung), da ausserhalb eines solchen Körpers die Schwerkraft so ist, als ob sich die gesamte Masse im Mittelpunkt befände (Newtonscher Satz).

Separation der Schwerpunktbewegung

Statt \vec{x}_1, \vec{x}_2 benützen wir die Koordinaten

$$\begin{aligned} \vec{X} &= \frac{1}{M}(m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2), & (M = m_1 + m_2), \\ \vec{x} &= \vec{x}_1 - \vec{x}_2, \end{aligned}$$

in welchen die Bewegungsgleichungen (2.1) lauten

$$\begin{aligned} M\ddot{\vec{X}} &= 0 \\ m\ddot{\vec{x}} &= -\frac{\partial}{\partial \vec{x}} V(|\vec{x}|), & \left(\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right), \end{aligned}$$

d.h. die Schwerpunktbewegung $\vec{X}(t)$ (Trägheitsbahn) und die Relativbewegung $\vec{x}(t)$ sind entkoppelt. Letztere entspricht der Bewegung **eines** Teilchens mit der **reduzierten Masse** m im \mathbb{R}^3 unter dem Einfluss eines äusseren Potentials $V(|\vec{x}|)$. Dieses System besitzt noch zwei Erhaltungsgrössen.

Drehimpuls

$$\vec{L} = m\vec{x} \wedge \dot{\vec{x}} = \text{konstant}.$$

Somit liegt die Bahn $\vec{x}(t)$ in der Ebene $\perp \vec{L}$, der **Bahnebene**. In dieser benützen wir Polarkoordinaten (r, φ) mit zugehörigen Einheitsvektoren $\vec{e}_r = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$, $\vec{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$ in radialer bzw. azimuthaler Richtung. Mit $\dot{\vec{e}}_r = \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$,

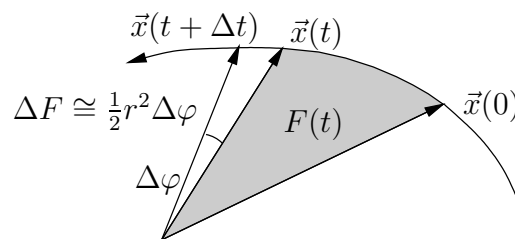
$$\vec{x} = r\vec{e}_r, \quad \dot{\vec{x}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi,$$

gilt

$$l \equiv |\vec{L}| = mr^2\dot{\varphi} = \text{konstant}. \quad (2.2)$$

Dies ist der **Flächensatz (2. Kepler-Gesetz)**: Wenn $F(t)$ die vom Vektor $\vec{x}(t)$ in der Bahnebene überstrichene Fläche bezeichnet, so ist

$$\dot{F}(t) = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = \frac{l}{2m} = \text{konstant} .$$



Energie

$$T + V = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r) = E = \text{konstant} .$$

Einsetzen von $\dot{\varphi}$ aus (2.2) liefert

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U(r) = E , \quad U(r) = \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) :$$

die radiale Bewegung $r(t)$ ist die eines Massenpunktes m auf $0 < r < \infty$ unter dem Einfluss des **effektiven Potentials** $U(r)$. Es folgt

$$t(r) - t(r_0) = \pm \int_{r_0}^r \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}} , \quad (2.3)$$

ferner mit

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}} = \frac{\pm l}{mr^2 \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r))}} ,$$

auch

$$\varphi(r) - \varphi(r_0) = \pm \int_{r_0}^r \frac{l dx}{x^2 \sqrt{2m(E - U(x))}} . \quad (2.4)$$

Dies ist die **Bahnkurve** in der Ebene, d.h. die Bahn $(r(t), \varphi(t))$ unbeachtet ihres zeitlichen Ablaufs. Durch Auflösen von (2.3) findet man $r(t)$ und damit $\varphi(t)$. Durch (2.3, 2.4) ist die Bestimmung der Bahn auf die Berechnung von Integralen reduziert: das Problem ist **integrierbar**.

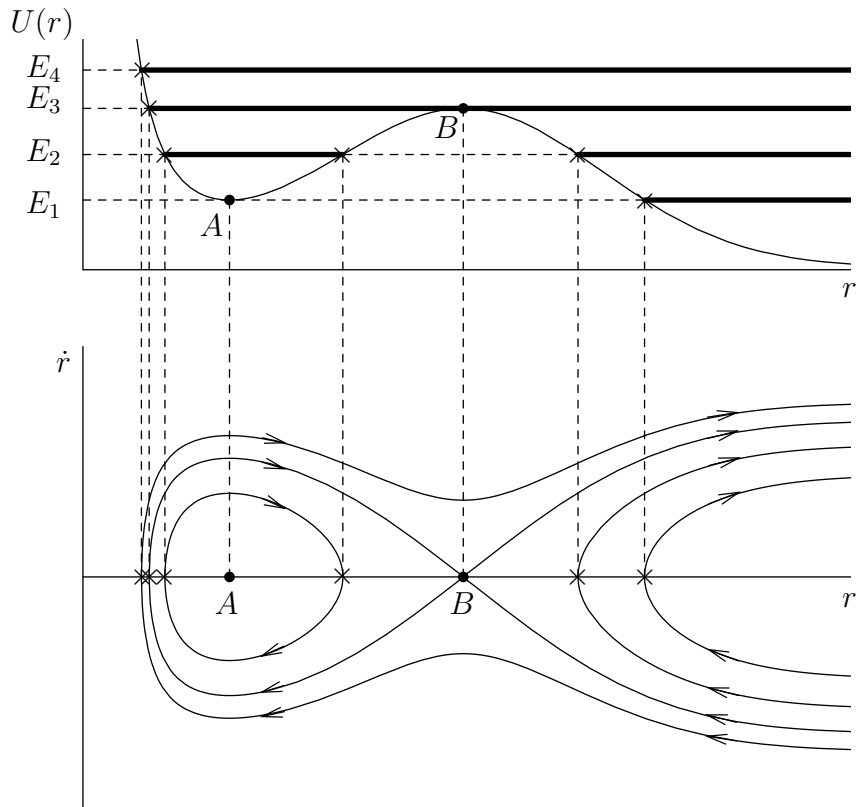
Diskussion der Bahntypen

Anhand eines Beispiels (s. Figur auf der folgenden Seite) illustrieren wir mögliche Bewegungstypen in Dimension 1. Im **Phasenraum** mit den Koordinaten (r, \dot{r}) ist die Bewegung für vier verschiedene Energien dargestellt (Phasenportrait). Sie verlaufen stets im Gebiet

$$E - U(r) = \frac{m}{2}\dot{r}^2 \geq 0 .$$

An den Grenzen dieses Gebiets ist $\dot{r} = 0$, aber in der Regel

$$m\ddot{r} = -\frac{dU}{dr} \neq 0$$



(**Umkehrpunkte** der Bahn, \times in Figur). Nur im Fall $dU/dr = 0$ (A, B in Figur) gibt es die Gleichgewichtslösung $r = \text{konst}$: A ist stabil (d.h. die Bahn zu Anfangsbedingungen (r, \dot{r}) nahe bei A bleibt stets nahe bei A), B ist instabil. Allgemein unterscheiden wir **gebundene Bahnen**, die ganz im Endlichen verlaufen, und **Streubahnen** mit $r(t) \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \pm\infty$.

Gebundene Bahnen

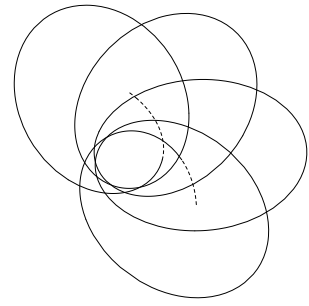
Hier ist $r(t)$ periodisch mit der Periode

$$T(E) = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}},$$

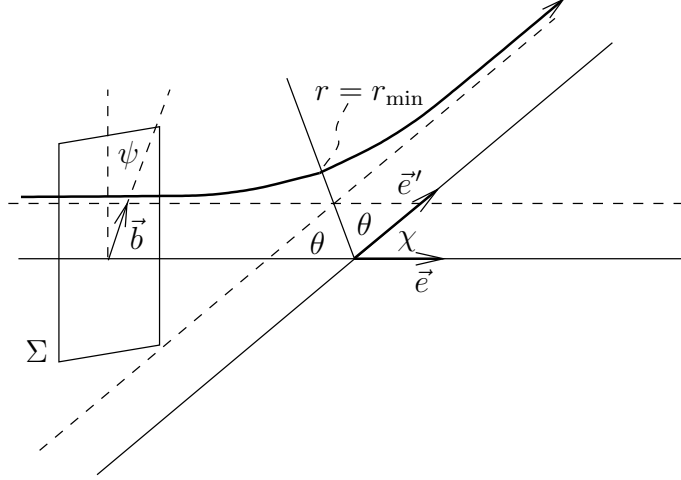
wobei r_{\min}, r_{\max} die Nullstellen von $E - U(r)$ sind, die das erlaubte r -Intervall begrenzen. Falls dies Umkehrpunkte sind, so ist $T < \infty$. Für $E = E_3$ gibt es aber eine gebundene Bahn, die durch die instabile Gleichgewichtslage B begrenzt ist, womit $T(E_3) = \infty$. Für eine periodische Bahn nimmt das Azimut φ während einer Periode T zu um den Winkel

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{l dx}{x^2 \sqrt{2m(E - U(x))}}.$$

So ergibt sich im Allgemeinen eine ‘Rosettenbahn’, im Ring $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$, die sich nur dann schliesst, wenn $\Delta\varphi/2\pi$ rational ist.



Streubahnen



Sei $V(r) \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$. Streubahnen ($r(t) \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \pm\infty$) gibt es dann nur für $E \geq 0$. Falls $E > 0$ haben sie gerade Asymptoten für $t \rightarrow \pm\infty$. Die Streubahn ist bestimmt durch die Energie $E > 0$, die Richtung \vec{e} , $|\vec{e}| = 1$, der einlaufenden Asymptote, und den Zielfehler $\vec{b} \perp \vec{e}$. Für $t \rightarrow -\infty$ gilt

$$m|\dot{\vec{x}}| \rightarrow \sqrt{2mE}, \quad \text{also} \quad l = b\sqrt{2mE}. \quad (2.5)$$

Somit bestimmen $b = |\vec{b}|$ und E den **Streuwinkel**

$$\chi = \pi - 2\theta, \quad \theta = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{ldx}{x^2\sqrt{2m(E-U(x))}} = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{bdx}{x^2\sqrt{1-V(x)E^{-1}-b^2x^{-2}}}. \quad (2.6)$$

Bei festen E , \vec{e} bestimmt \vec{b} den Richtungsvektor \vec{e}' , $|\vec{e}'| = 1$, der auslaufenden Asymptote: Dies definiert eine Abbildung $\Sigma \ni \vec{b} \mapsto \vec{e}' \in S^2$. Da \vec{e}' Polarwinkel (χ, ψ) bzgl. \vec{e} hat, geht dabei das Flächenelement $d\sigma = b db d\psi$ von Σ über in das Raumwinkelelement $d\Omega = \sin \chi \cdot d\chi d\psi$. Der **differentielle Streuquerschnitt** (mit Dimension einer Fläche) ist definiert als

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\chi) = \left| \frac{b}{\sin \chi} \frac{db}{d\chi} \right| = \frac{b}{\sin \chi} \left| \left(\frac{d\chi}{db} \right)^{-1} \right|, \quad (2.7)$$

wobei $\chi = \chi(b)$ durch (2.5, 2.6) gegeben ist. Es kann vorkommen, dass verschiedene b_k zum gleichen Streuwinkel χ führen; dann ist (2.7) korrekt zu schreiben als

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\chi) = \sum_k \frac{b_k}{\sin \chi} \left| \left(\frac{d\chi}{db_k} \right)^{-1} \right|.$$

Dieser Fall tritt z.B. auf, falls $-\infty < V(0) \leq 0$. Dann ist nämlich $\chi(0) = 0$, denn für $b = 0$ verläuft die Bahnkurve gerade durch den Ursprung hindurch. Da auch $\lim_{b \rightarrow \infty} \chi(b) = 0$ gilt, folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass jeder (nicht extreme) Wert $\chi(b_k)$ an mindestens zwei Stellen b_k angenommen wird.

In Streuexperimenten liegt eine homogene Stromdichte j (Teilchenzahl pro Flächen- und Zeiteinheit) einfallender Teilchen mit festen E , \vec{e} vor. Dann ist $j \cdot (d\sigma/d\Omega) d\Omega$ die Zahl der Stöße pro Zeiteinheit mit auslaufender Asymptotenrichtung $\vec{e}' \equiv (\chi, \psi)$ im Raumwinkel-element $d\Omega$. Der **totale Streuquerschnitt**

$$\sigma_{\text{tot}} = \int_{S^2} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

ist gleich der Fläche der Zielfehler $\vec{b} \in \Sigma$, die zu einer Streuung führen, $\chi(b) \neq 0$, also

$$\sigma_{\text{tot}} = \pi a^2,$$

wobei $a = \sup\{r \mid V(r) \neq 0\} (\leq \infty)$ die Reichweite des Potentials ist.

2. Das Kepler-Problem

Das Gravitationspotential ist

$$V(r) = -\frac{1}{r} Gm_1 m_2 = -\frac{1}{r} GMm.$$

Statt $r =: 1/s$ benützen wir die Variable s . Dann lautet (2.4)

$$\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{1}{s^2} \frac{d\varphi}{dr} = (\alpha + 2\beta s - s^2)^{-1/2}$$

mit $\alpha = 2mEl^{-2}$, $\beta = GMm^2l^{-2}$. Dies integriert sich zu

$$\varphi(s) = \arccos\left(\frac{s - \beta}{\sqrt{\alpha + \beta^2}}\right)$$

plus eine freie Konstante, die wir gleich Null setzen. Durch Auflösung nach r ergibt sich die Bahnkurve in Polarkoordinaten:

$$r = \frac{d}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \tag{2.8}$$

mit

$$d = \frac{1}{\beta} = \frac{l^2}{GMm^2}, \tag{2.9}$$

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\alpha + \beta^2}}{\beta}, \quad \text{d.h.} \quad 1 - \varepsilon^2 = -\frac{\alpha}{\beta^2} = \frac{-2El^2}{G^2 M^2 m^3}. \tag{2.10}$$

Gl. (2.8) definiert einen Kegelschnitt mit einem Brennpunkt bei $r = 0$, und zwar je nach dem Wert der **Exzentrizität** ε eine

Ellipse	:	$\varepsilon < 1$,	d.h.	$E < 0$
Parabel	:	$\varepsilon = 1$,	d.h.	$E = 0$
Hyperbel	:	$\varepsilon > 1$,	d.h.	$E > 0$.

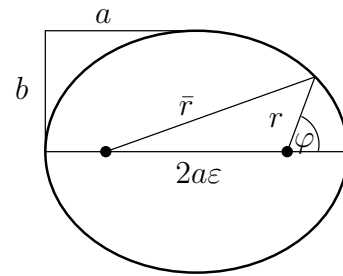
Der Winkel $\varphi = 0$ entspricht dem Perihel (r minimal).

Ellipsenbahnen

Aus der Figur und der Ellipsengleichung $r + \bar{r} = 2a$ ergibt sich

$$\bar{r}^2 = (r \cos \varphi + 2a\varepsilon)^2 + r^2 \sin^2 \varphi = (2a - r)^2$$

und damit (2.8) mit $d = a(1 - \varepsilon^2)$.



Johannes Kepler hat aus den Beobachtungen des Tycho Brahe abgeleitet, dass die Bahn des Mars eine Ellipse mit Brennpunkt in der Sonne (genauer: im Schwerpunkt) ist, und dies auf die anderen Planeten erweitert (**1. Kepler-Gesetz**).

Weitere Merkmale der Ellipse sind die kleine Halbachse $b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$ und die Ellipsenfläche $F = \pi ab = \pi d^{1/2} a^{3/2}$, die nach dem Flächensatz auch

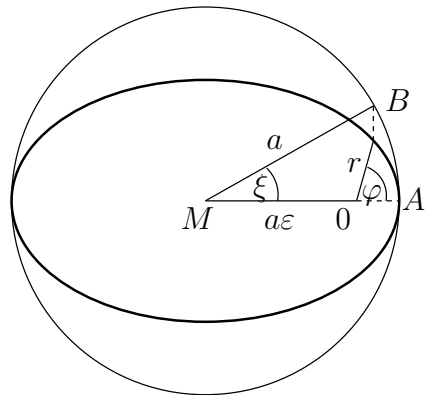
$$F = T\dot{F} = \frac{Tl}{2m}$$

beträgt. Zusammen mit (2.9) findet man

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} a^{3/2} . \quad (2.11)$$

Das Verhältnis $T^2 : a^3$ ist also gleich für alle Planeten (**3. Kepler-Gesetz**), insofern man die Planetenmasse gegen die Sonnenmasse vernachlässigen kann.

Zur Beschreibung des zeitlichen Verlaufs der Bahn parametrisieren wir sie durch die **exzentrische Anomalie** ξ (s. Figur) statt dem Azimut φ :



$$r = a(1 - \varepsilon \cos \xi) , \quad (2.12)$$

$$t = \sqrt{\frac{a^3}{GM}} (\xi - \varepsilon \sin \xi) , \quad (2.13)$$

(Keplersche Gleichung), wobei $t = 0$ einem Periheldurchgang entspricht. Die erste Gleichung folgt durch Betrachtung der Projektion von MB auf MA :

$$\begin{aligned} \varepsilon \cdot a \cos \xi &= \varepsilon(a\varepsilon + r \cos \varphi) \\ &= a - a(1 - \varepsilon^2) + \varepsilon r \cos \varphi \\ &= a - r(1 + \varepsilon \cos \varphi) + \varepsilon r \cos \varphi \\ &= a - r . \end{aligned}$$

Zum Beweis der Zeitgleichung: Der Kreis entsteht aus der Ellipse durch Streckung um a/b in Richtung der kleinen Halbachse. Die vom Radiusvektor überstrichene Fläche geht dabei über in AOB . Letztere beträgt nach dem Flächensatz

$$\tilde{F} = \frac{a}{b} \cdot \frac{l}{2m} \cdot t = \frac{1}{2} \sqrt{GM} a t ,$$

unter Benützung von (2.9). Andererseits ist AOB die Differenz des Sektors AMB (Fläche $a^2\xi/2$) und des Dreiecks OMB (Fläche $(1/2) \cdot a\varepsilon \cdot a \sin \xi$).

Hyperbelbahnen

Nach (2.8) ist $r \rightarrow \infty$ für $\cos \varphi \rightarrow -1/\varepsilon$, also $\cos \theta = 1/\varepsilon$ und $\tan^2 \theta = \varepsilon^2 - 1$; andererseits ist nach (2.10, 2.5) aber auch

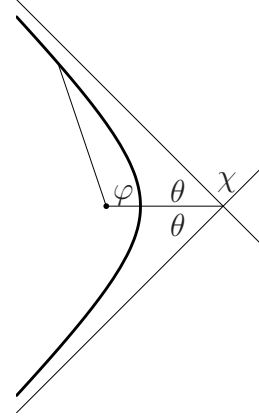
$$\varepsilon^2 - 1 = \frac{2E}{G^2 M^2 m^3} \cdot b^2 \cdot 2mE,$$

also

$$\tan \theta = \frac{2E}{GMm} b.$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d\chi}{db} &= -2 \frac{d\theta}{db} = \frac{-4E}{GMm} \cos^2 \theta, \\ \frac{b}{\sin \chi} &= \frac{b}{2 \sin \theta \cos \theta} = \frac{GMm}{4E} \frac{1}{\cos^2 \theta}. \end{aligned}$$



Für den differentiellen Streuquerschnitt erhält man

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{b}{\sin \chi} \left(\frac{d\chi}{db} \right)^{-1} \right| = \left(\frac{GMm}{4E \sin^2 \frac{\chi}{2}} \right)^2.$$

Für geladene Teilchen erscheint das Produkt der Ladungen $e_1 e_2$ anstelle von GMm (**Streuformel von Rutherford**). Überraschenderweise gilt das selbe Resultat auch in der Quantenmechanik.

Algebraische Bestimmung der Bahn

Das Kepler-Problem weist gegenüber dem allgemeinen Zweikörper-Problem ein zusätzliches Bewegungsintegral auf, nämlich den **Lenz-(Laplace-)Vektor**

$$\vec{A} = \vec{p} \wedge \vec{L} - GMm^2 \frac{\vec{x}}{r}.$$

In der Tat ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m \frac{\vec{x}}{r} &= m \left(\frac{\dot{\vec{x}}}{r} - \frac{\vec{x}}{r^2} \underbrace{\dot{r}}_{\vec{x} \cdot \dot{\vec{x}}/r} \right) = r^{-3} (\vec{p}r^2 - \vec{x}(\vec{x} \cdot \vec{p})) \\ &= -r^{-3} \vec{x} \wedge (\vec{x} \wedge \vec{p}) = -r^{-3} \vec{x} \wedge \vec{L} \end{aligned}$$

(eine vektorielle Form des Flächensatzes) und somit

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = -\frac{GMm}{r^3} (\vec{x} \wedge \vec{L} - \vec{x} \wedge \vec{L}) = 0.$$

Es bestehen Relationen zu \vec{L}, E :

$$\vec{A}^2 = (GMm^2)^2 + \vec{p}^2 l^2 - \frac{2GMm^2}{r} \underbrace{\vec{x} \cdot (\vec{p} \wedge \vec{L})}_{l^2} = (GMm^2)^2 + 2mEl^2,$$

$$\vec{A} \cdot \vec{L} = 0.$$

Insbesondere liegt \vec{A} in der Bahnebene, und wir wählen φ ausgehend von der Richtung von \vec{A} (bzw. beliebig falls $\vec{A} = 0$). Dann ist $\vec{x} \cdot \vec{A} = rA \cos \varphi$, andererseits aber auch

$$\vec{x} \cdot \vec{A} = (\vec{x} \wedge \vec{p}) \cdot \vec{L} - GMm^2 r = l^2 - GMm^2 r ,$$

d.h.

$$r = \frac{l^2}{GMm^2 + A \cos \varphi} = \frac{d}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

mit

$$d = \frac{l^2}{GMm^2} , \quad 1 - \varepsilon^2 = 1 - \left(\frac{A}{GMm^2} \right)^2 = \frac{-2El^2}{G^2 M^2 m^3} ,$$

in Übereinstimmung mit (2.8). Insbesondere ist die Richtung von \vec{A} die vom Ursprung zum Perihel. Aus der Erhaltung von \vec{A} folgt schliesslich die Bahnkurve von $\vec{p}(t)$: wegen

$$\vec{L} \wedge \vec{A} = l^2 \vec{p} - GMm^2 \vec{L} \wedge \frac{\vec{x}}{r}$$

ist

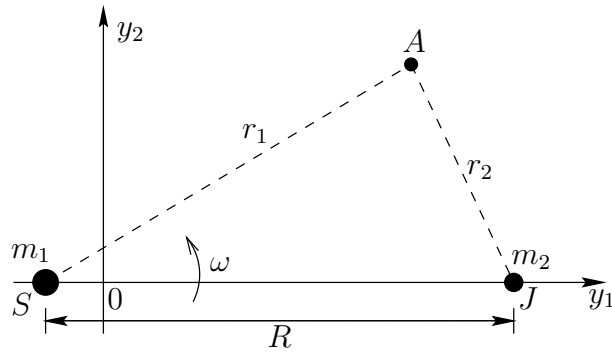
$$\vec{p} = l^{-2} \vec{L} \wedge \vec{A} + GMm^2 l^{-2} \vec{L} \wedge \frac{\vec{x}}{r} ,$$

d.h. $\vec{p}(t)$ beschreibt einen Kreis um $l^{-2} \vec{L} \wedge \vec{A}$ vom Radius $GMm^2 l^{-1}$.

3 Das restringierte Dreikörperproblem

Das hier behandelte Problem ist nicht mehr integrierbar. Wir werden spezielle Lösungen, z.T. näherungsweise, diskutieren.

1. Gleichgewichtslagen und ihre Stabilität



Sonne S und Jupiter J bewegen sich auf Kreisbahnen mit Winkelgeschwindigkeit ω um den Schwerpunkt 0. In ihrem Gravitationsfeld bewegt sich ein Asteroid A, der keinen Einfluss (deshalb: restringiertes Problem) auf S und J haben soll. Als Einheiten wählen wir

$$\omega = 1, \quad R = 1, \quad G = 1. \quad (3.1)$$

Da das in der Figur definierte y -System rotiert, sind die Bewegungsgleichungen (1.25) zu verwenden. Gravitation und Zentrifugalkraft auf S und J müssen sich aufheben:

$$\frac{G}{R^2} m_1 m_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} R \omega^2,$$

d.h. in unseren Einheiten ist auch

$$m_1 + m_2 = 1, \quad (3.2)$$

und S, J haben die Koordinaten $(-m_2, 0, 0)$, $(m_1, 0, 0)$. Da alle Kräfte auf A proportional zu seiner Masse sind, fällt diese aus den Bewegungsgleichungen für A heraus: Formal ist $m = 1$. Dann lauten die Kräfte:

Gravitationskraft:

$$\vec{G} = -\frac{m_1}{r_1^3} (y_1 + m_2, y_2, y_3) - \frac{m_2}{r_2^3} (y_1 - m_1, y_2, y_3);$$

Zentrifugalkraft:

$$\vec{Z} = (y_1, y_2, 0);$$

Corioliskraft:

$$\vec{C} = 2(\dot{y}_2, -\dot{y}_1, 0). \quad (3.3)$$

Wir suchen **Gleichgewichtslösungen** $\vec{y} = \text{konstant}$, d.h. Lösungen \vec{y} von $\vec{G} + \vec{Z} = 0$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3} - 1 \right) y_1 + m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right) &= 0, \\ \left(\frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3} - 1 \right) y_2 &= 0, \quad y_3 = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Es gibt dafür 2 Möglichkeiten: Entweder ist $y_2 = 0$ (Eulerscher Spezialfall) oder

$$\frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3} = 1 \quad (3.5)$$

(Lagrangescher Spezialfall). Im ersten Fall liegt A auf der y_1 -Achse, wo $\vec{G} + \vec{Z}$ etwa so gerichtet ist



Somit gibt es dort 3 Gleichgewichtslagen (× in Figur), die wir nicht weiter verfolgen. Im zweiten Fall folgt aus (3.4, 3.5)

$$r_1 = r_2 = 1 ,$$

d.h. SJA ist ein gleichseitiges Dreieck in der 12-Ebene. Es gibt also zwei Lagrangesche Gleichgewichtslagen, deren Stabilität wir untersuchen: Dazu betrachten wir kleine Auslenkungen \vec{x} aus der Ruhelage $\vec{x} = 0$, d.h. $\vec{y} = (\frac{1}{2} - m_2, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0) + \vec{x}$, in denen wir \vec{G} (die einzige nicht-lineare Kraft) linearisieren. Wegen $\frac{\partial}{\partial y_i} r_i^{-3} \Big|_A = -3\vec{e}_i$ ist in linearer Näherung

$$r_i^{-3} = 1 - 3\vec{e}_i \cdot \vec{x}$$

und damit

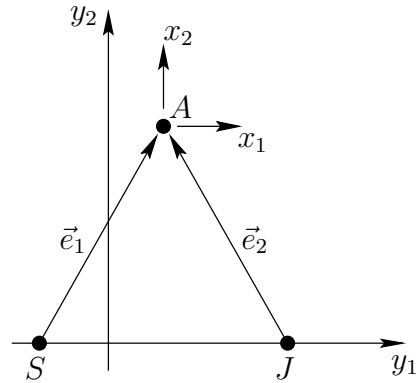
$$\begin{aligned} \vec{G} &= -m_1(1 - 3\vec{e}_1 \cdot \vec{x}) \left(\frac{1}{2} + x_1, \frac{\sqrt{3}}{2} + x_2, x_3 \right) - m_2(1 - 3\vec{e}_2 \cdot \vec{x}) \left(-\frac{1}{2} + x_1, \frac{\sqrt{3}}{2} + x_2, x_3 \right) \\ &= \vec{G}^0 + \frac{3}{2}m_1\vec{e}_1 \cdot \vec{x}(1, \sqrt{3}, 0) + \frac{3}{2}m_2\vec{e}_2 \cdot \vec{x}(-1, \sqrt{3}, 0) - (m_1 + m_2)(x_1, x_2, x_3) \\ &\equiv \vec{G}^0 + (G_1, G_2, G_3) , \end{aligned}$$

wobei \vec{G}^0 die Glieder nullter Ordnung darstellt, und

$$\begin{aligned} G_1 &= \left(\frac{3}{4} - 1 \right) \underbrace{(m_1 + m_2)}_{=1} x_1 + \frac{3\sqrt{3}}{4} (m_1 - m_2) x_2 , \\ G_2 &= \frac{3}{4} \sqrt{3} (m_1 - m_2) x_1 + \left(\frac{9}{4} - 1 \right) \underbrace{(m_1 + m_2)}_{=1} x_2 , \\ G_3 &= -x_3 . \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\vec{Z} = \vec{Z}^0 + (x_1, x_2, 0) , \quad \vec{C} = 2(\dot{x}_2, -\dot{x}_1, 0) .$$



$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \frac{1}{2}(1, \sqrt{3}, 0) , \\ \vec{e}_2 &= \frac{1}{2}(-1, \sqrt{3}, 0) . \end{aligned}$$

Da $\vec{G}^0 + \vec{Z}^0 = 0$ (Gleichgewichtslage!), ergeben sich die Bewegungsgleichungen in linearer Näherung

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= \frac{3}{4}x_1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}(m_1 - m_2)x_2 + 2\dot{x}_2, \\ \ddot{x}_2 &= \frac{3\sqrt{3}}{4}(m_1 - m_2)x_1 + \frac{9}{4}x_2 - 2\dot{x}_1, \\ \ddot{x}_3 &= -x_3.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Die x_3 -Bewegung ist entkoppelt (harmonische Schwingung der Frequenz $\omega = 1$, synchron mit der Kreisbewegung von S und J). Zur Lösung der beiden anderen Gleichungen machen wir den Exponentialansatz

$$x_k(t) = a_k e^{i\lambda t}, \quad (k = 1, 2), \tag{3.7}$$

denn Real- und Imaginärteile einer komplexen Lösung von (3.6) sind wieder Lösungen. Einsetzen liefert das homogene Gleichungssystem

$$\begin{aligned}a_1\left(\lambda^2 + \frac{3}{4}\right) + a_2\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}(m_1 - m_2) + 2i\lambda\right) &= 0, \\ a_1\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}(m_1 - m_2) - 2i\lambda\right) + a_2\left(\lambda^2 + \frac{9}{4}\right) &= 0,\end{aligned}$$

dessen Determinante verschwinden soll:

$$\left(\lambda^2 + \frac{3}{4}\right)\left(\lambda^2 + \frac{9}{4}\right) = \frac{27}{16}(m_1 - m_2)^2 + 4\lambda^2.$$

Wegen $(m_1 - m_2)^2 = (m_1 + m_2)^2 - 4m_1m_2$ und (3.2) lautet diese Gleichung für λ

$$\left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1 - 27m_1m_2). \tag{3.8}$$

Für $27m_1m_2 < 1$, also in beliebigen Masseneinheiten für

$$\frac{m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2} < \frac{1}{27} \tag{3.9}$$

d.h. für

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad \text{oder} \quad \frac{m_2}{m_1 + m_2} < \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18} = 0,0385, \tag{3.10}$$

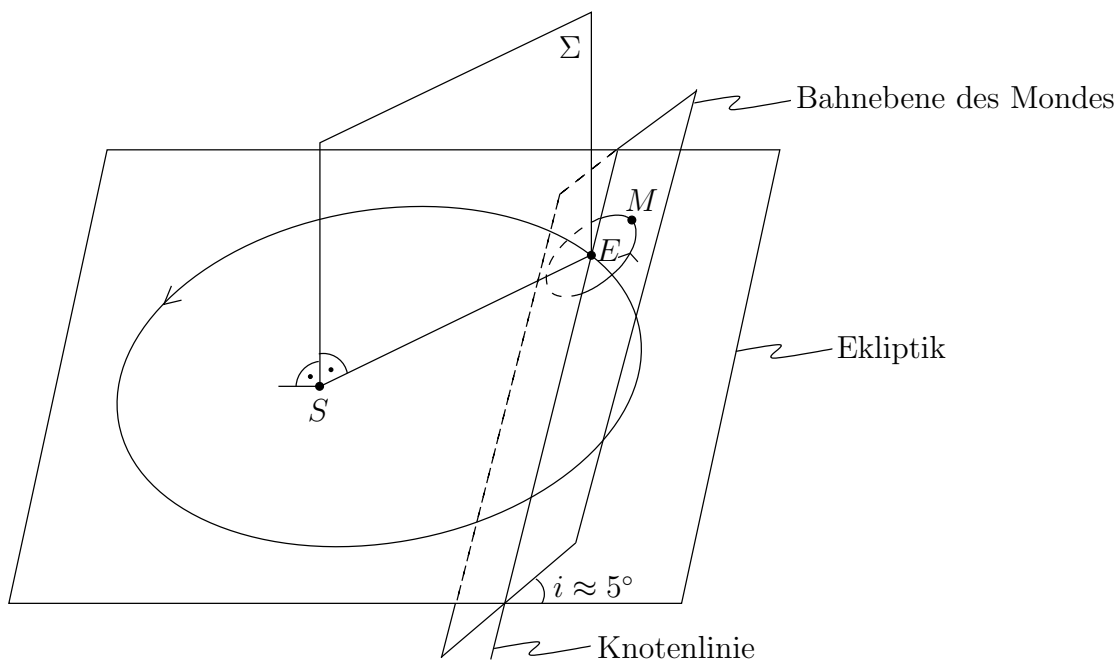
gibt es 4 verschiedene reelle Lösungen $\pm\lambda_1, \pm\lambda_2$ zu (3.8) und die allgemeine Lösung von (3.6) ist eine beliebige Superposition der 4 Eigenschwingungen (3.7). Da die λ_i reell sind, verhalten sich alle diese Lösungen oszillatorisch und beschränkt: Zumindest in linearer Näherung ist die Gleichgewichtslage stabil, falls (3.9) erfüllt ist. Gilt die entgegengesetzte Ungleichung, so treten komplexe Eigenfrequenzen auf (darunter solche mit $\text{Im } \lambda < 0$), d.h. exponentiell wachsende Lösungen: Die Gleichgewichtslage $\vec{x} = 0$ ist instabil.

Im Fall von Sonne und Jupiter ist (3.10) erfüllt: $m_2 \approx m_1 \cdot 10^{-3}$. Tatsächlich gibt es in der Gegend der Lagrangeschen Gleichgewichtslagen zahlreiche Asteroide.

Ohne Beweis: Für genügend kleine Werte des Verhältnisses (3.9) gilt die Stabilität auch ausserhalb der linearen Approximation. Die Eulerschen Gleichgewichtslagen sind hingegen offensichtlich instabil.

2. Die Bewegung des Mondes

Der Mond M kreist um die Erde E in einer Bahnebene die leicht schief zur Ekliptik



(Bahnebene der Erde um die Sonne S) steht. Es lassen sich deshalb (mindestens) zwei Perioden unterscheiden:

- $2\pi\mu$ = **synodischer Monat**
- = Periode zwischen aufeinander folgenden, gleich gerichteten Durchgängen durch Σ (von Neumond zu Neumond)
- = 29,53059 Tage;
- $2\pi\tilde{\mu}$ = **drakonitischer Monat**
- = Periode zwischen aufeinander folgenden, gleich gerichteten Durchgängen durch die Ekliptik (von aufsteigendem Knoten zu aufsteigendem Knoten)
- = 27,21222 Tage.

Sie stehen im Verhältnis

$$r = \frac{\mu}{\tilde{\mu}} = 1,08520 . \quad (3.11)$$

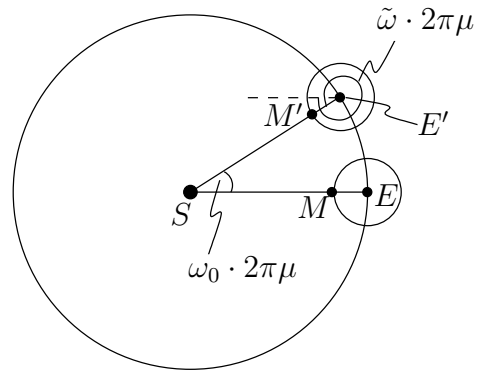
Die Diskrepanz wird zum grössten Teil rein kinematisch wie folgt erklärt: Wäre die Bahnebene des Mondes raumfest orientiert, so wäre (bei Kreisbahnen mit kleiner Neigung i)

$$\tilde{\omega} \cdot 2\pi\mu = 2\pi + \omega_0 \cdot 2\pi\mu ,$$

wobei $\tilde{\omega} = \tilde{\mu}^{-1}$, $\omega_0 = J^{-1}$, $2\pi J = 1$ Jahr.
Damit wäre

$$\frac{\mu}{\tilde{\mu}} = 1 + \frac{\mu}{J} = 1,08085 \cong 1 + \frac{1}{12,3} . \quad (3.12)$$

Die Abweichung vom beobachteten Wert (3.11) lässt auf eine langsame Drehung der Bahnebene des Mondes schliessen.



Das Verhältnis (3.11) bestimmt die Kadenz der **Sonnenfinsternisse** (Mondfinsternisse analog): Ausgehend von einer exakten Konjunktion SME tritt eine weitere Finsternis immer dann auf, wenn

$$p\mu = q\tilde{\mu} , \quad (p, q \text{ ganz})$$

(im selben Knoten) oder

$$p\mu = \left(q + \frac{1}{2}\right)\tilde{\mu}$$

(im entgegengesetzten Knoten). Wegen der endlichen Ausdehnung von E und M müssen diese Bedingungen nur innerhalb einer "Toleranz" Δ erfüllt sein:

$$\text{dist}\left(p \cdot r, \left\{ \mathbb{Z} + \frac{1}{2} \right\}\right) < \Delta/2 ; \quad \Delta \cong 0,087 .$$

Wegen $r \cong 1 + 1/12$ tritt nach 12 synodischen Monaten erneut eine Finsternis im gleichen Knoten auf:

$$12r = 13,0224 .$$

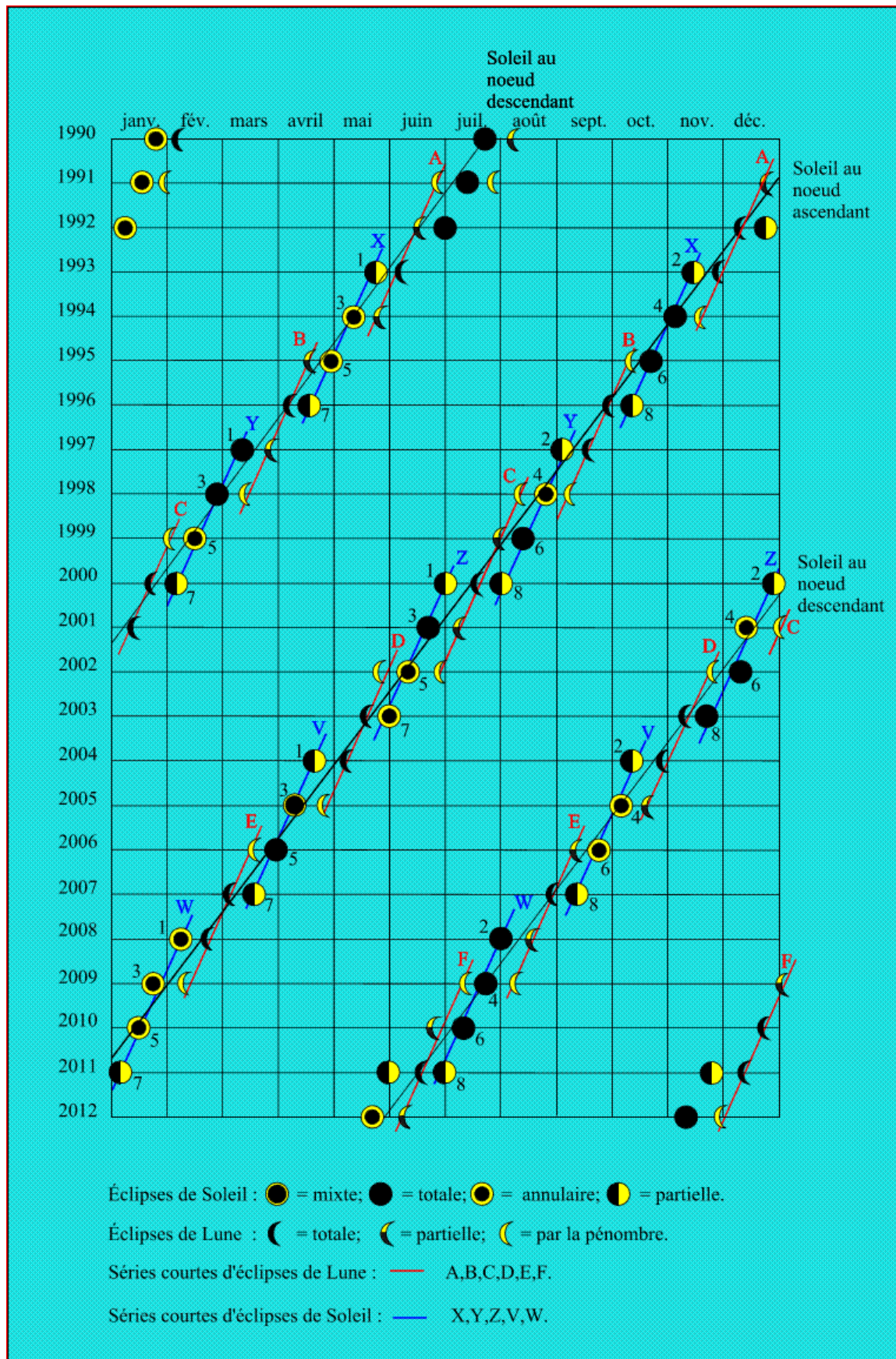
Diese Periodizität ist aber nicht exakt: Bereits nach

$$\frac{\Delta}{12r - 13} \cong 3,88$$

Zyklen, bzw. dem ganzen Teil davon, ist die Toleranz erschöpft und die Periodizität bricht ab. Weitaus genauer ist die Periodizität

$$\begin{aligned} 223r &= 241,999 \cong 242 , \\ 223 \cdot 2\pi\mu &\equiv 1 \text{ Saros} \cong 18 \text{ Jahre} + 11 \text{ Tage} + 8 \text{ Stunden} , \end{aligned}$$

die schon den Chaldäern bekannt war. Sie dauert etwa 1200 Jahre an, bis sie abbricht.



Wir wollen nun das wichtige Verhältnis (3.11) möglichst genau theoretisch als Funktion von μ/J bestimmen. Dazu behandeln wir das System S, E, M (mit Massen $M \gg m \gg m'$) als restringiertes Dreikörperproblem. Die Erde beschreibt eine Kreisbahn (Radius R) um die Sonne, bzw. umgekehrt in einem rotierenden Bezugssystem mit Ursprung in E. Einheiten:

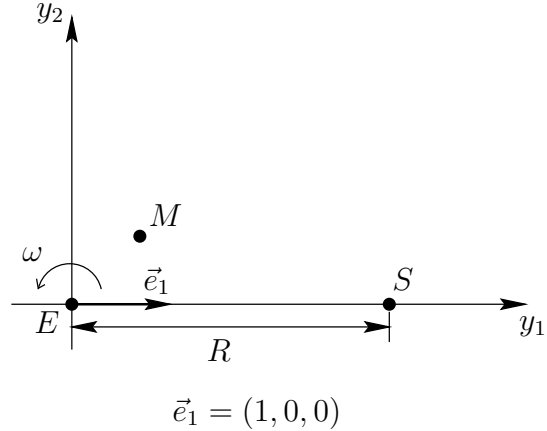
$$\omega = J = 1, \quad m = 1, \quad G = 1,$$

also

$$\mu = 0,08085. \quad (3.13)$$

Dann folgt aus

$$G \frac{mM}{R^2} = \frac{mM}{M+m} R \omega^2 \cong m R \omega^2,$$



dass

$$M = R^3$$

in unseren Einheiten. Auf den Mond wirken folgende Kräfte (nach Division durch m'): die **Gravitationskräfte**

$$\begin{aligned} \vec{G}_E &= \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{y}|} = -\frac{1}{|\vec{y}|^3} \vec{y}, \\ \vec{G}_S &= M \vec{\nabla} \frac{1}{|R\vec{e}_1 - \vec{y}|} \\ &= M \left(\frac{\vec{e}_1}{R^2} + \frac{3(\vec{e}_1 \cdot \vec{y})\vec{e}_1 - \vec{y}}{R^3} + O(y^2) \right) \\ &= R\vec{e}_1 + 3y_1\vec{e}_1 - \vec{y} + \dots; \end{aligned} \quad (3.14)$$

die Linearisierung in \vec{y} ist angebracht, da längs der Mondbahn $|\vec{y}|/R \cong 1/390$. Der erste Term kompensiert natürlich die **Führungsbeschleunigung** (s. (1.25))

$$-\vec{a} = -\omega^2 R \vec{e}_1,$$

ebenso kompensiert die **Zentrifugalbeschleunigung**

$$\vec{Z} = (y_1, y_2, 0)$$

die 1,2-Komponenten von $-\vec{y}$ in (3.14). Schliesslich ist die **Coriolisbeschleunigung**

$$\vec{C} = 2(\dot{y}_2, -\dot{y}_1, 0).$$

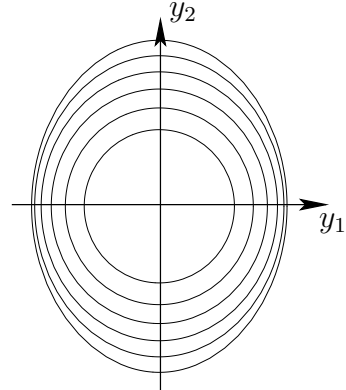
Also lauten die Bewegungsgleichungen des Mondes mit $r = |\vec{y}|$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 - 2\dot{y}_2 &= \left(3 - \frac{1}{r^3}\right) y_1, \\ \ddot{y}_2 + 2\dot{y}_1 &= -\frac{1}{r^3} y_2, \\ \ddot{y}_3 &= -\left(\frac{1}{r^3} + 1\right) y_3. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Da die Neigung der Mondbahn gegenüber der Ekliptik klein ist ($i \cong 5^\circ$) bestimmen wir nach Hill (1878) zunächst periodische Bahnen in der 12-Ebene und dann, als deren Störung, die eigentliche Mondbahn.

Periodische Bahnen

Sei $y_3 \equiv 0$. Wir konstruieren eine 1-parametrische Schar periodischer Bahnen zu (3.15), die um $\vec{y} = 0$ im Gegen-
 uhrzeigersinn kreisen, und zwar genau eine Bahn (bis auf
 Verschiebung der Zeit) durch jeden Punkt der (y_1, y_2) -Ebene
 in der Nähe von $\vec{y} = 0$. Zunächst ist aus (3.15) ersichtlich,
 dass mit jeder Lösung $(y_1(t), y_2(t))$ auch $(y_1(-t), -y_2(-t))$
 und $(-y_1(-t), y_2(-t))$ Lösungen sind. Sie entstehen durch
 Zeitumkehr und Spiegelung an der 1- bzw. 2-Achse. Für
 einen Anfangspunkt $(y_1(0) > 0, y_2(0) = 0)$ auf der 1-
 Achse kann man eine vertikale Anfangsgeschwindigkeit
 $(\dot{y}_1(0) = 0, \dot{y}_2(0) > 0)$ so wählen (und wir werden dies z.T.
 verifizieren), dass die Bahn die 2-Achse horizontal schneidet: $y_1(\pi\mu/2) = 0, \dot{y}_2(\pi\mu/2) = 0$.
 Aus den erwähnten Symmetrien und der Eindeutigkeit der Lösung zu gegebenen Anfangs-
 bedingungen folgt



$$\begin{aligned} y_1(t) &= y_1(-t), & y_2(t) &= -y_2(-t), \\ y_1(\pi\mu/2 + t) &= -y_1(\pi\mu/2 - t), & y_2(\pi\mu/2 + t) &= y_2(\pi\mu/2 - t). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Insbesondere ist die Bahn periodisch, $\vec{y}(t+2\pi\mu) = \vec{y}(t)$, und oval: spiegelsymmetrisch bzgl.
 der 1- und 2-Achsen. Als Scharparameter wählen wir die Umlaufszeit $2\pi\mu$ (synodischer
 Monat) und wählen dann die Zeiteinheit neu:

$$\tau = t/\mu$$

(neu: synodischer Monat = 2π). Dann lautet (3.15) mit $' = d/d\tau$

$$\begin{aligned} y_1'' - 2\mu y_2' &= -\frac{\mu^2}{r^3} y_1 + \underline{\underline{3\mu^2 y_1}}, \\ y_2'' + 2\mu y_1' &= -\frac{\mu^2}{r^3} y_2, \\ y_3'' &= -\mu^2 \left(\frac{1}{r^3} + 1 \right) y_3. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Ohne den unterstrichenen Term (Gezeitenkräfte), den wir als Störung betrachten, lauten
 die ersten beiden Gleichungen

$$(y_1 + iy_2)'' + 2i\mu(y_1 + iy_2)' = -\frac{\mu^2}{r^3}(y_1 + iy_2)$$

und die gesuchte (nun 2π -) periodische Lösung ist eine Kreisbahn

$$y_1(\tau) + iy_2(\tau) = r_0 e^{i\tau}, \quad y_3(\tau) = 0 \quad (3.18)$$

mit $r_0 = \mu^{2/3}(1 + 2\mu)^{-1/3}$. Nachträglich ist die Störung, in (3.18) ausgewertet, um μ^2 kleiner als der führende Term: Er kann durch Störungsrechnung berücksichtigt werden. Statt \vec{y} führen wir noch neue Koordinaten $(z, \zeta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ ein durch

$$\begin{aligned} y_1 + iy_2 &= \mu^{2/3}(1 + 2\mu)^{-1/3} e^{i\tau} z, \\ y_3 &= \mu^{2/3}(1 + 2\mu)^{-1/3} \zeta. \end{aligned}$$

(“Variation der Konstanten”). Sie sind der Näherungslösung (3.18) angepasst ($z(\tau) = 1, \zeta(\tau) = 0$) und entsprechen einem Bezugssystem, das zusätzlich mit einer Umdrehung pro Monat um die y_3 -Achse dreht. Gl. (3.17) lautet neu

$$z'' + 2i(1 + \mu)z' = (1 + 2\mu) \left(1 - \frac{1}{\rho^3}\right) z + \underline{\underline{\frac{3}{2}\mu^2 (z + e^{-2i\tau}\bar{z})}}, \quad (3.19)$$

$$\zeta'' = -\left(\frac{1 + 2\mu}{\rho^3} + \mu^2\right)\zeta, \quad (3.20)$$

($\rho^2 = |z|^2 + \zeta^2$). Natürlich ist ohne den Störterm die Näherungslösung ($z(\tau) = 1, \zeta(\tau) = 0$) immer noch gültig. Die gesuchte 2π -periodische Lösung setzen wir als Potenzreihe in μ an:

$$z(\tau) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \mu^k z_k(\tau) \equiv 1 + \tilde{z}(\tau) \quad (3.21)$$

mit

$$\begin{aligned} \overline{z_k(\tau)} &= z_k(-\tau), \\ \overline{z_k\left(\frac{\pi}{2} + \tau\right)} &= z_k\left(\frac{\pi}{2} - \tau\right). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Begründung: Der Störterm ist $O(\mu^2)$, also beginnt die Entwicklung (3.21) mit $k = 2$; (3.22) folgt aus (3.16).

Berechnung von $z_2(\tau)$: für $\zeta \equiv 0$ ist

$$\begin{aligned} \rho^2 &= |z|^2 = (1 + \tilde{z})(1 + \bar{\tilde{z}}) = 1 + (z_2 + \bar{z}_2)\mu^2 + O(\mu^4), \\ \rho^{-3} &= 1 - \frac{3}{2}(z_2 + \bar{z}_2)\mu^2 + O(\mu^4), \\ z\rho^{-3} &= 1 + \tilde{z} - \frac{3}{2}(\tilde{z} + \bar{\tilde{z}}) + O(\mu^4) = 1 - \left(\frac{1}{2}z_2 + \frac{3}{2}\bar{z}_2\right)\mu^2 + O(\mu^4). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Vergleich der Terme $\propto \mu^2$ in (3.19) ergibt

$$z_2'' + 2iz_2' = \frac{3}{2}(z_2 + \bar{z}_2) + \underline{\underline{\frac{3}{2}(1 + e^{-2i\tau})}}. \quad (3.24)$$

Der Ansatz $z_2(\tau) = a_0 + a_-e^{-2i\tau} + a_+e^{2i\tau}$ (mit $a_{0,\pm} \in \mathbb{R}$ wegen (3.22)) liefert

$$z_2(\tau) = -\frac{1}{2} - \frac{19}{16}e^{-2i\tau} + \frac{3}{16}e^{2i\tau}. \quad (3.25)$$

(Die hinzukommende Lösung der homogenen Gleichung (3.24), $z_2^0(\tau) = ae^{i\tau} - 3\bar{a}e^{-i\tau}$, die (3.22) genügt, verschwindet.) Gl. (3.25) beschreibt in führender Ordnung die ovale Gestalt der periodischen Bahn: Der Unterschied der “Halbachsen” beträgt

$$\Delta = \mu^2 \left(z_2\left(\frac{\pi}{2}\right) - z_2(0) \right) = 2\mu^2$$

(= $1,3 \cdot 10^{-2}$ für (3.13), $1 = \text{Abstand EM}$). Die Bahn des Mondes ist nicht periodisch, und die Änderungen des Abstandes EM sind in Wahrheit grösser.

Wir halten noch fest: nach (3.24) ist

$$\rho^{-3} = 1 + \frac{3}{2}\mu^2(1 + e^{2i\tau} + e^{-2i\tau}) + O(\mu^4). \quad (3.26)$$

Variation der Bahn

Der Ansatz für Bahnen, die nahe der periodischen Lösung ($z(\tau), \zeta(\tau) \equiv 0$), s. (3.21), liegen, lautet

$$(z(\tau) + \hat{z}(\tau), \hat{\zeta}(\tau)) \quad (3.27)$$

mit $\hat{z}, \hat{\zeta}$ klein. Dies setzt man in die Bewegungsgleichungen (3.19, 3.20) ein und linearisiert in $\hat{z}, \hat{\zeta}$: Man erhält **Variationsgleichungen**.

Wegen $\frac{\partial \rho}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} = 0$ enthält die Variationsgleichung von (3.19) $\hat{\zeta}$ nicht, d.h. es kommt nur \hat{z} vor. Insbesondere können wir eine Variation (3.27) betrachten mit $\hat{z} \equiv 0$, d.h. eine die über der periodischen Bahn liegt. Die Variation von (3.20) lautet dann

$$\hat{\zeta}'' = -\left(\frac{1+2\mu}{\rho^3} + \mu^2\right)\hat{\zeta},$$

wo ρ sich nun auf die periodische Bahn bezieht, nach (3.26) also

$$\begin{aligned} \hat{\zeta}'' &= -\left(1 + 2\mu + \frac{3}{2}\mu^2(1 + 2\cos 2\tau) + \mu^2 + \dots\right)\hat{\zeta} \\ &= -\left(1 + 2\mu + \frac{5}{2}\mu^2 + 3\mu^2 \cos 2\tau + \dots\right)\hat{\zeta}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Lässt man den Term

$$3\mu^2 \cos 2\tau \quad (3.29)$$

weg, so resultiert ein harmonischer Oszillator in $\hat{\zeta}$ der Frequenz

$$r = \left(1 + 2\mu + \frac{5}{2}\mu^2\right)^{1/2} = 1 + \mu + \frac{3}{4}\mu^2 + \dots$$

In beliebigen Einheiten ist dies das Verhältnis (3.11) von synodischem zu drakonitischem Monat (in 1. Ordnung, $r = 1 + \mu$, stimmt dies mit (3.12) überein). Für den Mond (3.13) ergibt sich

$$r = 1,08537$$

in guter Übereinstimmung mit (3.11). Der Term (3.29) hat zur Folge, dass $\hat{\zeta}(\tau)$ zwar nicht mehr periodisch ist, aber eine mittlere Frequenz r besitzt. Wegen des oszillatorischen Verhaltens von (3.29) ist r nur in Ordnung μ^4 beeinflusst.

Berücksichtigung weiterer Glieder der Störungsrechnung (sowie von $\hat{z}(\tau) \neq 0$) verbessern die Übereinstimmung mit dem beobachteten Wert (3.11) noch weiter; z.B. in nächster Ordnung

$$r = 1,08517.$$

4 Schwingungen

1. Lineare Bewegungsgleichungen

Lineare Bewegungsgleichungen entstehen oft durch Linearisierung einer nicht linearen Bewegungsgleichung um eine bekannte Lösung (z.B. eine Gleichgewichtslösung) herum (s. (3.6) oder (3.28)). Die allgemeinste **lineare, inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung** ist

$$\dot{z} = A(t)z + b(t) \quad (4.1)$$

für eine Funktion $z(t) \in \mathbb{R}^n$, wobei $b(t) \in \mathbb{R}^n$ und die lineare Abbildung $A(t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (oder Matrix) vorgegebene Funktionen von t sind. Es ist manchmal nützlich, auch komplexe Lösungen $t \mapsto z(t) \in \mathbb{C}^n$ zu betrachten: $\operatorname{Re} z(t)$ ist dann eine reelle Lösung.

Beispiel. Das mechanische System (1.12) erhält die Form (4.1) mit $n = 2$ durch

$$z(t) = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x}/\alpha \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & -2\beta \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma(t) \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

wobei

$$\alpha = \sqrt{\frac{f}{m}}, \quad \beta = \frac{r}{2m}, \quad \gamma(t) = \frac{k(t)}{\sqrt{fm}}.$$

Freie Schwingungen sind beschrieben durch die Lösungen der **homogenen Gleichung**

$$\dot{z} = A(t)z, \quad (4.3)$$

die einen linearen Raum bilden (Superpositionsprinzip). Dieser Raum hat die Dimension n , da zu jedem Anfangswert $z(s) \in \mathbb{R}^n$ zu einer beliebigen aber festen Zeit s genau eine Lösung $z(t)$ ($t \in \mathbb{R}$) gehört. Die Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$P(t, s) : z(s) \mapsto z(t)$$

heisst **Propagator** des Systems. $P(t, s)$ ist eine zweiparametrische Schar von Abbildungen mit den evidenten Eigenschaften

$$\begin{aligned} P(t, r)P(r, s) &= P(t, s), \\ P(s, s) &= 1, \\ \frac{\partial}{\partial t}P(t, s) &= A(t)P(t, s). \end{aligned}$$

Die zwei letzten Gleichungen sind gleichbedeutend zur Integralgleichung

$$P(t, s) = 1 + \int_s^t dt_1 A(t_1)P(t_1, s),$$

deren Lösung durch eine konvergente Iterationsreihe dargestellt werden kann:

$$P(t, s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_s^t dt_1 \int_s^{t_1} dt_2 \cdots \int_s^{t_{n-1}} dt_n A(t_1) \cdots A(t_n).$$

Das System (4.3) heisst **autonom**, falls A nicht von t abhängt. Dann ist $P(t-t_0, s-t_0) = P(t, s)$, d.h. $P(t, s)$ hängt nur von der Differenz $t - s$ ab. Für $P(t) \equiv P(t, 0)$ gilt dann

$$\begin{aligned} P(t)P(s) &= P(t+s), & P(0) &= 1, \\ \frac{d}{dt}P(t) &= AP(t), \\ P(t) = e^{At} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Beispiel (Fortsetzung). Aus (4.2) folgt

$$(A + \beta 1)^2 = \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ -\alpha & -\beta \end{pmatrix}^2 = -\underbrace{(\alpha^2 - \beta^2)}_{=: \omega_0^2} 1$$

und damit

$$e^{(A+\beta 1)t} = 1 \cos \omega_0 t + (A + \beta 1) \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

für $\omega_0 \neq 0$, oder

$$e^{At} = e^{-\beta t} \cdot \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t + \frac{\beta}{\omega_0} \sin \omega_0 t & \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 t \\ -\frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 t & \cos \omega_0 t - \frac{\beta}{\omega_0} \sin \omega_0 t \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Damit ist die freie gedämpfte Schwingung gegeben durch

$$x(t) = x(0)e^{-\beta t} \left(\cos \omega_0 t + \frac{\beta}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right) + \dot{x}(0)e^{-\beta t} \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t, \quad (\omega_0 = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}). \quad (4.5)$$

Auf das Vorzeichen von ω_0 kommt es nicht an. Für $\beta > \alpha$ wird ω_0 imaginär: Dann ist

$$\cos \omega_0 t = \operatorname{ch} |\omega_0| t, \quad \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t = \frac{1}{|\omega_0|} \operatorname{sh} |\omega_0| t.$$

Im Fall $\omega_0 = 0$ (d.h. $\alpha = \beta$) ist $A + \beta 1$ nilpotent: $(A + \beta 1)^2 = 0$, und deshalb

$$\begin{aligned} e^{(A+\beta 1)t} &= 1 + (A + \beta 1)t, \\ x(t) &= x(0)e^{-\beta t}(1 + \beta t) + \dot{x}(0)e^{-\beta t}t. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Eigenschwingungen

Eine alternative Behandlung des Systems (4.3) im autonomen Fall besteht im Auffinden der Eigenschwingungen, d.h. der (komplexen) Lösungen der Form

$$z(t) = ae^{\lambda t}, \quad (\lambda \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{C}^n). \quad (4.7)$$

Sie entsprechen den Lösungen des Eigenwertproblems

$$Aa = \lambda a.$$

Falls die Eigenvektoren von A ganz \mathbb{C}^n aufspannen, ist jede Lösung von (4.3) eine Linearkombination von Eigenschwingungen (4.7). A heisst dann **diagonalisierbar**, denn in einer Basis von Eigenvektoren ist A durch eine Diagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

dargestellt. Die Menge $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ der Eigenwerte ist das **Spektrum** von A . Ohne Bezugnahme auf eine spezielle Basis kann man (4.8) als **Spektralzerlegung** von A schreiben:

$$A = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda P_\lambda. \quad (4.9)$$

Die lineare Abbildung $P_\lambda : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ ist die **Eigenprojektion** zum Eigenwert λ ; sie ist definiert durch

$$\begin{aligned} P_\lambda a &= \begin{cases} a & \text{falls } Aa = \lambda a \\ 0 & \text{falls } Aa = \mu a \text{ mit } \mu \neq \lambda \end{cases} \\ P_\lambda P_\mu &= \delta_{\lambda\mu} P_\lambda, \quad \sum_{\lambda \in \sigma(A)} P_\lambda = 1; \end{aligned} \quad (4.10)$$

ferner ist

$$e^{At} = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} e^{\lambda t} P_\lambda, \quad z(t) = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} e^{\lambda t} P_\lambda z(0).$$

Beispiel (Fortsetzung). Die Eigenwerte sind

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \quad (4.11)$$

mit zugehörigen Eigenvektoren $a_{1,2} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \lambda_{1,2} \end{pmatrix}$, die linear unabhängig sind, solange $\lambda_1 \neq \lambda_2$, d.h. für $\omega_0 \neq 0$. Dann ist die freie Schwingung von der Form $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$, und $c_{1,2}$ lassen sich durch $x(0), \dot{x}(0)$ ausdrücken: So findet man wieder (4.5).

Das schwingende System (4.3) heisst **stabil**, falls keine Lösung $z(t)$ für $t \rightarrow +\infty$ unbeschränkt wächst. Gleichbedeutend ist (für A diagonalisierbar)

$$\operatorname{Re} \lambda \leq 0, \quad \text{alle } \lambda \in \sigma(A). \quad (4.12)$$

Es heisst **dissipativ**, falls es eine positiv definite quadratische Form (z, z) in \mathbb{R}^n gibt mit

$$\frac{d}{dt}(z, z) \leq 0$$

für jede Lösung $z(t) \in \mathbb{R}^n$ (dann gilt dasselbe für die Erweiterung auf \mathbb{C}^n). Insbesondere ist es stabil: $z(t)$ ist beschränkt wegen $(z(t), z(t)) \leq (z(0), z(0))$ für $t \geq 0$ (oder: $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ wegen $d(z, z)/dt = (Az, z) + (z, Az) = 2(\operatorname{Re} \lambda)(z, z)$ für $z = ae^{\lambda t}$).

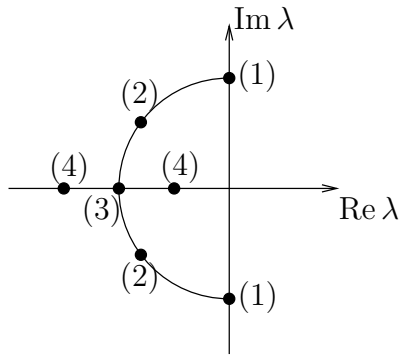
Beispiel (Fortsetzung). Für die Gesamtenergie

$$(z, z) = \frac{1}{2}(m\dot{x}^2 + fx^2), \quad (z \in \mathbb{R}^2),$$

des ungedämpften Oszillators gilt

$$\frac{d}{dt}(z, z) = -r\dot{x}^2 \leq 0$$

für $\beta \geq 0$ (Reibung). In Abhängigkeit davon ist das Spektrum (s. (4.11)):



- (1) $\beta = 0$
- (2) $0 < \beta < \alpha$
- (3) $\beta = \alpha$
- (4) $\beta > \alpha$

Bei kritischer Dämpfung $\beta = \alpha$ ist die Dämpfung von $x(t)$ (für eine allgemeine Anfangsbedingung $x(0)$) am grössten.

Erzwungene Schwingungen

Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems (4.1) ist

$$z(t) = P(t, s)z(s) + \int_s^t d\tau P(t, \tau)b(\tau) \quad (4.13)$$

(Duhamel-Formel), denn der letzte Term ist eine spezielle Lösung davon. Für eine Stossanregung $b(t) = \delta(t - t_0)b$, die auf die Anfangsbedingung $z(s) = 0$, ($s < t_0$) folgt, ergibt sich daraus die Stossantwort

$$z(t) = \theta(t - t_0)P(t, t_0)b,$$

($\theta(t) = 1$ für $t \geq 0$, und $= 0$ für $t < 0$). Bei autonomen Systemen vereinfacht sich (4.13) zu

$$z(t) = e^{At}z(0) + \int_0^t d\tau e^{A(t-\tau)}b(\tau). \quad (4.14)$$

Für eine harmonische Anregung

$$b(t) = be^{i\omega t}, \quad (b \in \mathbb{C}^n, \omega \in \mathbb{R})$$

erhält man daraus (oder direkt)

$$z(t) = e^{At}[z(0) - a(\omega)] + e^{i\omega t}a(\omega), \quad (4.15)$$

$$a(\omega) = (i\omega - A)^{-1}b. \quad (4.16)$$

Vorausgesetzt ist $i\omega \notin \sigma(A)$, ansonsten die Inverse $(i\omega - A)^{-1}$ nicht existiert. Diese Bedingung ist erfüllt, falls A **strikt stabil** ist,

$$\operatorname{Re} \lambda < 0, \quad \text{alle } \lambda \in \sigma(A),$$

was wir annehmen wollen. Der erste Term rechts in (4.15) ist ein exponentiell abklingender "Einschwingvorgang", und für grosse t überlebt nur die **erzwungene Schwingung**

$$z(t) = e^{i\omega t}a(\omega)$$

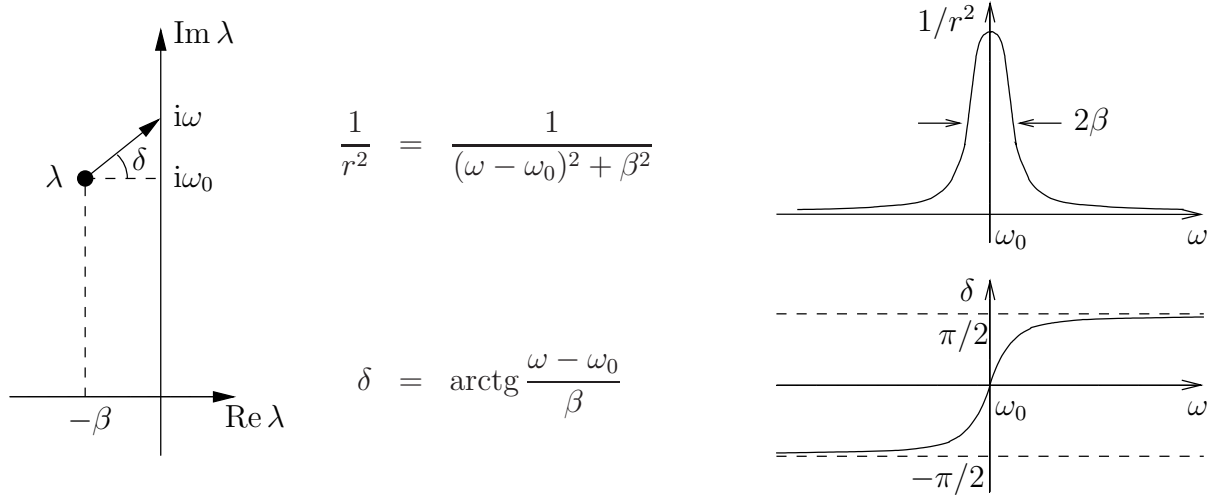
mit der Anregungsfrequenz ω . Für diagonalisierbare A folgt aus (4.9)

$$(i\omega - A)^{-1} = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \frac{P_\lambda}{i\omega - \lambda}.$$

Ist nun $i\omega$ nahe bei einem Eigenwert $\lambda \equiv -\beta + i\omega_0$, so ist der entsprechende Term in (4.16) dominant, also die erzwungene Schwingung

$$z(t) \cong \frac{e^{i\omega t}}{i\omega - \lambda} P_\lambda b = \frac{1}{r} e^{i(\omega t - \delta)} P_\lambda b$$

mit $i\omega - \lambda = \beta + i(\omega - \omega_0) \equiv r e^{i\delta}$, (r, δ reell). Die Amplitude $1/r$ und die Phase δ zeigen als Funktion von ω nahe bei ω_0 ein typisches Resonanzverhalten:



Die **Breite** der Resonanz ist proportional zur Dämpfung β der resonanten Eigenschwingung. Für $\beta = 0$ divergiert $a(\omega)$ für $\omega \rightarrow \omega_0$; für $\omega = \omega_0$ divergiert die Lösung (4.14) für $t \rightarrow \infty$ wie $t \cdot P_\lambda b$. Falls $P_\lambda b = 0$, so wird die Resonanz λ nicht angeregt.

Bemerkung. Falls A nicht diagonalisierbar ist, so tritt anstelle von (4.9) die allgemeine Spektralzerlegung einer linearen Abbildung $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$:

$$A = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} (\lambda P_\lambda + N_\lambda).$$

Die P_λ erfüllen (4.10); ferner gilt

$$P_\lambda N_\lambda = N_\lambda P_\lambda = N_\lambda; \quad N_\lambda^{m_\lambda + 1} = 0$$

für eine kleinste ganze Zahl $m_\lambda \geq 0$ (N_λ ist nilpotent). Daraus folgt $N_\lambda = (A - \lambda)P_\lambda$ und weiter

$$e^{At} = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \left(\sum_{k=0}^{m_\lambda} \frac{(N_\lambda t)^k}{k!} \right) e^{\lambda t} P_\lambda, \quad (4.17)$$

$$(i\omega - A)^{-1} = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \left(\sum_{k=0}^{m_\lambda} \frac{N_\lambda^k}{(i\omega - \lambda)^{k+1}} \right) P_\lambda \quad (4.18)$$

(mit $N_\lambda^0 = 1$); nach (4.17) können für freie Schwingungen $z(t)$ zu den Exponentialfunktionen $e^{\lambda t}$ noch polynomiale Faktoren treten (vgl. (4.6)). Entsprechend erscheinen in (4.18) die Resonanzen als Pole höherer Ordnung.

2. Anwendungen

1. Konservative schwingende Systeme

Wir betrachten ein System, dessen Lage durch f Koordinaten $(x_1, \dots, x_f) \equiv x \in \mathbb{R}^f$ bestimmt ist. Das System soll eine erhaltene Energie der Form

$$\begin{aligned} T(\dot{x}) + V(x) \\ T, V \text{ quadratische Formen auf } \mathbb{R}^f \\ T \text{ positiv definit} \end{aligned}$$

haben. Im \mathbb{R}^f definiert die **kinetische Energie** T ein **Skalarprodukt** durch

$$(x, y) = \frac{1}{2}(T(x+y) - T(x) - T(y)) \quad (4.19)$$

(insbesondere: $(x, x) = T(x)$). Es gibt dann eine (bezüglich dieses Skalarprodukts) symmetrische, lineare Abbildung $\tilde{V} : \mathbb{R}^f \rightarrow \mathbb{R}^f$, so dass für die **potentielle Energie** gilt

$$V(x) = (x, \tilde{V}x) .$$

Dadurch ist \tilde{V} eindeutig bestimmt. Die Energieerhaltung bedeutet

$$0 = \frac{d}{dt}[(\dot{x}, \dot{x}) + (x, \tilde{V}x)] = 2(\dot{x}, \ddot{x} + \tilde{V}x) . \quad (4.20)$$

Die **Bewegungsgleichung** des Systems folgt daraus unter der Annahme, dass die Beschleunigung (oder die Kräfte) nur von x , nicht aber von \dot{x} abhängen: Da (4.20) für alle \dot{x} gilt, folgt

$$\ddot{x} = -\tilde{V}x . \quad (4.21)$$

Als symmetrische Abbildung besitzt \tilde{V} ein vollständiges, orthonormiertes System von Eigenvektoren e_1, \dots, e_f in \mathbb{R}^f (oder \mathbb{C}^f):

$$\tilde{V}e_k = \omega_k^2 e_k , \quad (e_k, e_l) = \delta_{kl} \quad (4.22)$$

($\omega_k \in \mathbb{R}$ oder $\omega_k \in i\mathbb{R}$). In dieser Basis ist

$$x = \sum_{i=1}^f \xi_i e_i , \quad \xi_i = (e_i, x)$$

(ξ_i : Normalkoordinaten) und (4.22) lautet

$$\ddot{\xi}_i = -\omega_i^2 \xi_i , \quad (i = 1, \dots, f) ,$$

d.h. das System ist äquivalent einem System von f **ungekoppelten, harmonischen Oszillatoren** mit Frequenzen $\omega_1, \dots, \omega_f$. Die allgemeine Lösung von (4.21) ist somit eine Superposition von Eigenschwingungen:

$$x(t) = \sum_{i=1}^f e_i \left[\underbrace{(e_i, x(0))}_{\xi_i(0)} \cos \omega_i t + \underbrace{(e_i, \dot{x}(0))}_{\dot{\xi}_i(0)} \frac{1}{\omega_i} \sin \omega_i t \right] . \quad (4.23)$$

Das System ist stabil, falls alle $\omega_i^2 > 0$ sind, d.h. falls auch V positiv definit ist. Ist V nur positiv semidefinit, so ist mindestens ein $\omega_i = 0$, für welches in (4.23)

$$\frac{1}{\omega_i} \sin \omega_i t \equiv t$$

zu setzen ist.

Symmetrien vereinfachen die Lösung des Eigenwertproblems (4.22). Eine Symmetrie ist eine lineare Abbildung $S : \mathbb{R}^f \rightarrow \mathbb{R}^f$, die T und V invariant lässt:

$$\begin{aligned} T : \quad (Sx, Sx) &= (x, x) : \quad S \text{ ist } \mathbf{orthogonal} \\ V : \quad (Sx, \tilde{V}Sx) &= (x, \tilde{V}x), \end{aligned}$$

also $S^{-1}\tilde{V}S = \tilde{V}$, oder S **kommutiert** mit \tilde{V} :

$$[S, \tilde{V}] \equiv S\tilde{V} - \tilde{V}S = 0. \quad (4.24)$$

Als Abbildung $\mathbb{C}^f \rightarrow \mathbb{C}^f$ ist S **unitär**. Die Eigenwerte von S liegen auf dem Einheitskreis und die Eigenräume sind paarweise orthogonal. Wegen (4.24) sind die Eigenräume von S invariant unter \tilde{V} :

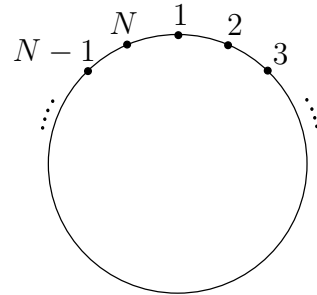
$$Sx = \lambda x \quad \implies \quad S\tilde{V}x = \lambda\tilde{V}x.$$

Es genügt also, das Eigenwertproblem von \tilde{V} in jedem Eigenraum von S (“Symmetriesektor”) separat zu lösen (Reduktion der Dimension).

Im konkreten Beispiel stellt man die Bewegungsgleichungen auf und entnimmt \tilde{V} durch Vergleich mit (4.21). Die symmetrische Abbildung \tilde{V} braucht aber nicht durch eine symmetrische Matrix dargestellt zu sein, falls die verwendeten Koordinaten sich nicht auf eine orthonormierte Basis beziehen.

Beispiel. Zyklische Kette: N gleiche Massenpunkte auf einem Kreis, dazwischen gleiche Federn. Die Koordinaten (x_1, \dots, x_N) beschreiben die Auslenkungen aus einer Gleichgewichtslage. Die Bewegungsgleichungen lauten $m\ddot{x}_i = -f[(x_i - x_{i-1}) + (x_i - x_{i+1})]$, also

$$(\tilde{V}x)_i = \frac{f}{m}(2x_i - x_{i-1} - x_{i+1}) \quad (4.25)$$



$(N + 1 \equiv 1)$. Eine Symmetrie dieser Kette ist

$$S : (x_1, \dots, x_N) \mapsto (x_2, \dots, x_{N+1} \equiv x_1).$$

Das Eigenwertproblem von S ist leicht zu lösen: $Sx = \lambda x$ heisst $x_{l+1} = \lambda x_l = \lambda^2 x_{l-1} = \dots = \lambda^l x_1$, speziell $x_1 = x_{N+1} = \lambda^N x_1$. S hat also die N einfachen Eigenwerte

$$\lambda_k = e^{ik\delta}, \quad (k = 0, \dots, N - 1; \delta = \frac{2\pi}{N})$$

und die (nicht normierten) Eigenvektoren

$$e_k = (1, e^{ik\delta}, e^{2ik\delta}, \dots, e^{(N-1)ik\delta}). \quad (4.26)$$

Da die Eigenräume von S eindimensional sind, wird das Eigenwertproblem von (4.25) trivial: $\tilde{V}e_k = \omega_k^2 e_k$ mit

$$\omega_k^2 = \frac{f}{m}(2 - e^{-ik\delta} - e^{+ik\delta}) = 2\Omega^2(1 - \cos k\delta) = 4\Omega^2 \sin^2 \frac{k\delta}{2}, \quad (\Omega^2 = \frac{f}{m}),$$

d.h. die **Eigenfrequenzen** sind

$$\omega_k = 2\Omega \sin \frac{k\pi}{N}.$$

Die allgemeine Bewegung der Kette ist durch (4.23) gegeben. Speziell sind die Moden:

- $k = 0$: $\omega_0 = 0$, $e_0 = (1, \dots, 1)$: Gleichförmige Rotation $\xi(t) = \xi(0) + \dot{\xi}(0)t$ der Kette;
- N gerade, $k = N/2$: $\omega_{N/2} = 2\Omega$, $e_{N/2} = (1, -1, 1, -1, \dots, -1)$: benachbarte Massenpunkte im Gegenteil.

Alle anderen Eigenvektoren (4.26) sind nicht reell, und zwar sind $e_k, e_{-k} \equiv e_{N-k}$ entartet: Sie entsprechen entgegengesetzt laufender Wellen $\text{Re}(e_{\pm k} e^{-i\omega_k t}) = (\cos(ki\delta \mp \omega_k t))_{i=1}^n$ gleicher Frequenz ω_k . Reelle Eigenvektoren, vgl. (4.22), dieser Frequenz sind die stehenden Wellen

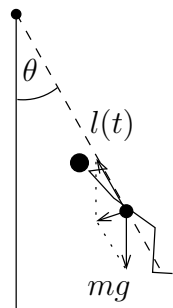
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(e_k + e_{-k}) &= (1, \cos k\delta, \cos 2k\delta, \dots, \cos(N-1)k\delta), \\ \frac{1}{2i}(e_k - e_{-k}) &= (0, \sin k\delta, \sin 2k\delta, \dots, \sin(N-1)k\delta). \end{aligned}$$

2. Parametrische Resonanz

Eine andere Art von Resonanz als die erzwungener Schwingungen zeigen frei schwingende Systeme mit einer **periodischen Zeitabhängigkeit**:

$$\dot{z} = A(t)z; \quad A(t+T) = A(t). \quad (4.27)$$

Solche Systeme kommen zustande durch Linearisierung um eine periodische Lösung eines nicht linearen Problems (s. z.B. (3.28)), oder aber wie im Beispiel der Schaukel: Der Abstand vom Aufhängepunkt zum Schwerpunkt wird periodisch längs dem Seil verändert, $l(t) = l(t+T)$, (Schaukeln im Stehen). Der Drallsatz



$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\theta}) = -mgl \sin \theta$$

liefert für kleine Auslenkungen (benütze $l^{-1}(d/dt)l^2(d/dt)l^{-1} = (d^2/dt^2) - l^{-1}\ddot{l}$)

$$\frac{d^2}{dt^2}(l\theta) = -\frac{g - \ddot{l}}{l} \cdot (l\theta). \quad (4.28)$$

Es sei $P(t)$ der Propagator von (4.27) für das Zeitintervall von 0 nach t . Dann gilt

$$P(nT) = P(T)^n, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Exponentiell wachsende Lösungen treten also dann auf, wenn $P(T)$ einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ hat mit $|\lambda| > 1$; umgekehrt sind alle Lösungen beschränkt, falls $P(T)$ diagonalisierbar ist mit Eigenwerten $|\lambda_k| \leq 1$. Als Beispiel schreiben wir das System (4.28) als

$$\ddot{x} = -\omega^2(t)x, \quad \omega(t+T) = \omega(t), \quad (4.29)$$

($x = l\theta$, $\omega^2 = (g - \ddot{l})/l$). Dies hat die Form (4.3) für

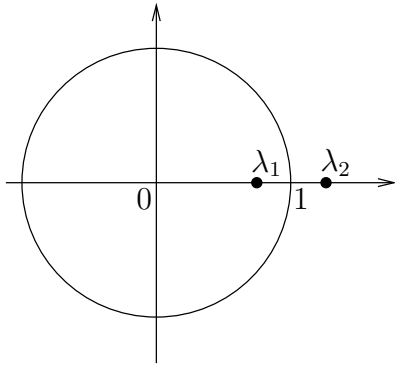
$$z = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Da $\text{sp } A(t) = 0$ (Spur von A) folgt

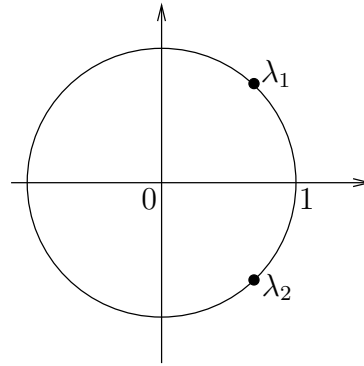
$$\frac{d}{dt} \det P(t) = \underbrace{\text{sp} \left(\frac{dP}{dt} P(t)^{-1} \right)}_{A(t)} \cdot \det P(t) = 0$$

und somit $\det P(t) = \det P(0) = 1$. Die beiden Eigenwerte λ_1, λ_2 erfüllen $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ und, da $P(t)$ reell ist, ist mit λ_i auch $\bar{\lambda}_i$ ein Eigenwert. Es gibt also zwei Möglichkeiten:

- $\lambda_i = \bar{\lambda}_i$: λ_i reell
- $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$: $\lambda_i \bar{\lambda}_i = 1$



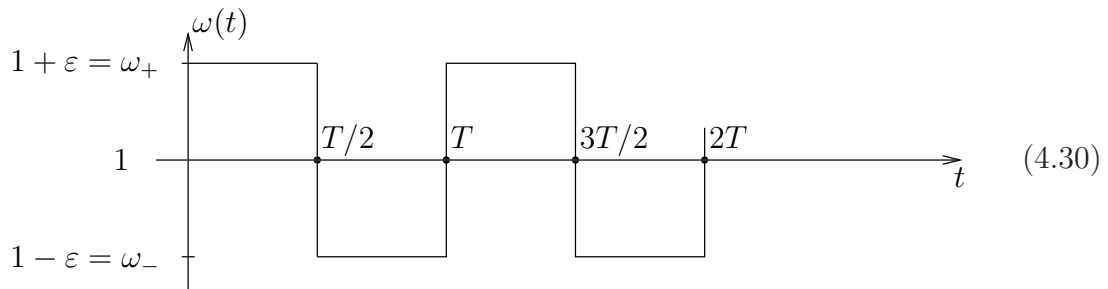
$$|\text{sp } P(T)| = |\lambda_1 + \lambda_2| > 2$$



$$|\text{sp } P(T)| = |\lambda_1 + \lambda_2| \leq 2$$

Im ersten Fall ist das System instabil ($|\lambda_2| > 1$), im zweiten stabil ($|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$).

Wir wählen nun $\omega(t)$ als Stufenfunktion



Die Wahl von $\omega = 1$ für $\varepsilon = 0$ entspricht dabei bloss der Festlegung einer Zeiteinheit: Die Periode der ungestörten Schwingung ist $T_0 = 2\pi$. Für konstantes $\omega(t) \equiv \omega$ wäre die Lösung von (4.29) gegeben durch den Propagator (vgl. (4.4))

$$p(t; \omega) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \omega^{-1} \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}$$

Im Beispiel (4.30) ist deshalb

$$P(T) = p\left(\frac{T}{2}; \omega_-\right) p\left(\frac{T}{2}; \omega_+\right)$$

mit

$$\begin{aligned} \operatorname{sp} P(T) &= \cos \frac{\omega_+ T}{2} \cos \frac{\omega_- T}{2} - \frac{\omega_+}{\omega_-} \sin \frac{\omega_+ T}{2} \sin \frac{\omega_- T}{2} \\ &\quad + \cos \frac{\omega_+ T}{2} \cos \frac{\omega_- T}{2} - \frac{\omega_-}{\omega_+} \sin \frac{\omega_+ T}{2} \sin \frac{\omega_- T}{2} \\ &= (\cos T + \cos \varepsilon T) + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\omega_+}{\omega_-} + \frac{\omega_-}{\omega_+} \right)}_{\frac{1+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}} (\cos T - \cos \varepsilon T) \\ &= \frac{2}{1-\varepsilon^2} (\cos T - \varepsilon^2 \cos \varepsilon T) \\ &= 2 - \frac{4}{1-\varepsilon^2} \left(\sin^2 \frac{T}{2} - \varepsilon^2 \sin^2 \frac{\varepsilon T}{2} \right) \tag{4.31} \\ \text{oder :} \quad &= -2 + \frac{4}{1-\varepsilon^2} \left(\cos^2 \frac{T}{2} - \varepsilon^2 \cos^2 \frac{\varepsilon T}{2} \right). \end{aligned}$$

Wir fassen nun T als Variable auf und suchen zu gegebenem ε die T -Bereiche, in denen das System instabil ist (Resonanzbereiche). Es ergeben sich zwei Möglichkeiten:

$$(a) \quad \operatorname{sp} P(T) > 2 : \quad \sin^2 \frac{T}{2} < \varepsilon^2 \sin^2 \frac{\varepsilon T}{2}, \tag{4.32}$$

$$(b) \quad \operatorname{sp} P(T) < -2 : \quad \cos^2 \frac{T}{2} < \varepsilon^2 \cos^2 \frac{\varepsilon T}{2}. \tag{4.33}$$

Wir diskutieren die beiden Fälle für $\varepsilon \ll 1$:

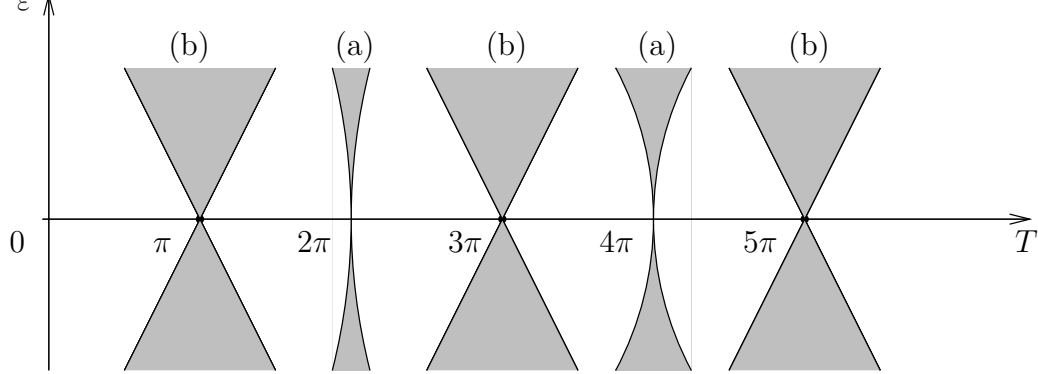
(a) Für $\varepsilon = 0$ ist $\operatorname{sp} P(T) = 2$, falls $T = 2\pi n$, ($n = 1, 2, 3, \dots$). Für kleine ε suchen wir also Lösungen von (4.32) der Form $T = 2\pi n + x$ mit $|x| \ll 1$. Näherungsweise:

$$|x| < 2\pi n \varepsilon^2.$$

(b) Für $\varepsilon = 0$ ist $\operatorname{sp} P(T) = -2$ falls $T = \pi \cdot (2n + 1)$, ($n = 0, 1, 2, \dots$). Für kleine ε setze $T = \pi(2n + 1) + x$; (4.33) lautet dann

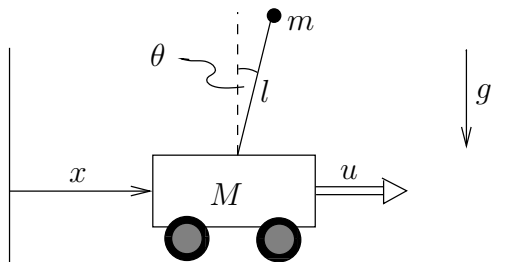
$$|x| < 2\varepsilon.$$

Im Fall (b) ist die Länge der Resonanzintervalle unabhängig von n und verschwindet $\sim \varepsilon$ für $\varepsilon \rightarrow 0$. Im Fall (a) wächst diese Länge bei festem ε proportional zu n und verschwindet $\sim \varepsilon^2$ für $\varepsilon \rightarrow 0$. In beliebigen Einheiten ist $T/2\pi$ das Verhältnis der Perioden der Störung und der freien Schwingung.



3. Stabilisierung linearer Systeme

Beispiel. Umgekehrtes Pendel



Koordinaten (x, θ)
horizontale Kraft $u(t)$

Die linearisierten Bewegungsgleichungen (θ klein) des Systems sind (s. später, p. 47)

$$\begin{aligned} (M + m)\ddot{x} + m\dot{\theta} &= u, \\ m\ddot{x} + m\dot{\theta} &= mg\theta. \end{aligned}$$

Es ist von der allgemeinen Form

$$\dot{z} = Az + bu(t) \tag{4.34}$$

($A : n \times n$ Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$), und zwar mit $n = 4$,

$$z = \begin{pmatrix} l\theta \\ l\dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 + m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -m & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

in Einheiten, wo $M = 1$, $g = l$.

Rückkopplung: Die Kraft u wird als lineare Funktion des Zustandes z

$$u = r^T z, \quad r \in \mathbb{R}^n$$

angesetzt. Falls $r \in \mathbb{R}^n$ so gewählt werden kann, dass das resultierende (homogene) System mit Matrix

$$A + br^T$$

stabil ist, so heisst (4.34) (kurz: (A, b)) **stabilisierbar**.

Satz. (A, b) ist stabilisierbar, falls

$$b, Ab, \dots, A^{n-1}b \quad (4.35)$$

den ganzen \mathbb{R}^n aufspannen.

In Worten: Die Bedingung besagt, dass alle Freiheitsgrade direkt (b) oder indirekt ($Ab, \dots, A^{n-1}b$) durch die Rückkopplung r beeinflusst werden. Höhere Potenzen $A^k b$, $k \geq n$, wären in (4.35) überflüssig: Sie sind Linearkombinationen der bereits aufgeführten wegen dem Satz von Cayley-Hamilton:

$$p_n(A) = 0, \quad (4.36)$$

wobei

$$p_n(\lambda) = \det(\lambda - A) \equiv \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \lambda + \alpha_n$$

das charakteristische Polynom von A ist.

Beweis. $p_n(\lambda)$ setzt sich rekursiv zusammen aus

$$p_k(\lambda) = \lambda p_{k-1}(\lambda) + \alpha_k, \quad (k = 1, \dots, n),$$

mit $p_0(\lambda) = 1$. Mit (4.35) ist auch $b \equiv p_0(A)b, p_1(A)b, \dots, p_{n-1}(A)b$ eine Basis. Wegen

$$A p_k(A)b = p_{k+1}(A)b - \alpha_{k+1}b, \quad (k = 0, \dots, n-1),$$

und (4.36) liegen ihr bezüglich folgende Matrixdarstellungen vor

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_n \\ 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad br^T = \begin{pmatrix} r_1 & \cdots & r_n \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist das charakteristische Polynom von $A + br^T$

$$p(\lambda; r) = \lambda^n + (\alpha_1 - r_1)\lambda^{n-1} + \dots + (\alpha_n - r_n);$$

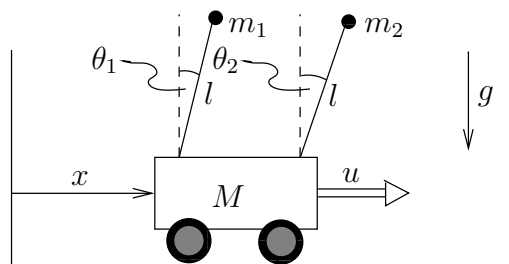
durch Wahl von $r^T = (r_1, \dots, r_n)$ kann man die Koeffizienten von $p(\cdot; r)$ beliebig vorgeben und damit auch die Nullstellen (= Eigenwerte von $A + br^T$) bis auf die Bedingung, dass die komplexen in konjugierten Paaren auftreten. Insbesondere kann man sie in die linke Halbebene (4.12) versetzen. \square

Im Beispiel ist

$$\det(b, Ab, A^2b, A^3b) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & -(1+m) \\ -1 & 0 & -(1+m) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & m \\ 1 & 0 & m & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

das System somit stabilisierbar.

Beispiel. Zwei umgekehrte Pendel gleicher Länge



Die linearisierten Bewegungsgleichungen sind nun

$$\begin{aligned} (M + m_1 + m_2)\ddot{x} + m_1 l \ddot{\theta}_1 + m_2 l \ddot{\theta}_2 &= u, \\ m_1 \ddot{x} + m_1 l \ddot{\theta}_1 &= m_1 g \theta_1, \\ m_2 \ddot{x} + m_2 l \ddot{\theta}_2 &= m_2 g \theta_2. \end{aligned}$$

Es folgt $l(\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2) = g(\theta_1 - \theta_2)$, sodass die Bewegung von $\theta_1 - \theta_2$ nicht stabilisiert wird. Zum Vergleich: Benützt man $z_1 = l(\theta_1 - \theta_2)$, $z_2 = l(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$ als zwei der sechs Komponenten des Zustandes z , so ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix},$$

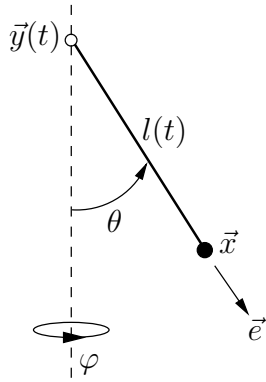
sodass auch die ersten beiden Komponenten aller Vektoren $A^k b$, ($k = 1, \dots, 5$), verschwinden. Die Bedingung (4.35) ist nicht erfüllt.

5 Lagrangesche Systeme

1. Konfigurationen und Lagekoordinaten

Zur Begriffsbildung benützen wir zwei Beispiele:

1. Das sphärische Pendel.



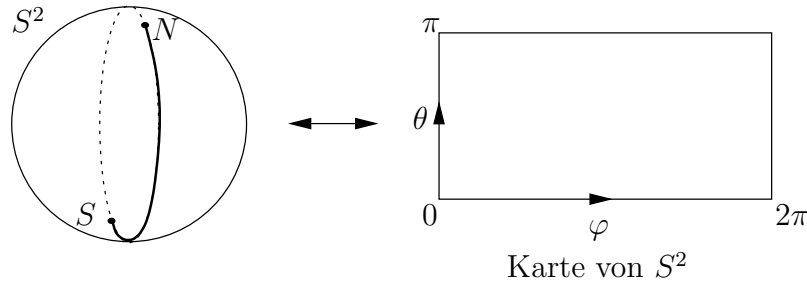
Der Aufhängepunkt $\vec{y}(t)$ und die Pendellänge $l(t)$ sind vorgeschriebene Funktionen der Zeit t . Die unter diesen **Zwangsbedingungen** noch zulässigen Lagen des Pendels sind

$$\vec{x} = \vec{y}(t) + l(t)\vec{e} \equiv \vec{x}(\vec{e}, t), \quad (5.1)$$

wobei \vec{e} über die Einheitskugel S^2 (**Konfigurationsraum** des Pendels) variieren kann. Die Bewegung des Pendels ist durch eine Funktion $t \mapsto \vec{e}(t) \in S^2$ gegeben. Auf S^2 können **Lagekoordinaten** eingeführt werden, z.B. Polarkoordinaten θ, φ :

$$\vec{e}(\theta, \varphi) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta). \quad (5.2)$$

Dadurch wird der Konfigurationsraum auf ein Stück des \mathbb{R}^2 abgebildet.



Die Abbildung ist nicht bijektiv auf dem Rand des Rechtecks (bzw. auf dem Nullmeridian von S^2). Zur Darstellung von ganz S^2 benötigt man mindestens zwei Karten (einen Atlas), was wir aber übersehen werden.

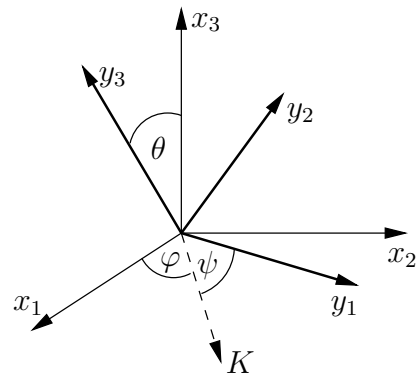
2. Der Kreisel ist ein starrer Körper, der nur um einen festgehaltenen Punkt rotieren kann. Mit dem Kreisel starr verbunden ist ein körperfestes (kartesisches) y -System, und $\vec{y} = 0$ ist der festgehaltene Punkt. Der Massenpunkt mit Koordinaten \vec{y} liegt im raumfesten x -System bei

$$\vec{x} = R\vec{y}, \quad (5.3)$$

wobei $R \in SO(3)$ die Lage des Kreisels angibt. Im Konfigurationsraum $SO(3)$ des Kreisels kann man z.B. die Eulerschen Winkel (φ, θ, ψ) als Lagekoordinaten verwenden: Das körperfeste y -System geht aus dem raumfesten x -System hervor durch die Folge von 3 Drehungen:

	Drehachse	Drehwinkel
1. Drehung	: x_3	φ
2. ”	: K	θ
3. ”	: y_3	ψ

wobei die “Knotenlinie” K das Bild der x_1 -Achse unter der 1. Drehung ist. Die in (5.3) auftretenden Drehungen sind dann parametrisiert durch



$$\begin{aligned}
 R &= R(\varphi, \theta, \psi) \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.4)
 \end{aligned}$$

Die entsprechende Karte von $SO(3)$ ist das Gebiet

$$\{0 < \theta < \pi, 0 < \varphi, \psi < 2\pi\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Allgemein: Ein System mit f Freiheitsgraden besteht aus N Teilchen, deren zur Zeit t zulässigen kartesischen Konfigurationen $x = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$ eine glatte f -dimensionale Fläche im \mathbb{R}^{3N} bilden. Lokal ist diese gegeben durch eine (offene) Karte $K \subset \mathbb{R}^f$, $K \ni q = (q^1, \dots, q^f)$ und, für jedes $t \in \mathbb{R}$, durch eine Abbildung

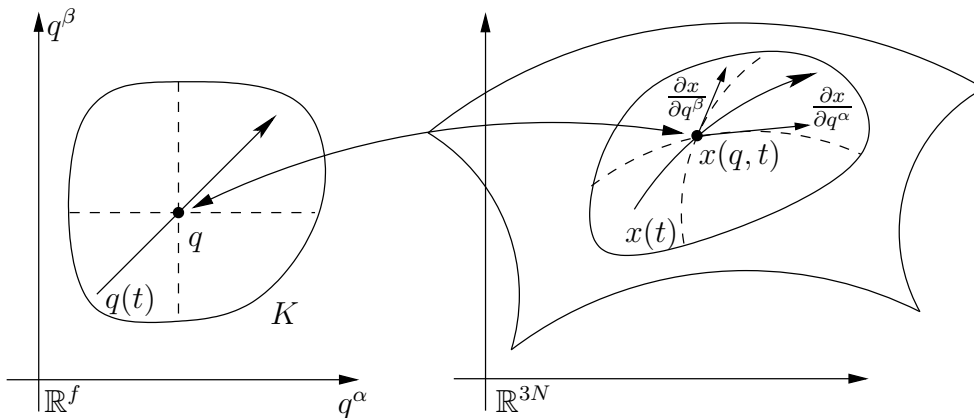
$$K \rightarrow \mathbb{R}^{3N}; \quad q \mapsto x(q, t), \quad (5.5)$$

die in (q, t) differenzierbar ist. Zudem hat die Tangentialabbildung Rang f , d.h. die Vektoren

$$\frac{\partial x}{\partial q^\alpha} \in \mathbb{R}^{3N}, \quad (\alpha = 1, \dots, f), \quad (5.6)$$

sind linear unabhängig. Beispiele für (5.5, 5.6) sind (5.1, 5.2) und (5.3, 5.4), wobei hier $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$ die Rolle des Index $i = 1, \dots, N$ übernimmt. Jede zulässige Bewegung $x(t)$ des Systems im Bereich der Karte ist dann dargestellt durch eine Funktion $t \mapsto q(t) \in K$:

$$x(t) = x(q(t), t). \quad (5.7)$$



Um nun die Bewegungsgleichungen eines Systems in den Lagekoordinaten $q = (q^1, \dots, q^f)$ zu formulieren, benötigen wir folgende Begriffe:

Geschwindigkeiten, kinetische Energie

Nach (5.7) sind die zur Zeit t zulässigen Geschwindigkeiten $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N)$ gegeben durch

$$\dot{x} = \sum_{\alpha} \frac{\partial x}{\partial q^{\alpha}}(q, t) \cdot \dot{q}^{\alpha} + \frac{\partial x}{\partial t}(q, t) \equiv \dot{x}(q, \dot{q}, t) \quad (5.8)$$

mit beliebigen **verallgemeinerten Geschwindigkeiten** $\dot{q} = (\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^f) \in \mathbb{R}^f$. So wird \dot{x} zu einer Funktion der unabhängigen Variablen $(q, \dot{q}, t) \in K \times \mathbb{R}^f \times \mathbb{R}$. Ebenso die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{x}_i^2 = T(q, \dot{q}, t), \quad (5.9)$$

für die gilt

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\alpha}} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{x}_i \cdot \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}^{\alpha}} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{x}_i \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q^{\alpha}}. \quad (5.10)$$

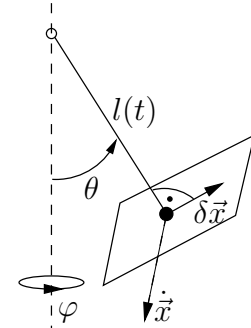
Virtuelle Verschiebungen

Es sei $q \in K$. Die Ableitung von (5.5) bei festem t ist eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^f \ni \delta q \mapsto \delta x \in \mathbb{R}^{3N}$:

$$\delta x = \sum_{\alpha=1}^f \frac{\partial x}{\partial q^{\alpha}} \cdot \delta q^{\alpha}. \quad (5.11)$$

Diese zulässigen Tangentialvektoren δx heissen **virtuelle Verschiebungen** des Systems aus der Lage $x(q, t)$ zur Zeit t . Wegen (5.6) bilden sie, wie die δq 's, einen f -dimensionalen Vektorraum.

Im Beispiel des Pendels: (i) $\delta \vec{x}$ entsteht durch eine Variation der Lagekoordinaten θ, φ bei fester Zeit und steht deshalb senkrecht zum Faden. (ii) Das Beispiel, oder der Vergleich von (5.11) mit (5.8) zeigt, dass \dot{x} bei zeitabhängigen Zwangsbedingungen im Allgemeinen keine virtuelle Verschiebung ist.



Virtuelle Arbeit, verallgemeinerte Kräfte und Impulse

Es seien $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_N) = F$ Kräfte, die in der Lage $x(q, t)$ auf die Teilchen wirken. Ihre **virtuelle Arbeit** ist definiert als die Linearform

$$\delta A = \sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{x}_i \quad (5.12)$$

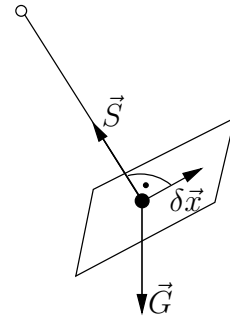
auf dem Raum der virtuellen Verschiebungen (5.11). (Beachte: δA ist i.A. nicht die Ableitung einer Grösse A). Danach ist

$$\delta A = \sum_{\alpha} Q_{\alpha} \delta q^{\alpha} \equiv \langle Q, \delta q \rangle$$

eine (von der Wahl der Lagekoordinaten unabhängige) Linearform in $\delta q = (\delta q^1, \dots, \delta q^f)$ mit den Koeffizienten (**verallgemeinerte Kräfte**)

$$Q_\alpha = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q^\alpha}(q, t). \quad (5.13)$$

Die Kräfte, die durch die Einschränkung (5.5) der zulässigen Konfigurationen $x \in \mathbb{R}^{3N}$ des Systems herrühren, heissen **Zwangskräfte**, die restlichen **treibende Kräfte**. Im Beispiel des Pendels: (i) Die Fadenspannung \vec{S} ist eine Zwangskraft, das Gewicht \vec{G} eine treibende. Beachte: $\vec{S} \perp \delta \vec{x}$. Allgemein leisten ideale Zwangskräfte, wie im Beispiel, keine virtuelle Arbeit (5.12): $\delta A = 0$, und tragen damit nicht zu den Q_α 's bei. Damit müssen die Zwangskräfte gar nicht erst berechnet werden. (ii) Bei zeitabhängigen Zwangsbedingungen können aber die Zwangskräfte (reale) Arbeit leisten: $\vec{S} \cdot \dot{\vec{x}} \neq 0$.



Analog zu den Q_α 's definiert man die **verallgemeinerten Impulse** p_α durch die Linearform

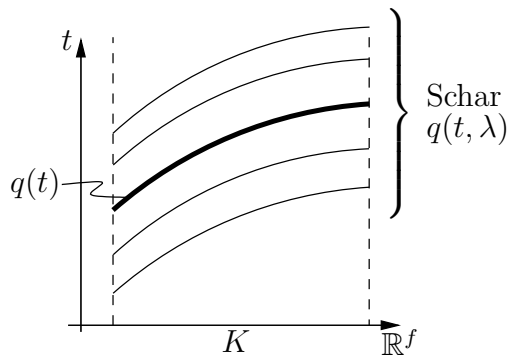
$$\sum_{i=1}^N \underbrace{m_i \dot{\vec{x}}_i}_{\vec{p}_i} \cdot \delta \vec{x}_i = \sum_{\alpha=1}^f p_\alpha \delta q^\alpha \equiv \langle p, \delta q \rangle,$$

also

$$p_\alpha = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha}, \quad (5.14)$$

letzteres wegen (5.10). Durch (5.8) oder (5.9) ist $p_\alpha = p_\alpha(q, \dot{q}, t)$.

Variation einer Bahn



Die Kurve $q(t)$ wird eingebettet in eine beliebige, 1-parametrische Schar von Kurven $q(t, \lambda)$, derart, dass $q(t, 0) = q(t)$. Die **Variation** einer Funktion $F(q, \dot{q}, t)$ ist erklärt als

$$\delta F(t) = \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} F(q(t, \lambda), \dot{q}(t, \lambda), t) \right|_{\lambda=0}, \quad (5.15)$$

wobei $\cdot = \partial/\partial t$. Wir benötigen die folgenden Variationen:

$$\delta q^\alpha(t) = \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} q^\alpha(t, \lambda) \right|_{\lambda=0} :$$

dies sind f frei wählbare Funktionen von t (auf dem Definitionsbereich von $q(t)$): Zu jeder Wahl gibt es nämlich eine passende Schar $q(t, \lambda)$, z.B.

$$q^\alpha(t, \lambda) = q^\alpha(t) + \lambda \delta q^\alpha(t).$$

Weiter ist

$$\delta \dot{q}^\alpha(t) = \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \dot{q}^\alpha(t, \lambda) \right|_{\lambda=0} = \frac{d}{dt} \delta q^\alpha(t) .$$

Die Variationen $\delta \vec{x}_i(t)$ sind gerade die den $\delta q^\alpha(t)$ entsprechenden virtuellen Verschiebungen (5.11).

2. Die Bewegungsgleichungen

Sei $q(t)$ eine **mechanische Bahn**, d.h. $x(q(t), t)$ eine Lösung der Bewegungsgleichungen

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_i . \quad (5.16)$$

Dann gilt für jede Variation der Bahn

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle p, \delta q \rangle &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{x}}_i \cdot \delta \vec{x}_i = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{x}}_i \cdot \delta \dot{\vec{x}}_i + \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{x}}_i \cdot \delta \vec{x}_i \\ &= \delta \left(\frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{x}}_i^2 \right) + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{x}_i , \end{aligned}$$

d.h.

$$\frac{d}{dt} \langle p, \delta q \rangle = \delta T + \delta A \quad (5.17)$$

ist die **Bewegungsgleichung** (5.16) in einer koordinatenfreien Form. In beliebigen Lagekoordinaten lautet (5.17)

$$\sum_{\alpha=1}^f (\dot{p}_\alpha \delta q^\alpha + \underline{\underline{p_\alpha \delta \dot{q}^\alpha}}) = \sum_{\alpha=1}^f \left(\frac{\partial T}{\partial q^\alpha} \delta q^\alpha + \underline{\underline{\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} \delta \dot{q}^\alpha}} + Q_\alpha \delta q^\alpha \right)$$

mit Kürzung der unterstrichenen Terme wegen (5.14). Da für festes t die Grössen $\delta q^\alpha(t)$ beliebig wählbar sind, folgt durch Koeffizientenvergleich

$$\dot{p}_\alpha = \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} + Q_\alpha ,$$

d.h.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} = Q_\alpha , \quad (\alpha = 1, \dots, f) . \quad (5.18)$$

Dies sind die **Bewegungsgleichungen in beliebigen Lagekoordinaten** $q^1, \dots, q^f : f$ Differentialgleichungen 2. Ordnung für die Funktionen $q^\alpha(t)$ bei gegebenen verallgemeinerten Kräften $Q_\alpha = Q_\alpha(q, \dot{q}, t)$. Die mechanische Bahn ist dann bestimmt durch Angabe der Anfangsbedingungen $q^1(0), \dots, q^f(0), \dot{q}^1(0), \dots, \dot{q}^f(0)$. Die Gl. (5.18) können nämlich nach den zweiten Ableitungen $\ddot{q}^\alpha(t)$ eindeutig aufgelöst werden: Sie kommen nur vor im Ausdruck

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} = \sum_{\beta=1}^f \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}^\alpha \partial \dot{q}^\beta} \ddot{q}^\beta + \text{Funktion von } q, \dot{q}, t$$

und die Matrix (vgl. (5.10))

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}^\alpha \partial \dot{q}^\beta} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q^\beta}$$

ist invertierbar, da positiv definit:

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^f \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}^\alpha \partial \dot{q}^\beta} \delta q^\alpha \delta q^\beta = \sum_{i=1}^N m_i (\delta \vec{x}_i)^2 \geq 0$$

und = 0 nur für $\delta x = 0$, wegen (5.11, 5.6) also für $\delta q = 0$.

Bemerkung. Die Gl. (5.18) können auch ohne den Begriff der virtuellen Verschiebung hergeleitet werden. Nach (5.9, 5.10) ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha} &= \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{x}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q^\alpha} + \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{x}}_i \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q^\alpha}, \\ \frac{\partial T}{\partial q^\alpha} &= \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{x}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial q^\alpha}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial \dot{\vec{x}}_i}{\partial q^\alpha} \end{aligned}$$

und zusammen mit (5.16, 5.13) folgt (5.18).

3. Lagrangesche Systeme

Falls die treibenden Kräfte ein Potential $V(x, t)$ besitzen, dann ist δA die Variation von $V(q, t) \equiv V(x(q, t), t)$:

$$\delta A = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial \vec{x}_i} \cdot \delta \vec{x}_i = - \sum_{\alpha=1}^f \frac{\partial V}{\partial q^\alpha} \delta q^\alpha,$$

also

$$Q_\alpha = - \frac{\partial V}{\partial q^\alpha} :$$

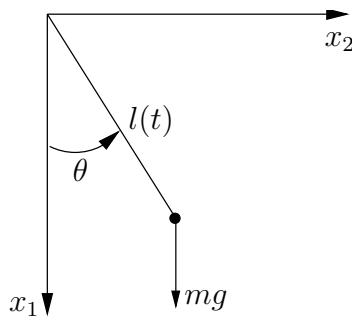
$V(q, t)$ ist das **Potential** der verallgemeinerten Kräfte. Mit der **Lagrangefunktion**

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - V(q, t) \tag{5.19}$$

ergeben sich dann aus (5.18) die **Euler-Lagrange Gleichungen**

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0, \quad (\alpha = 1, \dots, f). \tag{5.20}$$

Beispiel 1 (vgl. p. 35).



Ebenes Pendel mit festem Aufhängepunkt und vorge-schriebener, zeitabhängiger Länge $l(t)$. Die Lagekoordi-nate sei θ . Aus

$$\begin{aligned}\vec{x} &= l(\cos \theta, \sin \theta) \\ \dot{\vec{x}} &= \dot{l}(\cos \theta, \sin \theta) + l\dot{\theta}(-\sin \theta, \cos \theta)\end{aligned}$$

berechnet man

$$T = \frac{m}{2}(\dot{l}^2 + (l\dot{\theta})^2), \quad V = -mgx_1 = -mgl \cos \theta$$

und daraus

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta.$$

Damit lautet (5.20)

$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\theta}) + mgl(t) \sin \theta = 0.$$

Beispiel 2 (vgl. p. 38). Die Koordinaten und die Geschwindigkeiten der Masse m sind

$$\vec{x} = (x + l \sin \theta, l \cos \theta), \quad \dot{\vec{x}} = (\dot{x} + l\dot{\theta} \cos \theta, -l\dot{\theta} \sin \theta).$$

Damit ist

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta), \quad V = mgl \cos \theta - ux,$$

also

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= (M + m)\dot{x} + ml\dot{\theta} \cos \theta, & \frac{\partial L}{\partial x} &= u, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= m(l^2\dot{\theta} + l\dot{x} \cos \theta), & \frac{\partial L}{\partial \theta} &= ml \sin \theta(g - \dot{x}\dot{\theta})\end{aligned}$$

und die Gl. (5.20) lauten

$$\begin{aligned}(M + m)\ddot{x} + ml(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) &= u, \\ l\ddot{\theta} + \ddot{x} \cos \theta - \dot{x}\dot{\theta} \sin \theta &= \sin \theta(g - \dot{x}\dot{\theta}).\end{aligned}$$

Diese Beispiele illustrieren die Schritte bei der Aufstellung der Bewegungsgleichung eines Systems mit Zwangsbedingungen:

- Schreibe $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{x}}_i^2$, $V = V(x)$ in kartesischen Komponenten, ohne Berücksichtigung der Zwangsbedingungen.
- Drücke die durch die Zwangsbedingungen zulässigen Konfigurationen $x = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$ durch unabhängige Lagekoordinaten $q = (q^1, \dots, q^f)$ aus, $x = x(q, t)$, und berechne $\dot{x} = \dot{x}(q, \dot{q}, t)$.
- Setze x, \dot{x} in $L = T - V$ ein.
- Stelle die Gleichungen (5.20) auf.

Allgemeiner als (5.19) heisst ein System, dessen Bewegungsgleichung durch (5.20) für eine Lagrange-Funktion $L(q, \dot{q}, t)$ gegeben ist, ein **Lagrangesches System**. Äquivalent zu (5.20) ist dann

$$\frac{d}{dt} \langle p, \delta q \rangle = \delta L \quad (5.21)$$

für jede beliebige Variation δq der mechanischen Bahn, wobei die verallgemeinerten Impulse nun durch

$$p_\alpha := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \quad (5.22)$$

definiert sind.

Beispiel 3. Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld.

Aus den homogenen Maxwell Gleichungen

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

folgt, dass sich das magnetische und elektrische Feld ($\vec{B}(\vec{x}, t)$ und $\vec{E}(\vec{x}, t)$) durch elektromagnetische Potentiale φ, \vec{A} darstellen lassen:

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}, \quad \vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (5.23)$$

Die Bewegung des Teilchens (in kartesischen Koordinaten $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$) ist bestimmt durch die Lagrangefunktion

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 - e [\varphi(\vec{x}, t) - \frac{\dot{\vec{x}}}{c} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t)], \quad (5.24)$$

wobei m, e die Masse und die Ladung des Teilchens sind. In der Tat ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_k} &= -e \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + \frac{e}{c} \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \frac{\partial A_i}{\partial x_k}, & \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} &= m \dot{x}_k + \frac{e}{c} A_k, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} &= m \ddot{x}_k + \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_k}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_k}{\partial x_i} \cdot \dot{x}_i \right), \end{aligned}$$

so dass (5.20) lautet

$$m \ddot{x}_k = e \underbrace{\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_k}{\partial t} \right)}_{E_k} + \frac{e}{c} \underbrace{\sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_i} \right)}_{(\dot{\vec{x}} \wedge \vec{B})_k},$$

was mit (1.11) übereinstimmt. Beachte, dass der verallgemeinerte Impuls $\vec{p} = m \dot{\vec{x}} + (e/c) \vec{A}$ nicht mit dem (kinematischen) Impuls der Newtonschen Mechanik übereinstimmt.

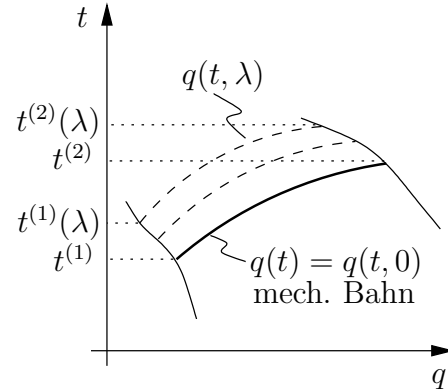
4. Das Hamiltonsche Prinzip der "kleinsten" Wirkung

Wir definieren die **Wirkung** einer Bewegung $q(t)$, ($t^{(1)} \leq t \leq t^{(2)}$) als

$$S[q] = \int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt, \quad (5.25)$$

und berechnen deren Variation um eine mechanische Bahn herum. Dabei werden auch die Endpunkte variiert, d.h. die Endpunkte $q(t^{(i)}(\lambda), \lambda)$ der Vergleichsbahnen $q(t, \lambda)$ sind ebenfalls Funktionen des Variationsparameters λ . Die Variation der Endpunkte ist

$$\begin{aligned} \Delta t^{(i)} &:= \left. \frac{dt^{(i)}}{d\lambda} \right|_{\lambda=0}, \\ \Delta q^{(i)} &:= \left. \frac{d}{d\lambda} q(t^{(i)}(\lambda), \lambda) \right|_{\lambda=0} = \delta q^{(i)} + \dot{q} \Delta t^{(i)}. \end{aligned}$$



Damit ergibt sich aus (5.21)

$$\begin{aligned} \delta \int_{(1)}^{(2)} L dt &= \left. \frac{d}{d\lambda} \int_{t^{(1)}(\lambda)}^{t^{(2)}(\lambda)} L(q(t, \lambda), \dot{q}(t, \lambda), t) dt \right|_{\lambda=0} = \int_{(1)}^{(2)} \delta L dt + L \Delta t^{(i)} \Big|_{(1)}^{(2)} \\ &= \left(\langle p, \delta q \rangle + L \Delta t \right) \Big|_{(1)}^{(2)}, \end{aligned}$$

d.h. die allgemeine Variationsformel lautet:

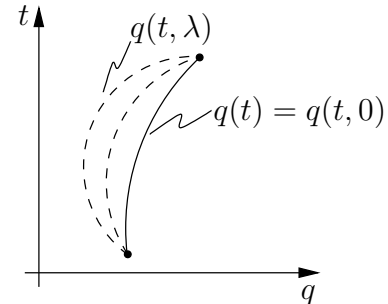
$$\delta \int_{(1)}^{(2)} L dt = \left(\sum_{\alpha} p_{\alpha} \Delta q^{\alpha} - \left(\sum_{\alpha} p_{\alpha} \dot{q}^{\alpha} - L \right) \Delta t \right) \Big|_{(1)}^{(2)} \quad (5.26)$$

für jede Variation einer mechanischen Bahn. Insbesondere gilt

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} L dt = 0 \quad (5.27)$$

für beliebige Variationen mit **festen Endpunkten**.

Dies ist das **Hamiltonsche Prinzip**: Die Wirkung der mechanischen Bahn $q(t)$ ist stationär (nicht notwendigerweise minimal) bzgl. einer beliebigen Schar $q(t, \lambda)$ von Variationsbahnen. Aus ihm ergeben sich umgekehrt wieder die Euler-Lagrange Gl. (5.20)



$$\begin{aligned} 0 &= \delta \int_{(1)}^{(2)} L dt = \int_{(1)}^{(2)} \delta L dt = \int_{(1)}^{(2)} \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial L}{\partial q^{\alpha}} \delta q^{\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\alpha}} \delta \dot{q}^{\alpha} \right) dt \\ &= \sum_{\alpha} p_{\alpha} \delta q^{\alpha} \Big|_{(1)}^{(2)} - \int_{(1)}^{(2)} \sum_{\alpha} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial q^{\alpha}} \right) \delta q^{\alpha} dt \end{aligned}$$

(partielle Integration). Bei festen Endpunkten ist $\delta q^\alpha(t) = 0$ für $t = t^{(1)}, t^{(2)}$, sonst aber frei wählbar; deshalb folgt (5.20): Das Hamiltonsche Prinzip ist äquivalent zu den Euler-Lagrange Gleichungen.

Äquivalente Lagrange-Funktionen

Zwei Lagrange-Funktionen L_1 und L_2 , die sich nur um die totale zeitliche Ableitung einer Funktion $F(q, t)$ unterscheiden, d.h.

$$L_1 - L_2 = \frac{d}{dt}F(q, t) \equiv \sum_{\alpha} \frac{\partial F}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha + \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (5.28)$$

beschreiben **dieselbe Dynamik**: Dies folgt aus dem Hamiltonschen Prinzip (5.26): Bei festen Endpunkten ist

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} \frac{d}{dt}F(q, t)dt = \delta F(q, t) \Big|_{(1)}^{(2)} = 0;$$

oder auch aus (5.20) nach kurzer Rechnung.

Beispiel 3 (Fortsetzung). Ändert man die Potentiale (φ, A) durch eine **Eichtransformation**

$$\varphi \rightarrow \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A} + \nabla \chi \quad (5.29)$$

mit einer beliebigen skalaren Funktion $\chi(\vec{x}, t)$, so ändert sich das elektromagnetische Feld (5.23) nicht, und damit auch nicht die Bewegungsgleichung (1.11). In der Tat geht L (s. (5.24)) unter (5.29) in die äquivalente Lagrange-Funktion

$$L + \frac{e}{c} \left(\frac{\partial \chi}{\partial t} + \dot{x} \cdot \nabla \chi \right) = L + \frac{e}{c} \frac{d\chi}{dt}$$

über.

5. Symmetrien und Erhaltungssätze

Der Einfachheit halber sei der Konfigurationsraum \mathbb{R}^f . Eine Schar ϕ^λ , ($\lambda \in \mathbb{R}$), von Abbildungen des Konfigurationsraums auf sich ist ein **Fluss**, falls sie die Gruppeneigenschaft

$$\phi^0 = \text{id}, \quad \phi^\lambda \circ \phi^\mu = \phi^{\lambda+\mu} \quad (5.30)$$

hat. Jeder Fluss hat ein **erzeugendes Vektorfeld** $v(q)$ auf \mathbb{R}^f , definiert durch

$$v(q) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \phi^\lambda(q) \Big|_{\lambda=0}, \quad (5.31)$$

d.h. in Komponenten: Wenn

$$[\phi^\lambda(q)]^\alpha =: \varphi^\alpha(\lambda; q^1, \dots, q^f),$$

so ist

$$v^\alpha(q^1, \dots, q^f) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi^\alpha(\lambda; q^1, \dots, q^f) \Big|_{\lambda=0}.$$

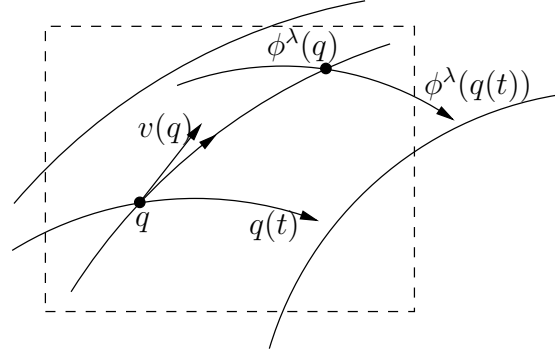
Aus (5.31) folgt für alle $(\lambda; q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^f$:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \phi^\lambda(q) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \phi^{\lambda+\varepsilon}(q) \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \phi^\varepsilon(\phi^\lambda(q)) \Big|_{\varepsilon=0} = v(\phi^\lambda(q)) .$$

Die Funktion $q(\lambda) = \phi^\lambda(q)$ ist also Lösung der Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\frac{dq}{d\lambda} = v(q(\lambda)) \text{ zu } q(0) = q . \quad (5.32)$$

Damit bestimmt umgekehrt das Vektorfeld den Fluss, vorausgesetzt, dass (5.32) für jeden Anfangswert q eine globale Lösung $q(\lambda)$ besitzt. Der Begriff des Flusses überträgt sich auf einen allgemeinen Konfigurationsraum: In einer Karte ist jeweils nur ein Ausschnitt des Flusses ϕ^λ darstellbar; im Allgemeinen benötigt man mehrere Karten (einen Atlas), um den ganzen Konfigurationsraum zu überdecken.



Eine Kurve $q(t)$ wird durch ϕ^λ abgebildet in $\phi^\lambda(q(t))$. Der Fluss ϕ^λ heisst eine **kontinuierliche Symmetrie** einer Lagrange-Funktion $L(q, \dot{q}, t)$, falls

$$L(\phi^\lambda(q(t)), \frac{\partial}{\partial t} \phi^\lambda(q(t)), t) = L(q(t), \dot{q}(t), t) \quad (5.33)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und für jede Kurve $t \mapsto q(t) \in \mathbb{R}^f$.

Satz von Noether. Ist der Fluss ϕ^λ eine kontinuierliche Symmetrie für L , so ist

$$\langle p, v(q) \rangle \equiv \sum_{\alpha=1}^f p_\alpha v^\alpha(q) \quad (5.34)$$

erhalten, d.h. $d\langle p, v(q) \rangle / dt = 0$.

Damit gehört zu jeder kontinuierlichen Symmetrie ein Erhaltungssatz!

Beweis. Für die Variationsschar $q(t, \lambda) = \phi^\lambda(q(t))$ um eine beliebige mechanische Bahn $q(t)$ ist

$$\delta q(t) = \frac{\partial}{\partial \lambda} q(t, \lambda) \Big|_{\lambda=0} = v(q(t))$$

und, nach (5.33), $\delta L = 0$. Also folgt (5.34) aus der Bewegungsgleichung (5.21). \square

Beispiel (zyklische Variable). Die Lagrange-Funktion L hänge **nicht** von einer bestimmten Koordinate q^α ab (jedoch von \dot{q}^α): $\partial L / \partial q^\alpha = 0$. Dann ist nach (5.20)

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}$$

erhalten. Dies entspricht (5.34) mit dem Fluss

$$\varphi^\beta(\lambda; q) = q^\beta + \lambda \delta^{\alpha\beta}, \quad v^\beta(q) = \delta^{\alpha\beta},$$

der eine Symmetrie für L ist. Im Beispiel 2 mit $u = 0$ ist x eine zyklische Variable.

Energie-Erhaltung

Für die Variation $q(t, \lambda) := q(t + \lambda)$ einer mechanischen Bahn $q(t)$ ist $\delta q(t) = \dot{q}(t)$ und (5.21) lautet

$$\frac{d}{dt} \langle p, \dot{q} \rangle = \delta L = \frac{d}{dt} L - \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Falls also L nicht explizit von t abhängt, d.h. $L = L(q, \dot{q})$, so ist die **Energie**

$$E = \langle p, \dot{q} \rangle - L \tag{5.35}$$

erhalten: Energieerhaltungssatz für **autonome** Lagrange-Systeme.

Beispiel 3 (Fortsetzung). Geladenes Teilchen in einem **statischen** Feld

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\nabla\varphi(\vec{x}), \quad \vec{B}(\vec{x}) = \text{rot } \vec{A}(\vec{x}).$$

Dann ist nach (5.22, 5.24)

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = m\dot{\vec{x}} + \frac{e}{c} \vec{A},$$

also

$$\vec{p} \cdot \dot{\vec{x}} - L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 + e\varphi(\vec{x})$$

erhalten.

Beispiel. Systeme vom Typ $L = T - V$ mit

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^f g_{\alpha\beta}(q) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta, & (g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}), \\ V &= V(q), \end{aligned} \tag{5.36}$$

wie sie typischerweise resultieren, wenn die Zwangsbedingungen (5.5) nicht von der Zeit t abhängen, vgl. (5.8, 5.9). Hier ist

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} = \sum_{\beta=1}^f g_{\alpha\beta} \dot{q}^\beta,$$

also

$$\sum_{\alpha=1}^f p_\alpha \dot{q}^\alpha - L = T + V \tag{5.37}$$

erhalten.

Der Satz von Noether lässt sich in zweierlei Hinsicht verallgemeinern:

i) Die Lagrange-Funktion ist nicht notwendigerweise invariant unter ϕ^λ , vgl. (5.33), sondern geht in eine äquivalente Lagrange-Funktion über, vgl. (5.28).

ii) Der Fluss wirkt auf dem **erweiterten Konfigurationsraum** $\mathbb{R}^f \times \mathbb{R} \ni (q, t)$:

$$(q, t) \mapsto \psi^\lambda(q, t) = (\phi^\lambda(q, t), \tau^\lambda(q, t)) \quad (5.38)$$

mit Vektorfeld $(v(q, t), \delta\tau(q, t))$: Die Zeit t wird mittransformiert. Die Kurve $q(t)$, ($t_1 \leq t \leq t_2$) wird dann abgebildet nach $q^\lambda(\cdot)$ gemäss

$$q^\lambda(\tau^\lambda(q(t), t)) = \phi^\lambda(q(t), t) . \quad (5.39)$$

Damit ist

$$\delta q + \dot{q}\delta\tau = v(q) . \quad (5.40)$$

Wir nehmen an, dass

$$L(q^\lambda(\tau), \frac{d}{d\tau}q^\lambda(\tau), \tau) \Big|_{\tau=\tau^\lambda(q(t), t)} \cdot \frac{d\tau^\lambda}{dt} = L(q(t), \frac{dq}{dt}, t) + \frac{d}{dt}F(q(t), t, \lambda) \quad (5.41)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und jede Kurve $q(\cdot)$. Motiviert ist dies dadurch, dass dann (wegen $(d\tau^\lambda/dt)dt = d\tau$)

$$\begin{aligned} S[q^\lambda] &= \int_{\tau^\lambda(t_1)}^{\tau^\lambda(t_2)} d\tau L(q^\lambda(\tau), \frac{d}{d\tau}q^\lambda(\tau), \tau) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(L(q(t), \frac{d}{dt}q(t), t) + \frac{d}{dt}F(q(t), t, \lambda) \right) = S[q] + F(q, t, \lambda) \Big|_{(1)}^{(2)} \end{aligned}$$

gilt. Insbesondere werden unter (5.39) stationäre Punkte der Wirkung (d.h. mechanische Bahnen) in solche übergeführt. Die Variation δL ergibt sich aus (5.41):

$$\delta L + \frac{dL}{dt} \cdot \delta\tau + L \frac{d}{dt}\delta\tau = \frac{d}{dt}\delta F$$

mit $\delta F(q, t) = \partial F(q, t, \lambda)/\partial\lambda|_{\lambda=0}$, d.h.

$$\delta L = \frac{d}{dt}(\delta F - L\delta\tau) . \quad (5.42)$$

Damit folgt aus (5.21, 5.40, 5.42):

Satz. Gilt (5.41), so ist

$$\langle p, v(q) \rangle - (\langle p, \dot{q} \rangle - L)\delta\tau - \delta F \quad (5.43)$$

erhalten.

Beispiel. Ein autonomes System, $L = L(q, \dot{q})$, erfüllt (5.41) (mit $F \equiv 0$) für die Zeittranslation $\phi^\lambda = \text{id}$, $\tau^\lambda(t) = t + \lambda$. Die erhaltene Grösse (5.43) ist (bis auf das Vorzeichen) die Energie (5.35).

6. Die 10 klassischen Erhaltungssätze

Die Lagrange-Funktion eines abgeschlossenen Systems vom Typ (1.13, 1.18, 1.19) ist nach (5.19)

$$L(\underbrace{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N}_{=x}; \dot{\vec{x}}_1, \dots, \dot{\vec{x}}_N) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{x}}_i^2 - V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) \equiv T - V \quad (5.44)$$

mit

$$V(R\vec{x}_1 + \vec{a}, \dots, R\vec{x}_N + \vec{a}) = V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N), \quad (R \in \text{SO}(3), \vec{a} \in \mathbb{R}^3), \quad (5.45)$$

Seine 10 Erhaltungsgrößen (1.23) entsprechen den 10 kontinuierlichen Parametern der Galilei-Gruppe (1.5) unter dem Satz von Noether (5.43). Die **Impulse** sind $\partial L / \partial \dot{\vec{x}}_i = m_i \dot{\vec{x}}_i$.

i) **Zeittranslationen:** s. vorangehendes Beispiel und (5.37): Die erhaltene Größe ist die **Energie** $T + V$;

ii) **räumliche Translationen:** L erfüllt (5.33) mit $\phi^\lambda(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = (\vec{x}_1 + \lambda \vec{b}, \dots, \vec{x}_N + \lambda \vec{b})$, dessen erzeugendes Vektorfeld $v(x) = (\vec{b}, \dots, \vec{b})$ ist. Erhalten ist nach (5.34)

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{x}}_i \cdot \vec{b} \equiv \vec{P} \cdot \vec{b},$$

d.h. der **Gesamtimpuls** \vec{P} , da \vec{b} beliebig ist.

iii) **Drehungen:** L erfüllt (5.33) mit $\phi^\lambda(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = (R(\vec{e}, \lambda)\vec{x}_1, \dots, R(\vec{e}, \lambda)\vec{x}_N)$, wo $R(\vec{e}, \lambda)$ die Drehung vom Winkel λ um \vec{e} ist. Mit $v(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = (\vec{e} \wedge \vec{x}_1, \dots, \vec{e} \wedge \vec{x}_N)$ ist die Erhaltungsgröße

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{x}}_i \cdot (\vec{e} \wedge \vec{x}_i) = \vec{e} \cdot \sum_{i=1}^N \vec{x}_i \wedge m_i \dot{\vec{x}}_i \equiv \vec{e} \cdot \vec{L},$$

d.h. der **Gesamtdrehimpuls** \vec{L} .

iv) **spezielle Galilei-Transformationen** sind von der Form (5.38), und zwar

$$\phi^\lambda(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t) = (\vec{x}_1 + \lambda \vec{v}t, \dots, \vec{x}_N + \lambda \vec{v}t), \quad \tau^\lambda(t) = t$$

mit

$$v(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) = (\vec{v}t, \dots, \vec{v}t), \quad \delta\tau = 0.$$

Wegen

$$\begin{aligned} L(x^\lambda(t), \dot{x}^\lambda(t)) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{\vec{x}}_i + \lambda \vec{v})^2 - V(\vec{x}_1 + \lambda \vec{v}t, \dots, \vec{x}_N + \lambda \vec{v}t) \\ &= L(x(t), \dot{x}(t)) + \sum_{i=1}^N m_i \left(\lambda \dot{\vec{x}}_i \cdot \vec{v} + \frac{\lambda^2}{2} \vec{v}^2 \right), \end{aligned}$$

gilt (5.41) mit

$$F(x, t, \lambda) = \sum_{i=1}^N m_i \left(\lambda \vec{x}_i \cdot \vec{v} + \frac{\lambda^2}{2} \vec{v}^2 t \right),$$

$$\delta F(x, t) = \sum_{i=1}^N m_i \vec{x}_i \cdot \vec{v}.$$

Die Erhaltungsgrösse (5.43) ist das **Schwerpunktsintegral**

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{x}}_i \cdot \vec{v} t - \sum_{i=1}^N m_i \vec{x}_i \cdot \vec{v} = -(M \vec{X} - \vec{P} t) \cdot \vec{v}.$$

Umgekehrt (ohne Beweis) ist die allgemeinste Lagrange-Funktion $L(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, \dot{\vec{x}}_1, \dots, \dot{\vec{x}}_N, t)$, welche im Sinne von (5.41) die Symmetrien der Galilei-Gruppe besitzt, bis auf Äquivalenz durch (5.44, 5.45) gegeben.

7. Das Prinzip von Euler-Maupertuis

Wir betrachten Systeme vom Typ (5.36) mit positiv-definiter kinetischer Energie $T(q, \dot{q}) > 0$ für $\dot{q} \neq 0$. Im Konfigurationsraum definieren wir eine **Riemannsche Metrik** durch das Linienelement

$$ds^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha\beta}(q) dq^\alpha dq^\beta. \quad (5.46)$$

Das heisst: Für jede (differenzierbare) Kurve $\tau \mapsto q(\tau)$, (mit $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ ein beliebiger Kurvenparameter mit $dq/d\tau \neq 0$) ist das Längenquadrat des Tangentialvektors $dq/d\tau$ erklärt durch

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha\beta}(q(\tau)) \frac{dq^\alpha}{d\tau} \cdot \frac{dq^\beta}{d\tau} = T\left(q(\tau), \frac{dq}{d\tau}\right) = \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2.$$

Wählt man $ds/d\tau > 0$, so ist die **Bogenlänge** $s(\tau)$ eindeutig bestimmt bis auf eine additive Konstante, und die Länge der Kurve beträgt

$$s(\tau_2) - s(\tau_1) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{T\left(q(\tau), \frac{dq}{d\tau}\right)}.$$

Sie ist unabhängig von der Wahl der Lagekoordinaten q und des Kurvenparameters τ . Insbesondere kann man wegen $ds/d\tau > 0$ auch s als Kurvenparameter benutzen: Dann ist

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha\beta}(q(s)) \frac{dq^\alpha}{ds} \frac{dq^\beta}{ds} = 1.$$

Es sei nun $t \mapsto q(t)$ eine Lösung der Bewegungsgleichung mit der (festen) Energie E . Die geometrische Gestalt der Kurve, die **Bahnkurve**, ist durch eine beliebige Parametrisierung der Kurve gegeben, d.h. ohne Angabe ihres zeitlichen Ablaufs. Die **Bewegung** des Systems längs der Bahnkurve ist bestimmt durch

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = T(q, \dot{q}) = E - V(q) \geq 0 \quad (5.47)$$

bis auf die Wahl der Richtung (Vorzeichen von ds/dt) und einer Anfangslage. Die Bahnkurven zur Energie E sind charakterisiert durch das Variationsprinzip von **Euler-Maupertuis**:

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} \sqrt{E - V(q)} ds = 0 \quad (5.48)$$

für jede Variation der Bahnkurve bei festen Endpunkten $q^{(i)} = q(s_i), i = 1, 2$.

Beweis. Auf jeder Kurve der Variationschar legen wir die Bewegung fest durch (5.47), so dass

$$\sqrt{E - V} ds = \sqrt{T} \frac{ds}{dt} dt = T dt,$$

und durch die Anfangsbedingung $q = q^{(1)}$ für $t = 0$. Die "Ankunftszeit" $t^{(2)}$ hängt dann von der betrachteten Kurve der Schar ab. Aus der allgemeinen Variationsformel (5.26) ergibt sich

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} L dt = -E \Delta t \Big|_{(1)}^{(2)}$$

wegen $\Delta q^{(i)} = 0$ und $\langle p, \dot{q} \rangle - L = E$. Mit $\Delta t \Big|_{(1)}^{(2)} = \delta \int_{(1)}^{(2)} dt$ also

$$0 = \delta \int_{(1)}^{(2)} (L + E) dt = \delta \int_{(1)}^{(2)} 2T dt = \delta \int_{(1)}^{(2)} 2\sqrt{E - V} ds. \quad \square$$

Beispiel. $V(q) \equiv 0$. Dann lautet das Variationsprinzip (5.48)

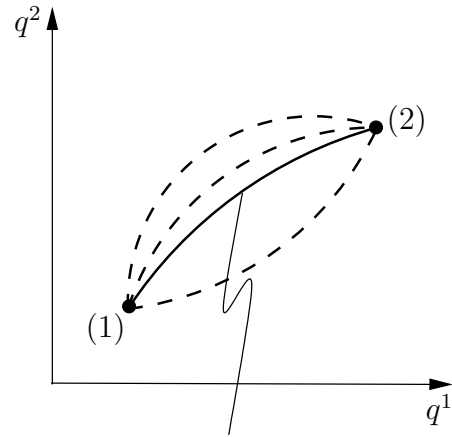
$$\delta \int_{(1)}^{(2)} ds = 0,$$

d.h. die Bahnkurven zu jeder Energie $E > 0$ sind **Geodäten** (in der Metrik (5.46)): Kurven extremaler Länge. Eine Illustration dazu liefert ein Massenpunkt, der reibungsfrei auf einer 2-dimensionalen Fläche im \mathbb{R}^3 gleitet. In diesem Fall ist

$$T = \frac{m}{2} \dot{x}^2 = \frac{m}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2,$$

wobei s die durch die euklidische Metrik des \mathbb{R}^3 definierte Bogenlänge der Bahnkurve bezeichnet. Alle Bahnkurven sind also Geodäten im euklidischen Sinn auf der Fläche, z.B. die Grosskreise auf der Kugel.

Bei der Herleitung der Differentialgleichung der Geodäten ist zu beachten, dass bei der Variation $q(s, \lambda)$ (λ Scharparameter) nicht die Bogenlänge s_i ($i = 1, 2$), sondern die Endpunkte $q^{(i)}$ festgehalten werden. Um eine formale Übereinstimmung mit dem Hamiltonschen Prinzip (5.27) zu erzielen, müssen wir statt s einen Kurvenparameter τ einführen,



Bahnkurve zur Energie E im Gebiet $E - V(q) > 0$.

dessen Grenzen τ_i fest sind:

$$\delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{ds}{d\tau} d\tau = \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} \underbrace{\sqrt{\frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}(q) q'^{\alpha} q'^{\beta}}}_{=: L(q, q')} d\tau = 0 \quad (5.49)$$

mit $' = d/d\tau$. Man darf bloss annehmen, dass $\tau = s$, und somit $L = 1$, auf der Geodäten ($\lambda = 0$). Die Differentialgleichung ist nun die Euler-Lagrange Gleichung für $L(q, q')$. Aus (5.49) folgt aber

$$\delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(L) d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} f'(L) \delta L d\tau = f'(1) \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} L d\tau = 0$$

für jede Funktion f . Insbesondere können wir mit $f(L) = L^2$ die Lagrange-Funktion ersetzen durch

$$L(q, q') = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}(q) q'^{\alpha} q'^{\beta} .$$

Also lautet die **Geodätengleichung** (mit $_{,\beta} = \partial/\partial q^{\beta}$):

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial q'^{\beta}} - \frac{\partial L}{\partial q^{\beta}} = \frac{d}{d\tau} \sum_{\alpha} g_{\alpha\beta} q'^{\alpha} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha\gamma} g_{\alpha\gamma,\beta} q'^{\alpha} q'^{\gamma} \\ &= \sum_{\alpha} g_{\alpha\beta} q''^{\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\gamma} (g_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\gamma\beta,\alpha} - g_{\alpha\gamma,\beta}) q'^{\alpha} q'^{\gamma} . \end{aligned} \quad (5.50)$$

Beispiel. Ein Massenpunkt im \mathbb{R}^3 mit

$$L = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x}) .$$

Dann ist

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} ds \sqrt{E - V(\vec{x})} = 0 , \quad (5.51)$$

wobei ds das euklidische Bogenelement bezeichnet. Dieses Variationsproblem ist analog zum **Fermatschen Prinzip**

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} ds n(\vec{x}) = 0 \quad (5.52)$$

(feste Endpunkte) für die Lichtstrahlen in einem optisch inhomogenen Medium mit dem **Brechungsindex** $n(\vec{x})$. Um das Integrationsintervall bei der Variation festhalten zu können, führen wir statt s wieder einen beliebigen Kurvenparameter τ ein. Dann lautet (5.52)

$$\delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \underbrace{n(\vec{x}) |\vec{x}'|}_{L(\vec{x}, \vec{x}')} = 0 , \quad \left(' = \frac{d}{d\tau} \right) .$$

Die Euler-Lagrange Gleichung dazu ist

$$\frac{d}{d\tau} \left(n(\vec{x}) \frac{\vec{x}'}{|\vec{x}'|} \right) - |\vec{x}'| \nabla n(\vec{x}) = 0 ,$$

oder, mit $\tau = s$, also $|\vec{x}'| = 1$,

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{x}}{ds} \right) - \nabla n = 0 \quad (5.53)$$

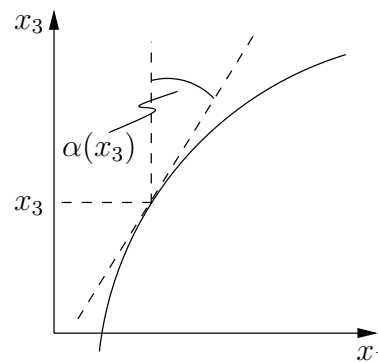
(**Strahlengleichung** der geometrischen Optik).

In einem geschichteten Medium, $n(\vec{x}) = n(x_3)$, sind x_1, x_2 zyklische Koordinaten. Erhalten sind

$$\frac{\partial L}{\partial x'_i} = n(x_3) x'_i, \quad (i = 1, 2),$$

d.h. der Strahl ist eben ($x'_2/x'_1 = \text{const}$, oEdA: $x'_2 = 0$) und

$$n(x_3) \sin \alpha(x_3) = \text{const} \quad (5.54)$$



(**Brechungsgesetz** von Snellius).

Also: Die Strahlen, bzw. Bahnkurven unterliegen demselben Variationsprinzip (5.51, 5.52) mittels der Identifikation

$$n(\vec{x}) \propto \sqrt{E - V(\vec{x})}.$$

Versuchte man aber, diese Analogie zwischen geometrischer Optik und Mechanik auf die Bewegung längs dieser Bahnkurven zu erweitern, so wäre die Lichtgeschwindigkeit proportional zu

$$v = \frac{p(\vec{x})}{m} \equiv \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(\vec{x}))} \propto n(\vec{x}),$$

wogegen die tatsächliche (Phasen-)Geschwindigkeit $c/n(\vec{x})$ beträgt: Dies spricht gegen eine reine Teilchennatur des Lichts. Für eine **Welle** (fester Frequenz ν) ist die Wellenlänge ortsabhängig

$$\lambda(x) = \frac{c}{\nu n(\vec{x})} \propto \frac{1}{p(\vec{x})}. \quad (5.55)$$

Dies legt nahe, dass der Mechanik eine Wellenmechanik zugrunde liegt nach dem Schema

$$\begin{array}{ccc} \text{geometrische Optik} & \longleftrightarrow & \text{Mechanik} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Wellenoptik} & \longleftrightarrow & \text{Wellenmechanik} \end{array} \quad (5.56)$$

In Anlehnung an (5.55) postulierte de Broglie (1923), dass einem Teilchen mit Impuls p eine Welle der Wellenlänge λ zugeordnet ist gemäss

$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad (h : \text{Plancksche Konstante}).$$

Darauf aufbauend entwickelte Schrödinger (1926) die Wellenmechanik, s. Kap. 8.

6 Der Kreisel

1. Drehimpuls und kinetische Energie

Gemäss (5.3) ist die Bewegung des Kreisels beschrieben durch

$$\vec{x} = R(t)\vec{y}, \quad t \mapsto R(t) \in \text{SO}(3),$$

wobei:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{x}: \text{ raumfeste} \\ \vec{y}: \text{ körperfeste} \end{array} \right\} \text{Koordinaten}$$

des selben Massenpunktes. Die x -Komponenten des **Drehimpulses** sind

$$\vec{L} = \int dm(\vec{x} \wedge \dot{\vec{x}}) = \int dm(R\vec{y} \wedge \dot{R}\vec{y}) \equiv R\vec{S}, \quad (6.1)$$

$$\vec{S} = \int dm(\vec{y} \wedge R^T \dot{R}\vec{y}) = \int dm \underbrace{(\vec{y} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{y}))}_{\vec{y}^2 \vec{\omega} - (\vec{y}, \vec{\omega})\vec{y}}. \quad (6.2)$$

Hier ist $\vec{\omega}$ wie auf p. 7 definiert durch $R^T \dot{R}\vec{y} = \vec{\omega} \wedge \vec{y}$ und stellt die y -Komponenten der Winkelgeschwindigkeit dar; \vec{S} jene des Drehimpulses. Die durch (6.2) gegebene Abbildung $\Theta : \vec{\omega} \mapsto \vec{S}$ ist der **Trägheitstensor** des starren Körpers (bzgl. $\vec{y} = 0$). In Komponenten:

$$S_i = \sum_{k=1}^3 \theta_{ik} \omega_k, \quad \theta_{ik} = \int dm(\vec{y}^2 \delta_{ik} - y_i y_k).$$

Da die Massenverteilung im y -System fest ist, hängen die Komponenten θ_{ik} nicht von der Zeit ab. Wegen $\theta_{ik} = \theta_{ki}$ ist die Abbildung Θ symmetrisch: Θ besitzt orthonormierte Eigenvektoren \vec{e}_i (**Hauptträgheitsachsen**) mit

$$\Theta \vec{e}_i = \theta_i \vec{e}_i, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Für die **kinetische Energie** findet man

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int dm(\dot{R}\vec{y}, \dot{R}\vec{y}) = \frac{1}{2} \int dm \underbrace{(\vec{\omega} \wedge \vec{y}, \vec{\omega} \wedge \vec{y})}_{(\vec{\omega}, \vec{y} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{y}))} \\ &= \frac{1}{2}(\vec{\omega}, \vec{S}) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^3 \theta_{ik} \omega_i \omega_k. \end{aligned}$$

Die zu Θ gehörende quadratische Form $2T \geq 0$ ist positiv-semidefinit, ja sogar **positiv-definit**, ausser für entartete Massenverteilungen dm , die auf einer Geraden durch $\vec{y} = 0$ konzentriert sind. Im Folgenden benützen wir stets ein Hauptachsensystem. Dann ist

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta_1 & & \\ & \theta_2 & \\ & & \theta_3 \end{pmatrix}, \quad S_i = \theta_i \omega_i, \quad T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \theta_i \omega_i^2 \quad (6.3)$$

mit **Hauptträgheitsmomenten** $\theta_i > 0$.

2. Der freie Kreisel

Die Bewegungsgleichung des Kreisels ist der Drehimpulssatz (1.21): $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$. Im Fall des freien Kreisels ist $\vec{M} = 0$: Er ist gegeben, falls keine treibenden Kräfte einwirken; oder bei Schwerkraft, falls der feste Punkt $\vec{y} = 0$ im Schwerpunkt liegt. Dann folgt nach (6.1)

$$0 = \dot{\vec{L}} = \dot{R}\vec{S} + R\dot{\vec{S}}, \quad \text{also } \dot{\vec{S}} = -R^T \dot{R}\vec{S} = -\vec{\omega} \wedge \vec{S}. \quad (6.4)$$

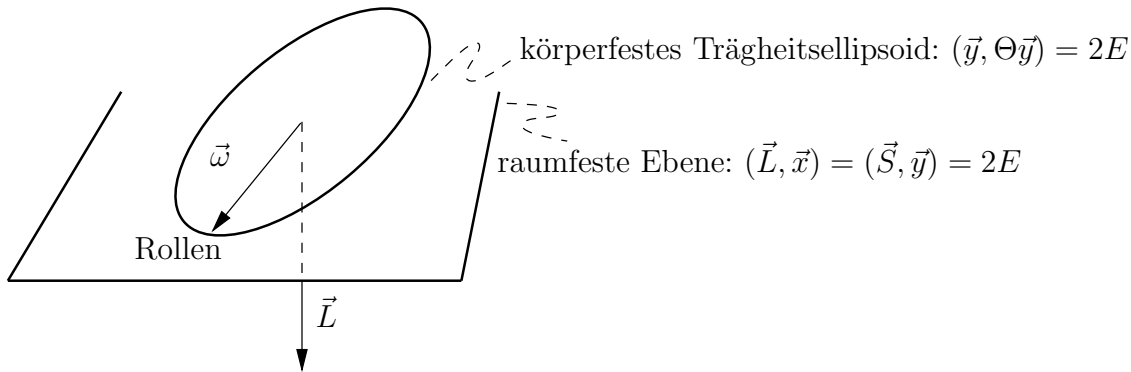
Mit (6.3) ergeben sich daraus die **Eulerschen Gleichungen**

$$\begin{aligned} \theta_1 \dot{\omega}_1 &= (\theta_2 - \theta_3) \omega_2 \omega_3, \\ \theta_2 \dot{\omega}_2 &= (\theta_3 - \theta_1) \omega_3 \omega_1, \\ \theta_3 \dot{\omega}_3 &= (\theta_1 - \theta_2) \omega_1 \omega_2 : \end{aligned} \quad (6.5)$$

Ein System nicht-linearer Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Lösungen durch elliptische Funktionen darstellbar sind (wir gehen nicht darauf ein). Durch $\vec{\omega}(t)$ ist dann auch $\Omega(t) = R^T \dot{R}$ gegeben, und zur Bestimmung von $R(t)$ verbleibt die lineare Differentialgleichung

$$\dot{R} = R\Omega(t).$$

Aus (6.4) folgt $\dot{T} = (\vec{\omega}, \dot{\vec{S}}) = 0$: Die Energie $T = E$ ist erhalten. Die Bewegungen des freien Kreisels zur Energie E kann man mit der **Konstruktion von Poincot** geometrisch darstellen:



Sei \vec{y} ein beliebiger Punkt der raumfesten Ebene. Mit $\vec{y} = \vec{\omega} + (\vec{y} - \vec{\omega})$ ist

$$(\vec{y}, \Theta\vec{y}) = \underbrace{(\vec{\omega}, \Theta\vec{\omega})}_{2E} + 2 \underbrace{(\vec{y} - \vec{\omega}, \Theta\vec{\omega})}_{\vec{S}} + \underbrace{(\vec{y} - \vec{\omega}, \Theta(\vec{y} - \vec{\omega}))}_{\geq 0}.$$

$2E - 2E = 0$

Somit ist $(\vec{y}, \Theta\vec{y}) \geq 2E$ und “=” nur für $\vec{y} = \vec{\omega}$: Die raumfeste Ebene ist die Tangentialebene am Trägheitsellipsoid im Punkt $\vec{\omega}$. Da $\vec{\omega}$ die instantane Drehachse ist, hat der Berührungspunkt des Ellipsoids die Geschwindigkeit Null, d.h. das Ellipsoid **rollt** auf der Ebene ab, ohne zu gleiten.

Analytisch behandeln wir nur Spezialfälle:

a) **Permanente Rotationen** um die Hauptachsen, z.B.

$$\vec{\omega} = (\omega_1^0, 0, 0), \quad \omega_1^0 = \text{konst.} \quad (6.6)$$

Wir untersuchen ihre Stabilität in linearer Näherung, $\vec{\omega} = (\omega_1^0 + \omega_1, \omega_2, \omega_3)$, indem wir in (6.6) nur lineare Terme in den kleinen Grössen $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ behalten:

$$\begin{aligned} \theta_1 \dot{\omega}_1 &= 0, \\ \theta_2 \dot{\omega}_2 &= (\theta_3 - \theta_1) \omega_3 \omega_1^0, \\ \theta_3 \dot{\omega}_3 &= (\theta_1 - \theta_2) \omega_1^0 \omega_2. \end{aligned}$$

Die erste Gl. besagt $\omega_1 = \text{konst.}$ und die beiden weiteren lauten in Matrixform

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\theta_3 - \theta_1}{\theta_2} \omega_1^0 \\ \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_3} \omega_1^0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}. \quad (6.7)$$

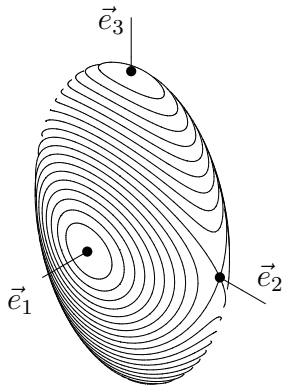
Die Eigenwerte $\pm\lambda$ der 2×2 -Matrix sind gegeben durch

$$\lambda^2 = \frac{(\theta_3 - \theta_1)(\theta_1 - \theta_2)}{\theta_2 \theta_3} (\omega_1^0)^2$$

und damit reell oder rein imaginär. Der erste Fall (mit $\lambda \neq 0$) tritt ein, falls θ_1 **zwischen** θ_2 und θ_3 liegt: Dann hat (6.7) exponentiell wachsende Lösungen, d.h. die Rotation (6.6) ist **instabil**. Anders gesagt: Von den drei Hauptachsen weisen nur zwei stabile permanente Rotationen auf, nämlich jene mit dem kleinsten und dem grössten Hauptträgheitsmoment.

Dasselbe Resultat folgt auch ausserhalb der linearen Näherung, und zwar geometrisch. Erhalten sind

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i \theta_i \omega_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i \frac{S_i^2}{\theta_i} \equiv E, \\ (\vec{L}, \vec{L}) &= (\vec{S}, \vec{S}) = \sum_i S_i^2 \equiv l^2; \end{aligned}$$



damit liegt \vec{S} stets auf dem Schnitt eines Ellipsoids (mit Halbachsen $\sqrt{2E\theta_i}$) mit einer Kugel vom Radius l :

Figur: Schar der Schnittkurven für $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$

Die Schnittkurven in der Nähe der Hauptachsen \vec{e}_1 und \vec{e}_3 sind kleine geschlossene Kurven, d.h. \vec{S} (und damit $\vec{\omega}$) bleibt in deren Nähe. Nicht so bei \vec{e}_2 .

b) Der **symmetrische freie Kreisel**: Der Kreisel heisst **symmetrisch**, wenn zwei seiner Hauptträgheitsmomente gleich sind, z.B. $\theta_1 = \theta_2$. Die Gl. (6.6) lauten:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= -\alpha \omega_2, \\ \dot{\omega}_2 &= \alpha \omega_1, \\ \dot{\omega}_3 &= 0. \end{aligned} \quad \left(\alpha = \frac{\theta_3 - \theta_1}{\theta_1} \omega_3 \right),$$

Also: ω_3 (und damit α) konstant und

$$\omega_1(t) + i\omega_2(t) = (\omega_1(0) + i\omega_2(0))e^{i\alpha t} \quad (6.8)$$

$\vec{\omega}$ dreht sich um die **Figurenachse** (hier \vec{e}_3) mit konstanter Winkelgeschwindigkeit α . Die Bewegung $R(t)$ wird sich als Spezialfall im nächsten Abschnitt ergeben.

Anwendung. Eulersche Theorie der Polschwankungen.

Der kinematische Nordpol (Richtung der instantanen Drehachse $\vec{\omega}$) der Erde rotiert um den geometrischen Nordpol (Figurenachse) mit der Periode

$$T = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2\pi}{\underbrace{\omega_3}_{=1\text{Tag}}} \frac{\theta_1}{\underbrace{\theta_3 - \theta_1}_{\cong 300}} \cong 300 \text{ Tage} .$$

Eine (allerdings unregelmässige) Bewegung dieser Art wird beobachtet mit $T \cong 430$ Tage und Amplitude $\cong 0.25$ Bogensekunden (entspricht $\sim 4\text{m}$ auf der Erdoberfläche). Die Diskrepanz wird verschiedenen Störungen zugeschrieben: Erde nicht starr, Bewegungen der Atmosphäre und der Meere.

3. Der schwere symmetrische Kreisel (Lagrange)

Der Kreisel sei symmetrisch mit $\theta_1 = \theta_2$. Der Schwerpunkt liege zudem auf der Figuren- achse (y_3 -Achse), d.h. er habe die körperfesten Koordinaten

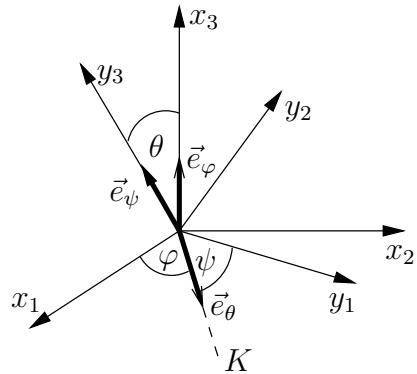
$$(0, 0, l) ; \quad \text{oEdA} : l > 0 .$$

Die x_3 -Achse zeige vertikal nach oben. Als Lagekoordinaten benützen wir die Eulerschen Winkel (φ, θ, ψ) s. p. 41. Diese beschreiben Drehungen

$$R = R_1(\varphi)R_2(\theta)R_3(\psi)$$

um die Achsen mit y -Komponenten $\vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\psi$. Verglichen mit den Komponenten $\vec{e}'_\varphi, \vec{e}'_\theta, \vec{e}'_\psi$ dieser Achsen in den Bezugssystemen, wo die jeweilige Rotation ausgeführt wird, ist

$$\vec{e}'_\varphi = R_2R_3\vec{e}_\varphi, \quad \vec{e}'_\theta = R_3\vec{e}_\theta, \quad \vec{e}'_\psi = \vec{e}_\psi .$$



Die Winkelgeschwindigkeiten addieren sich vektoriell, denn aus

$$R^T \dot{R} = (R_2R_3)^T (R_1^T \dot{R}_1) (R_2R_3) + R_3^T (R_2^T \dot{R}_2) R_3 + R_3^T \dot{R}_3$$

folgt mit $R_1^T \dot{R}_1 \vec{z} = \dot{\varphi} \vec{e}'_\varphi \wedge \vec{z}$ (und analog für θ, ψ)

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} (R_2R_3)^T \vec{e}'_\varphi + \dot{\theta} R_3^T \vec{e}'_\theta + \dot{\psi} \vec{e}'_\psi = \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{\psi} \vec{e}_\psi . \quad (6.9)$$

Berechnung der kinetischen Energie

$$T = \frac{\theta_1}{2} (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{\theta_3}{2} \omega_3^2 :$$

Aus der Figur ist ersichtlich, dass $(\vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta) = (\vec{e}_\psi, \vec{e}_\theta) = 0$, $(\vec{e}_\varphi, \vec{e}_\psi) = \cos \theta$. Damit ergibt sich aus (6.9)

$$\begin{aligned}\vec{\omega}^2 &= \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi} \cos \theta , \\ \omega_3 &= (\vec{e}_\psi, \vec{\omega}) = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta , \\ \omega_1^2 + \omega_2^2 &= \vec{\omega}^2 - \omega_3^2 = \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 ,\end{aligned}$$

und schliesslich die **Lagrange-Funktion**

$$\begin{aligned}L &= T - V \\ T &= \frac{\theta_1}{2}(\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{\theta_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 \\ V &= mgl \cos \theta .\end{aligned}$$

Erhaltungssätze

Da L nicht von t , φ , ψ abhängt, besitzt das System die 3 Erhaltungsgrössen

$$T + V = E , \quad (6.10)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi} \theta_1 \sin^2 \theta + (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \theta_3 \cos \theta = M_z , \quad (6.11)$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \theta_3 = M_3 , \quad (6.12)$$

deren konstante Werte mit E, M_z, M_3 bezeichnet sind. p_φ und p_ψ sind die Projektionen des Drehimpulses auf \vec{e}_φ (Vertikale), bzw. auf \vec{e}_ψ (Figurenachse):

$$p_\varphi = \vec{L} \cdot \vec{e}'_\varphi = \vec{S} \cdot \vec{e}_\varphi , \quad p_\psi = \vec{S} \cdot \vec{e}_\psi ,$$

denn: Die einer Variation $(\delta\varphi, 0, 0)$ der Eulerschen Winkel entsprechende virtuelle Verschiebung ist $\delta\vec{x} = (\vec{e}'_\varphi \wedge \vec{x})\delta\varphi$ und (5.14) lautet

$$p_\varphi \delta\varphi = \int dm \dot{\vec{x}} \cdot \delta\vec{x} = \int dm \dot{\vec{x}} \cdot (\vec{e}'_\varphi \wedge \vec{x})\delta\varphi = \vec{e}'_\varphi \cdot \int dm (\vec{x} \wedge \dot{\vec{x}})\delta\varphi = \vec{e}'_\varphi \cdot \vec{L}\delta\varphi ,$$

und analog für p_ψ . (Die Erhaltung von $T + V$ und p_φ gilt auch beim allgemeinen schweren Kreisel, die von p_ψ nur beim symmetrischen.)

Integration der Bewegungsgleichungen

Aus (6.11, 6.12) folgt

$$\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta = \frac{M_3}{\theta_3} , \quad \dot{\varphi} = \frac{M_z - M_3 \cos \theta}{\theta_1 \sin^2 \theta} . \quad (6.13)$$

Einsetzen in (6.10) liefert

$$E' \equiv E - \frac{M_3^2}{2\theta_3} = \frac{\theta_1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{(M_z - M_3 \cos \theta)^2}{2\theta_1 \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta . \quad (6.14)$$

Dies ist eine Differentialgleichung 1. Ordnung für die **Nutationsbewegung** $\theta(t)$. Für die Variable $u = \cos \theta$ lautet sie:

$$\dot{u}^2 = (\alpha - \beta u)(1 - u^2) - (a - bu)^2 \equiv f(u) \quad (6.15)$$

mit den Konstanten

$$\alpha = \frac{2E'}{\theta_1}, \quad \beta = \frac{2mgl}{\theta_1} > 0, \quad a = \frac{M_z}{\theta_1}, \quad b = \frac{M_3}{\theta_1}.$$

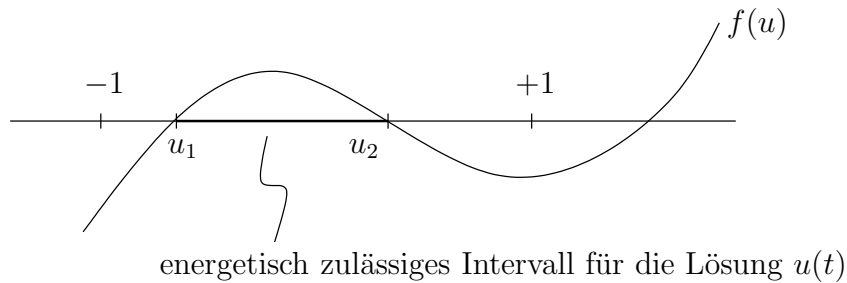
Wegen $\dot{u}^2 \geq 0$ ist die allgemeine Lösung beschränkt auf das Gebiet $f(u) \geq 0$ und lautet

$$t(u) - t(u_0) = \int_{u_0}^u \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}.$$

Die Funktion $f(u)$ ist ein Polynom 3. Grades mit den Eigenschaften:

- $f(\pm 1) = -(a \mp b)^2 \leq 0$
- $f(u) \sim \beta u^3$ für $u \rightarrow \pm\infty$ ($\beta > 0$)
- $f(u) \geq 0$ irgendwo im physikalischen Intervall $-1 \leq u \leq 1$ (wegen (6.15)).

Für $b \neq \pm a$ ergibt sich der allgemeine Verlauf:



In der Figur wird $u_1 < u_2$ angenommen. Damit sind u_1, u_2 Nullstellen erster Ordnung von $f(u)$, also Umkehrpunkte der Nutationsbewegung. Diese ist periodisch mit der Periode

$$T = 2 \int_{u_1}^{u_2} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}.$$

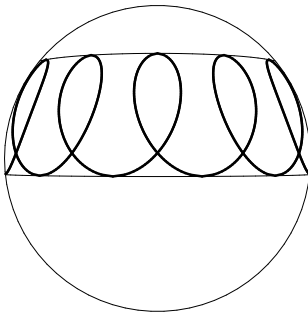
$\varphi(t)$ und $\psi(t)$ ergeben sich nun aus (6.13). Da

$$\dot{\varphi} = \frac{a - bu}{1 - u^2} \quad (6.16)$$

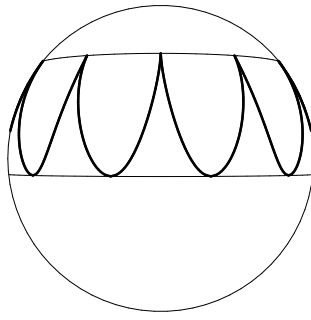
dieselbe Periode T hat, ist die **Präzession** $\varphi(t)$ (der Figurenachse um die Vertikale) die Summe einer linearen Funktion in t (mittlere Präzession) und einer periodischen Funktion der Periode T . Beachte, dass stets $u_0 \equiv a/b > u_1$: Sonst erhielte man für $u \in (u_1, u_2)$ den Widerspruch

$$0 \geq \frac{f(u_0)}{1 - u_0^2} = \alpha - \beta u_0 > \alpha - \beta u \geq \frac{f(u)}{1 - u^2}.$$

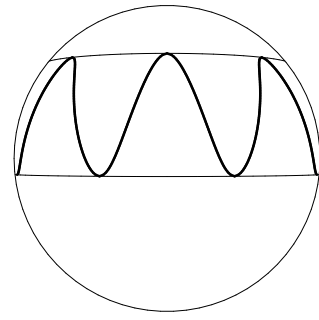
$\theta(t)$ und $\varphi(t)$ sind die sphärischen Winkel der Figurenachse: Ihre Bewegung lässt sich auf der Einheitskugel darstellen. Dabei ändert $\dot{\varphi}$ das Vorzeichen, falls $u_1 < a/b < u_2$.



$$u_1 < a/b < u_2$$



$$a/b = u_2$$



$$a/b > u_2$$

Grenzfälle:

- $u_1 = u_2 \equiv \bar{u}$: **reine Präzession**. Dann ist $\dot{\varphi}$ (s. (6.16)) konstant und \bar{u} auch eine Nullstelle von f' :

$$\beta(1 - \bar{u}^2) + (\alpha - \beta\bar{u})2\bar{u} - 2b(a - b\bar{u}) = 0,$$

zusammen mit $f(\bar{u}) = 0$ also

$$\frac{\beta}{2} = b \frac{a - b\bar{u}}{1 - \bar{u}^2} - \bar{u} \left(\frac{a - b\bar{u}}{1 - \bar{u}^2} \right)^2 = b\dot{\varphi} - \bar{u}\dot{\varphi}^2,$$

was für gegebene β , b , \bar{u} (bzw. l , ω_3 , \bar{u}) höchstens zwei Lösungen $\dot{\varphi}$ zulässt.

- $a = -b$: $f(-1) = 0$;
- $a = b$: $f(+1) = 0$.

Gilt beides, also $a = b = 0$, so ist $\dot{\varphi} = \dot{\psi} = 0$ (**Pendelung**).

Wir betrachten noch die Stabilität des **senkrecht stehenden Kreisels**, der um die $x_3 = y_3$ -Achse rotiert. Dann ist anfänglich $\theta = \dot{\theta} = 0$, also $M_3 = M_z \equiv M$, $E' = mgl$, d.h.

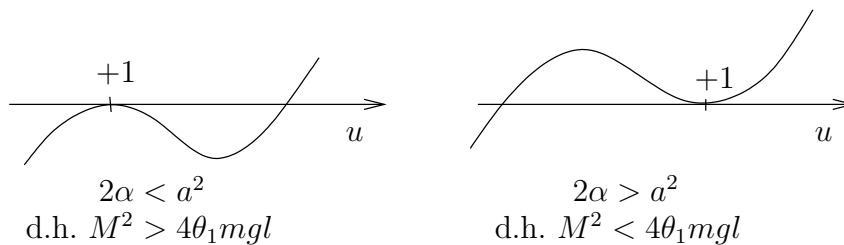
$$\alpha = \beta = \frac{2mgl}{\theta_1}, \quad a = b = \frac{M}{\theta_1}.$$

Dann hat

$$f(u) = (1 - u)^2[\alpha(1 + u) - a^2]$$

eine Nullstelle 2. Ordnung bei $u = 1$: eine Gleichgewichtslage für die Nutation. Je nach Vorzeichen von $[\dots]_{u=1} = 2\alpha - a^2$ ist der Verlauf von f folgender:

Im zweiten Fall ist die Gleichgewichtslösung instabil, da links von $u = 1$ ein energetisch erlaubtes Intervall anschliesst. Der senkrecht aufgesetzte Spielkreisel beginnt zu wackeln,



sobald M^2 durch Reibungsverluste unter die Stabilitätsgrenze $4\theta_1 mgl$ sinkt: “der **schlafende Kreisel** erwacht”.

Nochmals der **freie, symmetrische Kreisel**: Ist $l = 0$, so ist die Vertikale nicht mehr ausgezeichnet, und wir legen die x_3 -Achse um die Richtung des erhaltenen Drehimpulses $\vec{L} = (0, 0, M_z \equiv M)$. Dann ist

$$\begin{aligned} M_3 = M \cos \theta &\longrightarrow \theta = \text{konst.} \\ \dot{\varphi} = \frac{M}{\theta_1} &\longrightarrow \dot{\varphi} = \text{konst.} \\ \dot{\psi} = \left(\frac{1}{\theta_3} - \frac{1}{\theta_1} \right) M_3 &\longrightarrow \dot{\psi} = \text{konst.} \end{aligned}$$

Es gibt keine Nutation und die Figurenachse präzessiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um \vec{L} . Im körperfesten System ist \vec{e}_ψ fest und

$$(\omega_1, \omega_2, 0) = -\vec{e}_\psi \wedge (\vec{e}_\psi \wedge \vec{\omega}) = -\dot{\varphi} \vec{e}_\psi \wedge (\vec{e}_\psi \wedge \vec{e}_\varphi) = \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\psi \wedge \vec{e}_\theta . \quad (6.17)$$

Da $\vec{e}_\theta = (\cos \psi, -\sin \psi, 0)$, dreht sich (6.17) mit Winkelgeschwindigkeit $\alpha = -\dot{\psi} = \omega_3(\theta_1 - \theta_3)/\theta_1$, wie in (6.8).

7 Hamiltonsche Systeme

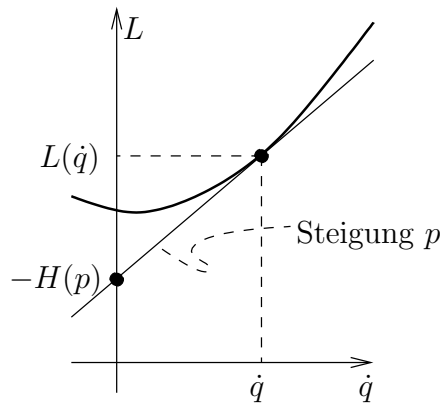
1. Die Hamiltonfunktion

Wir gehen aus von einem Lagrangeschen System, beschrieben in einer Karte des Konfigurationsraums durch Lagekoordinaten $q = (q^1, \dots, q^f)$ und durch eine Lagrange-Funktion $L(q, \dot{q}, t)$. Die entsprechenden Impulse $p = (p_1, \dots, p_f)$ sind wie in (5.22) definiert als

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \equiv p_\alpha(q, \dot{q}, t), \quad (\alpha = 1, \dots, f). \quad (7.1)$$

Die **Hamiltonfunktion** $H(q, p, t)$ geht aus $L(q, \dot{q}, t)$ durch eine Berührungs- (oder Legendre-) Transformation bei festem (q, t) hervor, bei der die Variable \dot{q} ersetzt wird durch p :

Geometrisch:



Analytisch:

Man löst (7.1) auf nach

$$\dot{q} = \dot{q}(q, p, t) \quad (7.2)$$

und setzt dies ein in

$$\sum_{\alpha} p_{\alpha} \dot{q}^{\alpha} - L(q, \dot{q}, t) =: H(q, p, t) \quad (7.3)$$

(vgl. (5.35)).

Das totale Differential von H ist

$$\begin{aligned} dH &= \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} dp_{\alpha} + \frac{\partial H}{\partial q^{\alpha}} dq^{\alpha} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt \\ &= \sum_{\alpha} \left(\dot{q}^{\alpha} dp_{\alpha} + p_{\alpha} d\dot{q}^{\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^{\alpha}} dq^{\alpha} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\alpha}} d\dot{q}^{\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \end{aligned}$$

durch Koeffizientenvergleich und mit (7.1), also

$$\frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} = \dot{q}^{\alpha}, \quad \frac{\partial H}{\partial q^{\alpha}} = -\frac{\partial L}{\partial q^{\alpha}}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

2. Die kanonischen Bewegungsgleichungen

Die Euler-Lagrange Gleichungen $\dot{p}_{\alpha} = \partial L / \partial q^{\alpha}$ sind äquivalent zu den Hamiltonschen (kanonischen) Bewegungsgleichungen

$$\dot{q}^{\alpha} = \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}}, \quad \dot{p}_{\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial q^{\alpha}}, \quad (\alpha = 1, \dots, f). \quad (7.4)$$

Dies sind $2f$ Differentialgleichungen erster Ordnung für die $2f$ unbekanntenen Funktionen $q^1(t), \dots, q^f(t), p_1(t), \dots, p_f(t)$.

Beispiele.

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad L &= \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x}), & \vec{p} &= m\dot{\vec{x}}, \\ H &= \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x}). \end{aligned} \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad L &= \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r), \\ p_r &= m\dot{r}, & p_\varphi &= mr^2 \dot{\varphi}, \\ H &= \frac{1}{2m} (p_r^2 + r^{-2} p_\varphi^2) + V(r). \end{aligned} \quad (7.6)$$

Oder allgemeiner

$$\begin{aligned} \text{iii)} \quad L &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha\beta}(q) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta - V(q), \\ p_\alpha &= \sum_{\beta} g_{\alpha\beta}(q) \dot{q}^\beta, \\ H &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} g^{\alpha\beta}(q) p_\alpha p_\beta + V(q), \end{aligned} \quad (7.7)$$

wo $(g^{\alpha\beta}(q))_{\alpha, \beta=1, \dots, f}$ die Inverse der Matrix $(g_{\alpha\beta}(q))_{\alpha, \beta=1, \dots, f}$ ist.

$$\begin{aligned} \text{iv)} \quad L &= \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 - e \left(\varphi(\vec{x}, t) - \frac{\dot{\vec{x}}}{c} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) \right), \\ \vec{p} &= m\dot{\vec{x}} + \frac{e}{c} \vec{A}, \\ H &= \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{x}, t) \right)^2 + e\varphi(\vec{x}, t). \end{aligned} \quad (7.8)$$

Bemerkung. Bei festen (q, t) ist die Gl. (7.1) lokal nach \dot{q} auflösbar, falls die Hessesche Matrix

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^\alpha \partial \dot{q}^\beta} \right)_{\alpha, \beta=1, \dots, f} \quad (7.9)$$

invertierbar ist. Dies ist auch die Bedingung (s. p. 46) unter welcher die Euler-Lagrange Gl. (5.20) nach \dot{q} aufgelöst werden kann. Ohne Beweis: Falls (7.9) sogar positiv-definit ist (gleichmässig bzgl. \dot{q}), so ist (7.1) sogar global und eindeutig nach \dot{q} auflösbar.

3. Kanonische Transformationen

Als **Phasenkoordinaten** des Systems bezeichnet man die $2f$ Variablen

$$x \equiv (x_1, \dots, x_{2f}) \equiv (q^1, p_1, \dots, q^f, p_f). \quad (7.10)$$

wie wir später sehen werden. Die Gruppe der kanonischen Transformationen ist jedoch wesentlich grösser: Dies ist der Vorzug der kanonischen Gleichungen. Z.B. ist die Transformation

$$\bar{q}^\alpha = p_\alpha, \quad \bar{p}_\alpha = -q^\alpha, \quad (\alpha = 1, \dots, f)$$

kanonisch.

Der Phasenraum

Unter Bezugnahme auf die Vorlesung ‘Differentialgeometrie’ sei hier die allgemeine Charakterisierung eines Phasenraums Γ gegeben: Γ ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit gerader Dimension $2f$ mit einer symplektischen Struktur, d.h. einer 2-Form

$$\varepsilon = \sum_{i < k} \varepsilon_{ik}(x) dx_i \wedge dx_k, \quad \varepsilon_{ik}(x) = -\varepsilon_{ki}(x),$$

welche nicht ausgeartet ($\det \varepsilon(x) \neq 0$, alle $x \in \Gamma$) und geschlossen ist:

$$d\varepsilon = 0, \quad \text{d.h.} \quad \frac{\partial}{\partial x_l} \varepsilon_{ik} + \text{zyklisch}(ikl) = 0.$$

Nach einem Satz von Darboux lassen sich in der Umgebung jedes Punktes in Γ Koordinaten x wählen, derart dass $\varepsilon_{ik}(x)$ in der ganzen Umgebung die Normalform (7.11) annimmt. Diese Karten bilden einen **kanonischen Atlas**: Die Koordinatentransformationen bei Kartenwechsel sind kanonisch. Die Benützung der Differentialformen vereinfacht die Rechnungen: x in (7.10) sind Normalkoordinaten, falls

$$\varepsilon = \sum_{\alpha} dp_{\alpha} \wedge dq^{\alpha},$$

und für die Transformation (7.15) folgt aus $\sum_{\alpha} \bar{p}_{\alpha} d\bar{q}^{\alpha} = \sum_{\beta} p_{\beta} dq^{\beta}$, dass $\sum_{\alpha} d\bar{p}_{\alpha} \wedge d\bar{q}^{\alpha} = \sum_{\beta} dp_{\beta} \wedge dq^{\beta}$, d.h. sie ist kanonisch. Ein allgemeines Hamiltonsches System ist gegeben durch einen Phasenraum Γ und durch eine Hamiltonfunktion H auf Γ . Seine Dynamik ist in jeder kanonischen Karte durch die kanonischen Gl. (7.11) gegeben.

4. Kanonische Flüsse

Seien $x = (x_1, \dots, x_{2f})$ Phasenkoordinaten auf dem Phasenraum $\Gamma = \mathbb{R}^{2f}$. Sei $\phi^{\lambda} : x \mapsto y(x, \lambda)$ ein Fluss kanonischer Abbildungen. Es gilt

$$\frac{dy_i}{d\lambda} = v_i(y) \tag{7.16}$$

zur Anfangsbedingung $y(x, 0) = x$, wobei $v(x)$ das erzeugende Vektorfeld von ϕ^{λ} ist. Wir wollen die Vektorfelder $v(x)$ charakterisieren, die **kanonische** Flüsse erzeugen, für die also die Jacobi-Matrix

$$A_{ik}(x, \lambda) = \frac{\partial y_i}{\partial x_k}(x, \lambda)$$

symplektisch ist für alle (x, λ) . Aus (7.16) folgt

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} A_{ik}(x, \lambda) = \frac{\partial}{\partial x_k} v_i(y) = \sum_l \underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial y_l}(y)}_{=: V_{il}(y)} A_{lk}(x, \lambda),$$

also in Matrixnotation

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} A(x, \lambda) = V(y)A(x, \lambda), \quad y = y(x, \lambda).$$

Da $A(x, 0) = 1$ symplektisch ist, ist es auch $A(x, \lambda)$ (und damit ϕ^λ kanonisch), falls

$$0 = \frac{\partial}{\partial \lambda} (A^T \varepsilon A) = A^T (V^T \varepsilon + \varepsilon V) A.$$

Wegen $\det A \neq 0$ und $\varepsilon^T = -\varepsilon$ ist dies äquivalent zu

$$(\varepsilon V)^T = \varepsilon V,$$

d.h.

$$\frac{\partial}{\partial y_k} \underbrace{\sum_l \varepsilon_{il} v_l(y)}_{=: g_i(y)} = \frac{\partial}{\partial y_i} \underbrace{\sum_l \varepsilon_{kl} v_l(y)}_{g_k(y)}.$$

Somit ist g ein Gradient (einer Funktion F),

$$\sum_l \varepsilon_{il} v_l(y) = \frac{\partial F}{\partial y_i},$$

und wir schliessen:

Satz. Die Differentialgl. (7.16) kanonischer Flüsse sind kanonische Gleichungen:

$$\sum_k \varepsilon_{ik} \frac{dy_k}{d\lambda} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \quad (7.17)$$

wobei λ die Rolle der Zeit und F jene der Hamiltonfunktion spielt.

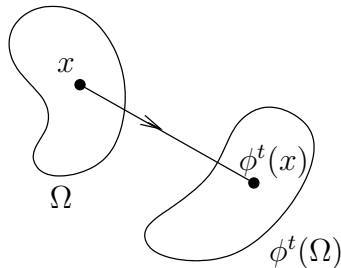
Aus der Herleitung folgt auch die Umkehrung: Kanonische Gleichungen erzeugen kanonische Flüsse auf dem Phasenraum. F heisst **erzeugende Funktion** des kanonischen Flusses.

Insbesondere ist die Dynamik eines **autonomen** Hamiltonschen Systems ($H = H(x)$, unabhängig von t) durch einen **kanonischen** Fluss ϕ^t gegeben:

$$x(t) = \phi^t(x_0)$$

ist die Lösung von (7.11) zur Anfangsbedingung $x(0) = x_0$.

Der Satz von Liouville



Das Phasenvolumen

$$\mu(\Omega) = \int_{\Omega} dx_1 \dots dx_{2f}$$

jeder Teilmenge $\Omega \subset \Gamma$ ist invariant unter der Zeitentwicklung:

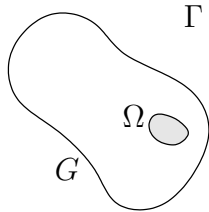
$$\mu(\phi^t(\Omega)) = \mu(\Omega). \quad (7.18)$$

Beweis. Unter einer kanonischen Abbildung $\phi : x \mapsto y$ ist

$$\mu(\phi(\Omega)) = \int_{\phi(\Omega)} dy_1 \dots dy_{2f} = \int_{\Omega} \underbrace{\left| \det \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right|}_{= 1, \text{ wegen (7.14)}} dx_1 \dots dx_{2f} = \mu(\Omega) . \quad \square$$

Gl. (7.18) besagt: Jeder kanonische Fluss ϕ^t ist **volumenerhaltend**. (Ein einfaches Beispiel eines entsprechenden Strömungsbildes ist das Phasenportrait auf p. 12). Eine Konsequenz davon ist:

Der Wiederkehrsatz von Poincaré



Sei ϕ^t ein **volumenerhaltender** Fluss auf Γ und $G \subset \Gamma$ ein Gebiet, das

- endliches Volumen hat:

$$\mu(G) < \infty \quad (7.19)$$

- invariant ist unter ϕ^t :

$$\phi^t(G) \subset G , \quad (\text{alle } t) . \quad (7.20)$$

Weiter sei $\Omega \subset G$. Wir sagen: $x \in G$ ist ein **Wiederkehrpunkt** bzgl. Ω , falls seine Bahn $\phi^t(x)$ die Menge Ω für $t \rightarrow \infty$ immer wieder besucht: Es gibt beliebig grosse t , so dass $\phi^t(x) \in \Omega$.

Satz. Fast alle $x \in \Omega$ sind Wiederkehrpunkte, d.h. die Ausnahmepunkte bilden eine Menge vom Volumen Null.

Beweis.

$$x \in \bigcup_{t \geq n} \phi^{-t}(\Omega) \equiv \Omega_n \quad (7.21)$$

bedeutet, dass $\phi^t(x) \in \Omega$ für ein $t \geq n$. Somit ist

$$W = \bigcap_{n=0,1,2,\dots} \Omega_n$$

die Menge der Wiederkehrpunkte. Aus (7.21) folgt

$$\Omega_0 \supset \Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \dots$$

und aus (7.20) $\Omega_0 \subset G$, mit (7.19), also $\mu(\Omega_0) < \infty$. Nach einem Satz der Masstheorie (dominierte Konvergenz) ist dann

$$\mu(W) = \mu\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} \Omega_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\Omega_n) . \quad (7.22)$$

Wegen der Gruppeneigenschaft ist aber

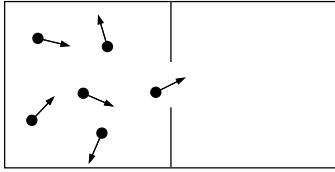
$$\phi^1(\Omega_n) = \bigcup_{t \geq n} \phi^{-(t-1)}(\Omega_n) = \Omega_{n-1}$$

und somit $\mu(\Omega_n) = \mu(\Omega_{n-1})$, da ϕ^1 volumenerhaltend ist. Nun besagt (7.22)

$$\mu(W) = \mu(\Omega_0) ,$$

wegen $W \subset \Omega_0$ also $\mu(\Omega_0 \setminus W) = 0$ und, wegen $\Omega \subset \Omega_0$, erst recht $\mu(\Omega \setminus W) = 0$. \square

Beispiel. Ausströmen eines Gases ins Vakuum



System: N Teilchen mit der Hamiltonfunktion

$$H(x) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\vec{p}_i^2}{2m} + W(\vec{x}_i) \right) + \sum_{i < k}^{1 \dots N} V(|\vec{x}_i - \vec{x}_k|)$$

$$x = (\vec{x}_1, \vec{p}_1, \dots, \vec{x}_N, \vec{p}_N) .$$

Dabei beschreibt $W(\vec{x})$ das Potential der Wand des Gefäßes: $W(\vec{x}) \rightarrow +\infty$ für $\vec{x} \rightarrow$ Wand; und $V(r)$ die Paarwechselwirkung zwischen den Teilchen. Die Potentiale seien nach unten beschränkt. Das Gebiet

$$G = \{x \mid H(x) \leq E\}$$

ist invariant unter dem durch H erzeugten Fluss ϕ^t (Energieerhaltung). Ferner ist $\mu(G) < \infty$, denn für $x \in G$ sind \vec{p}_i^2 und $W(\vec{x}_i)$, ($i = 1, \dots, N$) nach oben beschränkt. $\Omega \subset G$ sei die Teilmenge der Phasenraumkonfigurationen x , bei denen sich alle Teilchen in der linken Kammer befinden. Nach dem Satz sind fast alle diese x Wiederkehrpunkte: Die Bewegung $x(t)$ führt alle Teilchen gemeinsam und immer wieder in die linke Kammer zurück.

5. Erhaltungssätze und kontinuierliche Symmetrien

Wegen $\varepsilon^{-1} = \varepsilon^T$ folgt aus (7.11)

$$\dot{x}_k = \sum_i \varepsilon_{ik} \frac{\partial H}{\partial x_i} .$$

Die zeitliche Änderung einer Größe $F(x)$ längs einer mechanischen Bahn ist also

$$\frac{d}{dt} F(x(t)) = \sum_k \frac{\partial F}{\partial x_k} \dot{x}_k = \underbrace{\sum_{i,k} \frac{\partial H}{\partial x_i} \varepsilon_{ik} \frac{\partial F}{\partial x_k}}_{\text{Poissonklammer}} . \quad (7.23)$$

Def.: **Poissonklammer:** $\equiv \{H, F\}$

Die Poissonklammer $\{H, F\}(x)$ zweier beliebiger Funktionen $F(x)$, $H(x)$ ist also invariant unter kanonischen Transformationen $\bar{x} \mapsto x$: mit $\bar{H}(\bar{x}) = H(x)$ ist

$$\{\bar{H}, \bar{F}\}(\bar{x}) = \{H, F\}(x) .$$

In der Notation (7.10) ist

$$\{H, F\} = \sum_{\alpha=1}^f \left(\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \frac{\partial F}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \right) . \quad (7.24)$$

Ferner ist die Poissonklammer **antisymmetrisch** (da $\varepsilon^T = -\varepsilon$)

$$\{H, F\} = -\{F, H\}. \quad (7.25)$$

Es seien ψ^λ und ϕ^t die durch F , bzw. H erzeugten kanonischen Flüsse (7.17), also

$$\left. \frac{d}{dt} F(\phi^t(x)) \right|_{t=0} = \{H, F\} = -\{F, H\} = -\left. \frac{d}{d\lambda} H(\psi^\lambda(x)) \right|_{\lambda=0}. \quad (7.26)$$

F ist also genau dann eine Erhaltungsgrösse ($F(\phi^t(x)) = F(x)$), falls H invariant ist unter dem von F erzeugten kanonischen Fluss ($H(\psi^\lambda(x)) = H(x)$): Zu jeder Erhaltungsgrösse gehört eine kontinuierliche Symmetrie ψ^λ von H , und umgekehrt.

Beispiel. Sei \mathbb{R}^6 der Phasenraum mit Koordinaten (\vec{x}, \vec{p}) und

$$F(\vec{x}, \vec{p}) = \vec{e} \cdot (\vec{x} \wedge \vec{p}) \quad (7.27)$$

(\vec{e} ein fester Einheitsvektor). Die Differentialgleichungen (7.17) des durch F erzeugten kanonischen Flusses sind (in der Form (7.4))

$$\frac{d\vec{x}}{d\lambda} = \frac{\partial F}{\partial \vec{p}} = \vec{e} \wedge \vec{x}, \quad \frac{d\vec{p}}{d\lambda} = -\frac{\partial F}{\partial \vec{x}} = \vec{e} \wedge \vec{p},$$

d.h. der Fluss ist

$$\Psi^\lambda : (\vec{x}, \vec{p}) \mapsto (R(\lambda)\vec{x}, R(\lambda)\vec{p}),$$

wobei $R(\lambda)$ die Drehung im \mathbb{R}^3 um die Achse \vec{e} mit Winkel λ ist. Also: Die Komponenten (7.27) des Drehimpulses sind die erzeugenden Funktionen der Drehungen, und die allgemeine Form des Drehimpulssatzes ist

$$\left. \frac{d}{dt} \vec{e} \cdot (\vec{x} \wedge \vec{p}) \right|_{t=0} = -\left. \frac{d}{d\lambda} H(R(\lambda)\vec{x}, R(\lambda)\vec{p}) \right|_{\lambda=0}.$$

Insbesondere ist $\vec{e} \cdot (\vec{x} \wedge \vec{p})$ genau dann erhalten, wenn H invariant ist unter Rotationen um die Achse \vec{e} . Analog ist die Impulskomponente $\vec{e} \cdot \vec{p}$ die Erzeugende der Translationen $\psi^\lambda : (\vec{x}, \vec{p}) \mapsto (\vec{x} + \lambda\vec{e}, \vec{p})$.

Ferner erfüllt die Poisson-Klammer die Jacobi-Identität

$$\{\{F_1, F_2\}, F_3\} + \{\{F_2, F_3\}, F_1\} + \{\{F_3, F_1\}, F_2\} = 0. \quad (7.28)$$

Zum Beweis (dessen Bedeutung unter Beizug der Differentialgeometrie klarer wäre) beachte, dass

$$\begin{aligned} \{\{F_1, F_2\}, F_3\} &= \sum_{ikjl} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i} \varepsilon_{ik} \frac{\partial F_2}{\partial x_k} \right) \varepsilon_{jl} \frac{\partial F_3}{\partial x_l} \\ &= \sum_{ikjl} \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_i \partial x_j} \varepsilon_{ik} \frac{\partial F_2}{\partial x_k} \varepsilon_{jl} \frac{\partial F_3}{\partial x_l} + \frac{\partial F_1}{\partial x_i} \varepsilon_{ik} \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_j \partial x_k} \varepsilon_{jl} \frac{\partial F_3}{\partial x_l} \right). \end{aligned}$$

Ein einziger weiterer Term mit zweiten Ableitungen von F_1 kommt von der zyklischen Vertauschung des zweiten. Die Indizes der Ableitungen sind dieselben nach der Umbenennung $ikjl \rightarrow ljik$. Der gesamte Koeffizient dieses Terms in (7.28) ist dann $\varepsilon_{ik}\varepsilon_{jl} + \varepsilon_{lj}\varepsilon_{ik} = 0$.

Aus (7.28) folgt, dass mit zwei Grössen $F_1(x)$, $F_2(x)$, die erhalten sind, $\{F_1, F_2\}$ es auch ist.

Beispiel. Mit $\vec{L} = \vec{x} \wedge \vec{p}$ ist

$$\{\vec{L} \cdot \vec{e}_1, \vec{L} \cdot \vec{e}_2\} = -(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2) \cdot \vec{L} :$$

aus der Erhaltung zweier Drehimpulskomponenten folgt die aller drei. Analog ist

$$\{\vec{L} \cdot \vec{e}_1, \vec{p} \cdot \vec{e}_2\} = -(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2) \cdot \vec{p} .$$

Die zeitliche Änderung einer Grösse $F(x, t)$ ist, statt (7.23),

$$\frac{dF}{dt} = \{H, F\} + \frac{\partial F}{\partial t} . \quad (7.29)$$

Insbesondere ist für $H = H(x, t)$ (**Energiesatz**)

$$\frac{dH}{dt} = \underbrace{\{H, H\}}_{=0} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

wegen (7.25). Für autonome Systeme, $H = H(x)$, ist H erhalten.

6. Das Hamiltonsche Prinzip im Phasenraum

Nach (7.3) ist $L(q, \dot{q}, t) = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \dot{q}^{\alpha} - H(q, p, t)$. Es gilt das Variationsprinzip für die mechanische Bahn $(q(t), p(t))$:

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} \left(\sum_{\alpha} p_{\alpha} \dot{q}^{\alpha} - H \right) dt = 0 \quad (7.30)$$

für jede Variation $(q(t, \lambda), p(t, \lambda))$ mit **festen Endpunkten** $t_i, q^{\alpha}(t_i), p_{\alpha}(t_i)$, ($i = 1, 2$). Dabei sind unabhängige Variationen $q(t, \lambda)$, $p(t, \lambda)$ zulässig (im Unterschied zur Formulierung (5.27), wo $\dot{q}(t, \lambda) = dq(t, \lambda)/dt$ ist). Dieses Variationsprinzip ist in der Tat äquivalent zu den kanonischen Gl. (7.4):

$$\begin{aligned} \delta \int_{(1)}^{(2)} \left(\sum_{\alpha} p_{\alpha} \dot{q}^{\alpha} - H \right) dt &= \int_{(1)}^{(2)} \sum_{\alpha} \left(p_{\alpha} \delta \dot{q}^{\alpha} + \dot{q}^{\alpha} \delta p_{\alpha} - \frac{\partial H}{\partial q^{\alpha}} \delta q^{\alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} \delta p_{\alpha} \right) dt \\ &= \sum_{\alpha} p_{\alpha} \underbrace{\delta q^{\alpha}}_{=0} \Big|_{(1)}^{(2)} + \int_{(1)}^{(2)} \sum_{\alpha} \left[\left(\dot{q}^{\alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} \right) \delta p_{\alpha} - \left(\dot{p}_{\alpha} + \frac{\partial H}{\partial q^{\alpha}} \right) \delta q^{\alpha} \right] dt \end{aligned}$$

(partielle Integration; die Randterme verschwinden, da die Endpunkte fest sind).

Bemerkung. Aus der Herleitung ersichtlich ist, dass die Impulse $p(t_i)$, ($i = 1, 2$) an den Endpunkten nicht festgehalten werden müssen. Die mechanischen Bahnen sind damit stationäre Punkte der Wirkung unter einer etwas grösseren Klasse von Variationen.

Erzeugung kanonischer Transformationen

Wir betrachten ein Hamiltonsches System mit Phasenraumkoordinaten $x = (q^1, p_1, \dots, q^f, p_f)$ und Hamiltonfunktion $H(x, t)$ und unterwerfen es einer (möglicherweise) zeitabhängigen kanonischen Transformation

$$x_i = x_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2f}, t). \quad (7.31)$$

Gesucht sind die Bewegungsgleichungen in den neuen Koordinaten $\bar{x} = (Q^1, P_1, \dots, Q^f, P_f)$: Sie erweisen sich als **kanonische Bewegungsgleichungen** (7.4), allerdings mit einer **neuen Hamiltonfunktion** $K(\bar{x}, t)$. Äquivalent zu dieser Behauptung ist nach (7.30), dass die beiden Variationsprobleme

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} \left(\sum_{\alpha} p_{\alpha} \dot{q}^{\alpha} - H \right) dt = 0 \quad \text{und} \quad \delta \int_{(1)}^{(2)} \left(\sum_{\alpha} P_{\alpha} \dot{Q}^{\alpha} - K \right) dt = 0 \quad (7.32)$$

Lösungen $x(t)$ bzw. $\bar{x}(t)$ besitzen, die sich unter (7.31) entsprechen. Hinreichend dafür ist (s. (5.28)), dass sich die beiden Integranden in (7.32) um eine totale Ableitung (einer Funktion $S_0(\bar{x}, t)$) unterscheiden; d.h. dass für alle Kurven $\bar{x}(t)$ gilt

$$\sum_{\alpha} p_{\alpha}(t) \dot{q}^{\alpha}(t) - H(x(t), t) = \sum_{\alpha} P_{\alpha}(t) \dot{Q}^{\alpha}(t) - K(\bar{x}(t), t) + \frac{dS_0}{dt}$$

mit

$$\frac{dS_0}{dt} \equiv \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial S_0}{\partial Q^{\alpha}} \dot{Q}^{\alpha} + \frac{\partial S_0}{\partial P_{\alpha}} \dot{P}_{\alpha} \right) + \frac{\partial S_0}{\partial t}.$$

Gleichbedeutend dazu ist

$$\sum_{\alpha} p_{\alpha} dq^{\alpha} - H dt = \sum_{\alpha} P_{\alpha} dQ^{\alpha} - K dt + dS_0 \quad (7.33)$$

(als Identität von Differentiale über $(\bar{x}, t) \in \mathbb{R}^{2f+1}$), oder, da $P_{\alpha} dQ^{\alpha} + Q^{\alpha} dP_{\alpha} = d(Q^{\alpha} P_{\alpha})$ selbst ein totales Differential ist,

$$dS = \sum_{\alpha} (p_{\alpha} dq^{\alpha} + Q^{\alpha} dP_{\alpha}) + (K - H) dt \quad (7.34)$$

(mit $S = S_0 + \sum_{\alpha} P_{\alpha} Q^{\alpha}$). Wir nehmen an, dass $(q^1, \dots, q^f, P_1, \dots, P_f)$ lokale (nicht kanonische) Koordinaten sind und fassen S auf als $S = S(q^1, \dots, q^f, P_1, \dots, P_f, t)$. Dann lautet (7.34)

$$(i): \quad p_{\alpha} = \frac{\partial S}{\partial q^{\alpha}}(q, P, t), \quad (ii): \quad Q^{\alpha} = \frac{\partial S}{\partial P_{\alpha}}(q, P, t), \quad (7.35)$$

$$(iii): \quad K = H(q, p, t) + \frac{\partial S}{\partial t}(q, P, t). \quad (7.36)$$

Auflösen von (ii) nach q^{α} und Einsetzen in (i, iii) liefert

$$q^{\alpha} = q^{\alpha}(Q, P, t), \quad p_{\alpha} = p_{\alpha}(Q, P, t) \quad (7.37)$$

(also (7.31)) und die neue Hamiltonfunktion $K(Q, P, t)$. Bedingung für die Auflösbarkeit in einer Umgebung von (q_0, P_0) ist, dass dort

$$\det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial q^\alpha \partial P_\beta} \right) \neq 0. \quad (7.38)$$

$S(q, P, t)$ heisst **erzeugende Funktion** der (zu jeder Zeit t) kanonischen Transformation (7.37). Kanonisch ist sie, da sie für festes $t = t_0$ auch durch $\tilde{S}(q, P) = S(q, P, t_0)$ erzeugt wird, dabei aber $\tilde{K}(\bar{x}) = H(x)$ gilt (für jede Hamiltonfunktion H): Solche Transformationen sind nach Definition, s. (7.13), kanonisch. Durch freie Wahl der Funktion S lassen sich sehr elegant kanonische Transformationen konstruieren.

Beispiele.

1) $S = \sum_\beta P_\beta Q^\beta(q^1, \dots, q^f)$ mit vorgegebenen Funktionen $Q^\alpha(q)$. Dann lauten (ii, i)

$$Q^\alpha = Q^\alpha(q^1, \dots, q^f), \quad p_\alpha = \sum_\beta P_\beta \frac{\partial Q^\beta}{\partial q^\alpha}.$$

Nach Auflösen von (i), $q^\alpha = q^\alpha(Q)$, sind dies die im Zusammenhang mit (7.15) besprochenen Transformationen der Lagekoordinaten. Die Auflösbarkeitsbedingung (7.38) ist

$$\det \left(\frac{\partial Q^\alpha}{\partial q^\beta} \right) \neq 0.$$

2) Sei $f = 1$ und $S(q, P) = \frac{1}{2}q^2P^2$. Aus

$$Q = q^2P, \quad p = qP^2$$

ergibt sich die kanonische Transformation

$$q = \sqrt{\frac{Q}{P}}, \quad p = \sqrt{QP^3}.$$

Bemerkungen.

1) In (7.33) kann man sich S_0 als Funktion $S_0(q, Q)$ denken, so dass

$$p_\alpha = \frac{\partial S_0}{\partial q^\alpha}, \quad P_\alpha = -\frac{\partial S_0}{\partial Q^\alpha}, \quad K = H + \frac{\partial S_0}{\partial t},$$

was die selbe kanonische Transformation (7.37) erzeugt. Analog für $\tilde{S} = S_0 - \sum_\alpha p_\alpha q^\alpha \equiv \tilde{S}(p, Q)$ usw. Die verschiedenen Typen erzeugender Funktionen gehen (bis aufs Vorzeichen) durch Legendre-Transformationen auseinander hervor.

2) Verwendung der Differentialformen, s. p. 70, erlaubt es am einfachsten zu zeigen, dass (7.37) kanonisch ist: Aus (7.34) folgt wegen $d^2 = 0$, dass für festes t

$$0 = d^2 S = \sum_\alpha (dp_\alpha \wedge dq^\alpha + dQ^\alpha \wedge dP_\alpha), \quad \text{d.h.} \quad \sum_\alpha dp_\alpha \wedge dq^\alpha = \sum_\alpha dP_\alpha \wedge dQ^\alpha.$$

3) Die erzeugende Funktion $S(q, P, t)$ ist nicht dasselbe wie die erzeugende Funktion $F(q, p)$ eines kanonischen Flusses $(q, p) = \phi^t(Q, P)$, s. (7.17). Die Begriffe sind aber verwandt: für kleine t ist

$$S(q, P, t) = \sum_{\alpha} q^{\alpha} P_{\alpha} - tF(q, P) + O(t^2),$$

denn (7.35) lautet

$$p_{\alpha} = P_{\alpha} - t \left. \frac{\partial F}{\partial q^{\alpha}} \right|_{(q, P)} + O(t^2), \quad Q^{\alpha} = q^{\alpha} - t \left. \frac{\partial F}{\partial p_{\alpha}} \right|_{(q, P)} + O(t^2),$$

d.h.

$$q^{\alpha} = Q^{\alpha} + t \left. \frac{\partial F}{\partial p_{\alpha}} \right|_{(Q, P)} + O(t^2), \quad p_{\alpha} = P_{\alpha} - t \left. \frac{\partial F}{\partial q^{\alpha}} \right|_{(Q, P)} + O(t^2),$$

was der Lösung $(q(t), p(t))$ der kanonischen Gleichungen $\dot{q}^{\alpha} = \partial F / \partial p_{\alpha}$, $\dot{p}_{\alpha} = -\partial F / \partial q^{\alpha}$ zu den Anfangsbedingungen $(q(0), p(0)) = (Q, P)$ entspricht.

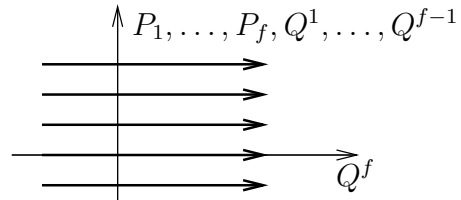
7. Die Hamilton-Jacobi Gleichung

Wir betrachten ein autonomes System mit $H = H(q^1, \dots, q^f, p_1, \dots, p_f)$. Gesucht ist eine zeitunabhängige kanonische Transformation, so dass H eine der neuen Impulskoordinaten ist, z.B. $H(Q, P) = P_f$. Wenn dies gelingt, so sind die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{P}_{\alpha} &= -\frac{\partial H}{\partial Q^{\alpha}} = 0, & (\alpha &= 1, \dots, f), \\ \dot{Q}^{\alpha} &= \frac{\partial H}{\partial P_{\alpha}} = 0, & (\alpha &= 1, \dots, f-1), & \dot{Q}^f &= \frac{\partial H}{\partial P_f} = 1 \end{aligned}$$

trivial lösbar:

$$\begin{aligned} P_{\alpha}(t) &= P_{\alpha}(0), & (\alpha &= 1, \dots, f), \\ Q^{\alpha}(t) &= Q^{\alpha}(0), & (\alpha &= 1, \dots, f-1), \\ Q^f(t) &= Q^f(0) + t. \end{aligned}$$



Nach (7.35) muss die erzeugende Funktion $S = S(q, P)$ so bestimmt werden, dass

$$H\left(q^1, \dots, q^f, \frac{\partial S}{\partial q^1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q^f}\right) = P_f \quad (7.39)$$

(zeitunabhängige **Hamilton-Jacobi Gleichung**). Dies ist eine (durch P_f parametrisierte) partielle Differentialgleichung 1. Ordnung für S . Benötigt wird eine Schar von Lösungen (vgl. (7.38))

$$S(q^1, \dots, q^f, P_1, \dots, P_f) \quad \text{mit} \quad \det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial q^{\alpha} \partial P_{\beta}} \right) \neq 0 :$$

eine sogenannte **vollständige Lösung**. Notwendig für (7.38) ist

$$\text{rang} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial q^{\alpha} \partial P_{\beta}} \right)_{\substack{\alpha=1, \dots, f \\ \beta=1, \dots, f-1}} = f - 1; \quad (7.40)$$

diese Bedingung ist aber auch hinreichend: Aus (7.39) folgt durch Ableitung nach P_1, \dots, P_f :

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial^2 S}{\partial q^{\alpha} \partial P_{\beta}} = 0, \quad (\beta = 1, \dots, f-1); \quad \sum_{\alpha} \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial^2 S}{\partial q^{\alpha} \partial P_f} = 1.$$

Die letzte Spalte ($\beta = f$) der Matrix (7.40) kann deshalb nicht Linearkombination der ersten $f-1$ sein. Ferner ergibt sich als notwendige Bedingung für die Lösbarkeit von (7.39), dass im betrachteten Gebiet des Phasenraums **nirgends**

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} = \dots = \frac{\partial H}{\partial p_f} = 0$$

eintritt.

Aus der vollständigen Lösung der Hamilton-Jacobi Gleichung ergibt sich die Bewegung in den ursprünglichen Koordinaten wie folgt: Zu gegebenen Werten der Erhaltungsgrößen P_1, \dots, P_f bestimmt jede der Gleichungen

$$\frac{\partial S}{\partial P_{\beta}}(q, P) = Q^{\beta}, \quad (\beta = 1, \dots, f-1) \quad (7.41)$$

für $q = (q^1, \dots, q^f)$ eine Fläche im Konfigurationsraum, die nach (7.40) linear unabhängige Normalen haben. Ihr Durchschnitt ist die (1-dimensionale) Bahnkurve, deren zeitliche Durchlaufung durch

$$\frac{\partial S}{\partial P_f}(q, P) = Q^f(0) + t \quad (7.42)$$

bestimmt ist. Die $2f$ Konstanten $Q^1(0), \dots, P_f(0)$ ergeben sich aus den Anfangsbedingungen.

Separable Probleme

Falls sich (7.39) schreiben lässt in der Form

$$f\left(q^1, \frac{\partial S}{\partial q^1}\right) = F\left(q^2, \dots, q^f, \frac{\partial S}{\partial q^2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q^f}\right), \quad (7.43)$$

so heisst die Variable q^1 **separierbar**. Der **Separationsansatz**

$$S(q^1, \dots, q^f) = S_1(q^1) + \tilde{S}(q^2, \dots, q^f)$$

führt dann auf die beiden Gleichungen

$$f\left(q^1, \frac{dS_1}{dq^1}\right) = P_1, \quad F\left(q^2, \dots, q^f, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q^2}, \dots, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q^f}\right) = P_1 \quad (7.44)$$

mit einer Konstanten P_1 , denn die linke, bzw. rechte Seite von (7.43) hängt nicht von q^2, \dots, q^f , bzw. q^1 ab. Aus (7.44) findet man durch Lösen der ersten Gl. die Funktion $S_1(q^1, P_1)$. Das Problem ist **vollständig separabel**, falls man mit der zweiten Gl. in gleicher Weise verfahren kann bis zum Schluss. Das Resultat ist eine vollständige Lösung

$$S(q^1, \dots, q^f, P_1, \dots, P_{f-1}) = S_1(q^1, P_1) + S_2(q^2, P_1, P_2) + \dots + S_f(q^f, P_1 \dots P_{f-1})$$

der HJ-Gl. (7.39). (Jeder Term hängt noch von P_f ab.) Die Separierbarkeit eines Problems bezieht sich immer auf besondere Koordinaten $q = (q^1, \dots, q^f)$, deren Existenz eher die Ausnahme als die Regel ist.

Beispiele.

1) **Das ebene Zentralkraftproblem** (7.6). Die HJ-Gl. (7.39)

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + r^{-2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 \right] + V(r) = E$$

($E \equiv P_2$), bzw.

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 = 2mr^2(E - V(r)) - r^2 \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 \quad (7.45)$$

ist separabel: Mit dem Separationsansatz $S(r, \varphi) = S_r(r) + S_\varphi(\varphi)$ müssen beide Seiten der Gl. (7.45) gleich einer Separationskonstanten $l^2 \equiv P_1^2$ sein. Es folgt

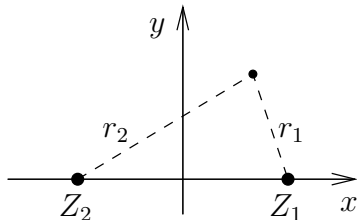
$$S_\varphi(\varphi) = l\varphi, \quad S_r(r) = \int^r ds \sqrt{2m(E - V(s)) - l^2 s^{-2}}$$

bis auf beliebige (irrelevante) additive Konstanten. Die Bahn $\varphi(r)$ und ihre zeitliche Durchlaufung $t(r)$ ergeben sich aus (7.41, 7.42):

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial l} &= \varphi - \int^r \frac{l}{s^2} \frac{ds}{\sqrt{2m(E - V(s)) - l^2 s^{-2}}} = \text{konst.}, \\ \frac{\partial S}{\partial E} &= \int^r \frac{m ds}{\sqrt{2m(E - V(s)) - l^2 s^{-2}}} = \text{konst.} + t, \end{aligned}$$

wobei die Konstanten durch die Anfangsbedingungen bestimmt sind. Dies stimmt mit (2.4, 2.3) überein.

2) **Das ebene Zweizentren-Problem**



Ein Massenpunkt bewegt sich in der xy -Ebene unter dem Einfluss von zwei festen Gravitationszentren $Z_1 = (1/2, 0)$ und $Z_2 = (-1/2, 0)$:

$$H = \frac{1}{4}(p_x^2 + p_y^2) - \frac{\mu_1}{r_1} - \frac{\mu_2}{r_2} \equiv T + V. \quad (7.46)$$

Dieses Problem wurde erstmals mit Hilfe der Hamilton-Jacobi Gleichung gelöst. Die Separation gelingt in **elliptischen Koordinaten**

$$\xi = r_1 + r_2, \quad \eta = r_1 - r_2.$$

Nach der Dreiecks-Ungleichung ist der Koordinatenbereich

$$\xi \geq 1, \quad -1 \leq \eta \leq +1.$$

Die Koordinatenlinien sind konfokale Ellipsen ($\xi = \text{konst}$) und Hyperbeln ($\eta = \text{konst}$) mit den Brennpunkten Z_1 und Z_2 . Für das Potential erhält man sofort

$$V = -\frac{a\xi - b\eta}{\xi^2 - \eta^2}, \quad a = 2(\mu_1 + \mu_2), \quad b = 2(\mu_1 - \mu_2).$$

Zur Berechnung der kinetischen Energie sind die Beziehungen

$$\xi\eta = -2x, \quad \xi^2 + \eta^2 = 4(x^2 + y^2) + 1, \quad \xi^2 - \eta^2 = 4r_1r_2.$$

nützlich. Aus

$$(\vec{\nabla}r_1)^2 = (\vec{\nabla}r_2)^2 = 1, \quad \vec{\nabla}r_1 \cdot \vec{\nabla}r_2 = \frac{4(x^2 + y^2) - 1}{4r_1r_2}$$

folgt

$$(\vec{\nabla}\xi)^2 = 2(1 + \vec{\nabla}r_1 \cdot \vec{\nabla}r_2) = 4\frac{(\xi^2 - 1)}{\xi^2 - \eta^2}, \quad (\vec{\nabla}\eta)^2 = 4\frac{(1 - \eta^2)}{\xi^2 - \eta^2}, \quad \vec{\nabla}\xi \cdot \vec{\nabla}\eta = 0$$

(die Koordinatenlinien schneiden sich rechtwinklig). Mit dem Transformationsverhalten (7.15)

$$\vec{p} = (\vec{\nabla}\xi)p_\xi + (\vec{\nabla}\eta)p_\eta$$

findet man den Beitrag T zur Hamiltonfunktion

$$H(\xi, \eta, p_\xi, p_\eta) = \frac{1}{\xi^2 - \eta^2} [(\xi^2 - 1)p_\xi^2 + (1 - \eta^2)p_\eta^2 - a\xi + b\eta].$$

Die HJ-Gleichung

$$H\left(\xi, \eta, \frac{\partial S}{\partial \xi}, \frac{\partial S}{\partial \eta}\right) = E \quad (\equiv P_2)$$

lässt sich wie im Bsp. 1 mit dem Ansatz $S(\xi, \eta) = S_\xi(\xi) + S_\eta(\eta)$ separieren zu

$$(\xi^2 - 1)(S'_\xi)^2 - a\xi - E\xi^2 = -(1 - \eta^2)(S'_\eta)^2 - b\eta - E\eta^2.$$

Beide Seiten müssen gleich einer Separationskonstante P_1 sein, und man erhält wieder eine (durch explizite Integrale gegebene) 2-parametrische Schar von Lösungen $S(\xi, \eta, P_1, E)$ der HJ-Gl. Durch Ableitung nach P_1 und E gewinnt man die Bahnkurven und deren zeitliche Durchlaufung. Durch Umschreiben auf kartesische Koordinaten der Erhaltungsgrösse P_1 findet man

$$-P_1 = (xp_y - yp_x)^2 + \frac{1}{4}p_x^2 - 2x\left(\frac{\mu_1}{r_1} - \frac{\mu_2}{r_2}\right).$$

Dass P_1 erhalten ist, lässt sich zwar auch anhand von (7.46) verifizieren, wohl aber kaum erraten.

Die zeitabhängige Hamilton-Jacobi Gleichung

Wir betrachten ein (nicht autonomes) System mit Hamiltonfunktion $H(q^1, \dots, q^f, p_1, \dots, p_f, t)$. Gesucht ist eine **zeitabhängige** kanonische Transformation derart, dass in den neuen Koordinaten für die Hamiltonfunktion gilt $K(Q^1, \dots, Q^f, P_1, \dots, P_f, t) = 0$. Dann wären Q^1, \dots, P_f konstant: Die Bewegung soll auf Ruhe transformiert werden! Nach

(7.36, 7.38) ist die entsprechende erzeugende Funktion $S(q, P, t)$ eine Lösung der **zeitabhängigen Hamilton-Jacobi Gleichung**

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0 \quad (7.47)$$

mit

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q^\alpha \partial P_\beta}\right) \neq 0.$$

Die Bewegung in den ursprünglichen Koordinaten ergibt sich aus den f Gleichungen

$$\frac{\partial S}{\partial P_\alpha}(q, P, t) = Q^\alpha, \quad \text{also} \quad q^\alpha = q^\alpha(Q, P, t), \quad (7.48)$$

wobei die Konstanten $(Q, P) = (Q^1, \dots, Q^f, P_1, \dots, P_f)$ durch die Anfangsbedingungen bestimmt sind. Einsetzen in $p_\alpha = (\partial S / \partial q^\alpha)(q, P, t)$ liefert noch $p_\alpha = p_\alpha(Q, P, t)$.

Bemerkung. Für ein autonomes System ist (7.47) äquivalent zu (7.39): Der Separationsansatz

$$S(q, t) = S^*(q) + S_t(t) \quad (7.49)$$

führt auf

$$H\left(q, \frac{\partial S^*}{\partial q}\right) = -S'_t \equiv P_f,$$

wo P_f die Separationskonstante ist (also $S_t(t) = -P_f t$). Wegen $\partial S / \partial P_\beta = \partial S^* / \partial P_\beta - \delta_{\beta f} t$ gehen die Gl. (7.48) über in (7.41, 7.42).

8 Ausblick auf die Wellenmechanik

Ausgangspunkt ist die Analogie der Mechanik eines Teilchens und der Strahlenoptik, besonders deutlich in den Variationsprinzipien

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} ds \sqrt{E - V(\vec{x})} = 0 \quad (\text{Euler-Maupertuis}) , \quad (8.1)$$

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} ds n(\vec{x}) = 0 \quad (\text{Fermat}) . \quad (8.2)$$

Schrödinger (1926) baut darauf (vgl. (5.56)) eine Wellenmechanik, die sich zur klassischen Mechanik verhält wie die Wellenoptik zur Strahlenoptik.

Mechanik

Jede Lösung $S(q)$ der HJ-Gleichung

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = E \quad (8.3)$$

beschreibt ein Bündel mechanischer Bahnen zur Energie E vermittelt

$$p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q^\alpha} \equiv p_\alpha(q) \quad (8.4)$$

und der Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\dot{q}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}(q, p(q)) . \quad (8.5)$$

In der Tat sind die so bestimmten Bewegungen $q(t), p(t) \equiv p(q(t))$ Lösungen der kanonischen Gl. (7.4), was nur noch für $p(t)$ zu verifizieren ist: Ableitung von (8.3) nach q^α liefert

$$0 = \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} + \sum_{\beta} \underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_\beta}}_{\dot{q}^\beta} \underbrace{\frac{\partial^2 S}{\partial q^\alpha \partial q^\beta}}_{\frac{\partial p_\alpha}{\partial q^\beta}}$$

durch Einsetzen von (8.5, 8.4); also $\dot{p}_\alpha = \sum_{\beta} (\partial p_\alpha / \partial q^\beta) \dot{q}^\beta = -\partial H / \partial q^\alpha$. Nach (8.3, 8.4) ist $H(q, p) = E$ längs dieser Bahn.

Wir beschränken uns vorerst auf ein Teilchen im \mathbb{R}^3 mit der Hamiltonfunktion

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x}) . \quad (8.6)$$

Dann lautet (8.3)

$$(\vec{\nabla} S)^2 = 2m(E - V(\vec{x})) \quad (8.7)$$

und die zu einer Lösung $S(\vec{x})$ gehörende Schar von Bahnen mit Energie E ist bestimmt durch

$$\vec{p} = m\dot{\vec{x}} = \vec{\nabla}S. \quad (8.8)$$

Die Bahnkurven sind somit Orthogonaltrajektorien der Flächen $S = \text{konst}$ und auf jeder dieser Bahnkurven ist $d\vec{x}/ds = \vec{\nabla}S/|\vec{\nabla}S|$, d.h.

$$\sqrt{2m(E - V(\vec{x}))} \frac{d\vec{x}}{ds} = \vec{\nabla}S \quad (8.9)$$

($s = \text{Bogenlänge}$). Sie erfüllen (8.1).



Strahlenoptik

Wir schreiben das Prinzip von Fermat (8.2) in der Form

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} ds k(\vec{x}) = 0, \quad k(\vec{x}) = \frac{\omega}{c} n(\vec{x})$$

(k : Wellenzahl, ω : Kreisfrequenz des Lichts). Dies entspricht dem Prinzip von Euler-Maupertuis für die Bahnkurven der Energie E im Potential $V(\vec{x})$, sofern

$$2m(E - V(\vec{x})) = C^2 k^2(\vec{x})$$

mit C einer beliebigen Konstanten. Aus der Mechanik können wir direkt übernehmen: Jede Lösung $S(\vec{x})$ der HJ-Gl. (vgl. (8.7))

$$(\vec{\nabla}S)^2 = C^2 k^2(\vec{x}) \quad (8.10)$$

beschreibt ein Bündel von Lichtstrahlen: die Orthogonaltrajektorien der Flächen $S(\vec{x}) = \text{konst}$. Dieses Bündel ist bestimmt durch (vgl. (8.9))

$$Ck(\vec{x}) \frac{d\vec{x}}{ds} = \vec{\nabla}S. \quad (8.11)$$

Die Wahl $C = 1$ ist im Hinblick auf die Wellenoptik zweckmässig, wie wir gleich sehen werden. In der Optik heisst dann $S(\vec{x})$ das **Eikonal**, (8.10) die **Eikonalgleichung**.

Wellenoptik \rightarrow Strahlenoptik

In der (vor-Maxwellschen) **skalaren Wellenoptik** wird monochromatisches Licht beschrieben durch ein komplexes Feld $\psi(\vec{x}, t) = u(\vec{x})e^{-i\omega t}$, das der Gleichung

$$(\Delta + k^2) u = 0 \quad (8.12)$$

genügt. Wir zerlegen

$$u(\vec{x}) = A(\vec{x})e^{iS(\vec{x})}$$

in Amplitude A und Phase S . Mit

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}(Ae^{iS}) &= (\vec{\nabla}A + iA\vec{\nabla}S)e^{iS} \\ \Delta(Ae^{iS}) = \text{div } \vec{\nabla}(Ae^{iS}) &= (\Delta A + iA\Delta S + 2i\vec{\nabla}A \cdot \vec{\nabla}S - A(\vec{\nabla}S)^2)e^{iS} \end{aligned}$$

folgen aus (8.12) die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}\Delta A - A(\vec{\nabla}S)^2 + Ak^2 &= 0, \\ A\Delta S + 2\vec{\nabla}A \cdot \vec{\nabla}S &= 0.\end{aligned}$$

Die Strahlenoptik, in Form der Eikonalgleichung (8.10) mit $C = 1$ erscheint somit als gute Näherung in Gebieten, wo

$$\left| \frac{\Delta A}{A} \right| \ll k^2 :$$

Grob gesagt, in Gebieten, wo die Amplitude $A(\vec{x})$ wenig variiert über eine Wellenlänge $\approx k^{-1} = |\nabla S|^{-1}$. Das Eikonal $S(\vec{x})$ erweist sich als **Phase der Lichtwelle**, und die Lichtstrahlen als **Orthogonaltrajektorien der Flächen konstanter Phase**. Das Vektorfeld $\vec{\nabla}S$ beschreibt (vgl. (8.11)) den lokalen Wellenvektor $\vec{k}(\vec{x}) = k(x)d\vec{x}/ds$.

Mechanik ← Wellenmechanik

Die HJ-Gl. (8.7) für $S(\vec{x})$ soll als strahlenoptische Näherung aus einer Wellengleichung für $u(\vec{x})$ folgen, die es zu rekonstruieren gilt. Vergleich von (8.8) mit (8.11) legt nahe, dass einem Teilchen vom Impuls \vec{p} eine Welle mit Wellenvektor $\vec{k} \propto \vec{p}$ zugeordnet ist, wie von De Broglie (1923) postuliert. Die Proportionalität legte er fest durch

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}, \quad (8.13)$$

da dies zusammen mit $E = \hbar\omega$ (Einstein, 1905) eine relativistisch kovariante Beziehung zwischen 4-er Vektoren bildet, s. Kap. 9. Damit beschreibt S/\hbar die Phase von $u(\vec{x})$, und die HJ-Gl. (8.7)

$$\left(\vec{\nabla} \frac{S}{\hbar} \right)^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(\vec{x}))$$

ist die strahlenoptische Näherung zu

$$\Delta u(\vec{x}) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(\vec{x}))u(\vec{x}) = 0. \quad (8.14)$$

Gl. (8.14) ist die **zeitunabhängige Schrödingergleichung**: Sie beschreibt in der Wellenmechanik Zustände u der Energie E . Analog ist die zeitabhängige HJ-Gl. für das System (8.6),

$$\hbar \frac{\partial S}{\partial t \hbar} + \frac{\hbar^2}{2m} \left(\vec{\nabla} \frac{S}{\hbar} \right)^2 + V(\vec{x}) = 0$$

die strahlenoptische Näherung für die Phase S/\hbar einer Welle $\psi(\vec{x}, t) = A(\vec{x}, t)e^{iS(\vec{x}, t)/\hbar}$, die der **zeitabhängigen Schrödingergleichung**

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V\psi \quad (8.15)$$

genügt. Dies ist die **Bewegungsgleichung der Wellenmechanik** für das System (8.6): Sie bestimmt $\psi(\vec{x}, t)$ aus dem Anfangszustand $\psi(\vec{x}, 0)$. Gl. (8.14) geht aus (8.15) hervor durch den Ansatz

$$\psi(\vec{x}, t) = u(\vec{x})e^{-i\omega t} \quad \text{mit } E = \hbar\omega.$$

Für die Phase S/\hbar entspricht dies gerade dem Separationsansatz (7.49).

Die **statistische Deutung** der Zustände $\psi(\vec{x})$ stammt von Born (1926): Man normiere ψ so, dass

$$\int |\psi(\vec{x})|^2 d^3x = 1 .$$

Dann ist

$$\int_{\Omega} |\psi(\vec{x})|^2 d^3x$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich das Teilchen in $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ befindet. Der Zustand ψ bestimmt auch die Wahrscheinlichkeiten der Messresultate anderer Observablen — nicht nur des Orts \vec{x} — worauf wir hier aber nicht eingehen können.

Verallgemeinerung auf Systeme

Für allgemeine Systeme ist, im Gegensatz zu (8.6), der Konfigurationsraum nicht der \mathbb{R}^3 , wo die Optik lebt. Trotzdem ist die Verallgemeinerung auf Systeme vom Typ (7.7), d.h.

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} g^{\alpha\beta}(q) p_{\alpha} p_{\beta} + V(q) ,$$

naheliegend, wenn man den Konfigurationsraum als Riemannschen Raum nimmt mit der Metrik

$$ds^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha\beta}(q) dq^{\alpha} dq^{\beta} . \quad (8.16)$$

Die HJ-Gleichung (8.3) lautet

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} g^{\alpha\beta}(q) \frac{\partial S}{\partial q^{\alpha}} \frac{\partial S}{\partial q^{\beta}} + V(q) = E . \quad (8.17)$$

Jede Lösung $S(q)$ beschreibt durch die Gl. (8.4, 8.5)

$$p_{\alpha} = \sum_{\beta} g_{\alpha\beta} \dot{q}^{\beta} = \frac{\partial S}{\partial q^{\alpha}}$$

ein Bündel mechanischer Bahnen zur Energie E : die Orthogonaltrajektorien der Flächen $S(q) = \text{konst}$, orthogonal im Sinne der Metrik (8.16). Zu finden ist eine von der Wahl der Lagekoordinaten q unabhängige Wellengleichung für

$$u(q) = A(q) e^{iS(q)/\hbar} , \quad (8.18)$$

die in der strahlenoptischen Näherung auf (8.17) zurückführt. Dazu ist es natürlich, den Laplace-Operator Δ zu ersetzen durch den der Metrik (8.16) entsprechenden **Laplace-Beltrami Operator**

$$\Delta = \sum_{\alpha, \beta} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^{\alpha}} \sqrt{g} g^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial q^{\beta}} , \quad (g \equiv \det(g_{\alpha\beta})) . \quad (8.19)$$

Dieser Operator ist invariant unter beliebigen Transformationen der Lagekoordinaten, s. unten. Die zeitunabhängige Schrödingergleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2}\Delta u + Vu = Eu$$

führt mit dem Ansatz (8.18) wieder auf (8.17) in Gebieten, wo

$$\left| \frac{\Delta A}{A} \right| \ll \frac{2}{\hbar^2}(E - V(q)) .$$

Analog für die zeitabhängige Schrödingergleichung: In beliebigen Koordinaten lautet sie

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta \psi + V\psi ,$$

wobei $\psi = \psi(q, t)$ eine komplexe Funktion ist.

Wir überprüfen noch die Invarianz von (8.19) unter beliebigen Koordinatentransformationen $q^\alpha = q^\alpha(\bar{q})$, d.h.,

$$\Delta_g f(q) = \Delta_{\bar{g}} \bar{f}(\bar{q}) \quad (8.20)$$

für jede Funktion $f(q) = \bar{f}(\bar{q})$. Bei Koordinatenwechsel ist $dq^\alpha = \sum_\beta (\partial q^\alpha / \partial \bar{q}^\beta) d\bar{q}^\beta$, was in (8.16) eingesetzt das Transformationsverhalten der Metrik liefert:

$$\bar{g}_{\alpha\beta}(\bar{q}) = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}(q) \frac{\partial q^\mu}{\partial \bar{q}^\alpha} \frac{\partial q^\nu}{\partial \bar{q}^\beta} . \quad (8.21)$$

Insbesondere gilt $\bar{g} = g(\det(\partial q^\alpha / \partial \bar{q}^\beta))^2$, zusammen mit $d^f q = |\det(\partial q^\alpha / \partial \bar{q}^\beta)| d^f \bar{q}$ also

$$\sqrt{g} d^f q = \sqrt{\bar{g}} d^f \bar{q} . \quad (8.22)$$

Ferner gilt $\partial \bar{f} / \partial \bar{q}^\alpha = \sum_\mu (\partial f / \partial q^\mu) (\partial q^\mu / \partial \bar{q}^\alpha)$, womit

$$\bar{g}^{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{q}^\alpha} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{q}^\beta} = \sum_{\mu,\nu} \bar{g}^{\alpha\beta} \frac{\partial q^\mu}{\partial \bar{q}^\alpha} \frac{\partial q^\nu}{\partial \bar{q}^\beta} \frac{\partial f}{\partial q^\mu} \frac{\partial h}{\partial q^\nu} = \sum_{\mu,\nu} g^{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial q^\mu} \frac{\partial h}{\partial q^\nu} . \quad (8.23)$$

Gleichbedeutend mit (8.20) ist wegen (8.22)

$$\int \Delta_g f(q) h(q) \sqrt{g} d^f q = \int \Delta_{\bar{g}} \bar{f}(\bar{q}) \bar{h}(\bar{q}) \sqrt{\bar{g}} d^f \bar{q}$$

für alle Funktionen h mit kompaktem Träger. Die linke Seite lautet

$$\int \sum_{\alpha,\beta} \left(\frac{\partial}{\partial q^\alpha} \sqrt{g} g^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial q^\beta} \right) h(q) d^f q = - \int \sum_{\alpha,\beta} g^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial q^\beta} \frac{\partial h}{\partial q^\alpha} \sqrt{g} d^f q$$

nach partieller Integration. Wegen (8.22, 8.23) ist dies gleich dem selben Ausdruck mit Querstrichen.

Beispiel. In Euklidischen Raum mit kartesischen Koordinaten (x_1, x_2, x_3) ist $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ und (8.19) ist der übliche Laplace-Operator $\Delta = \sum_i \partial^2 / \partial x_i^2$. In Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) ist

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & r^2 & \\ & & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix},$$

wie man aus (8.16) entnimmt. Damit und mit $\sqrt{g} = r^2 \sin \theta$ findet man nach kurzer Rechnung

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right).$$

9 Relativistische Mechanik

1. Das Gesetz der Lichtausbreitung

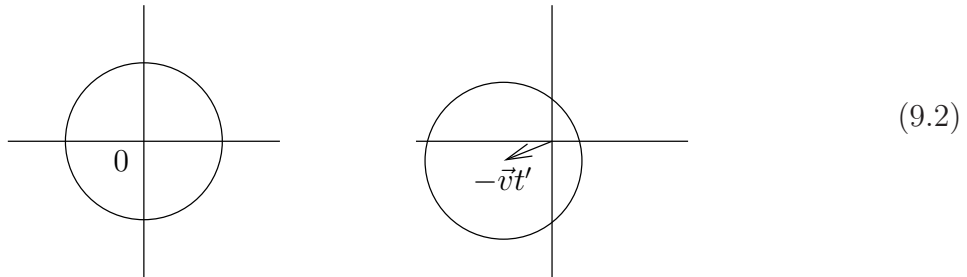
Das Gesetz der Lichtausbreitung

$$c^2(t_1 - t_2)^2 - (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2 = 0 \quad (9.1)$$

besagt, dass die Ereignisse (t_1, \vec{x}_1) und (t_2, \vec{x}_2) durch ein Lichtsignal verbunden werden können, und ist eine Folge der Maxwell-Gleichungen. Es ist aber nur invariant unter Galilei-Transformationen (1.5) mit $\vec{v} = 0$. Zum Beispiel beschreibt $|\vec{x}| = ct$ die Front einer vom Ereignis $(0, 0)$ ausgehenden Lichtwelle. Unter der Galilei-Transformation

$$t' = t, \quad \vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t$$

behält das auslösende Ereignis die Koordinaten $(0, 0)$, aber die Wellenfront zur Zeit $t = t'$ wird zur Kugel $|\vec{x}' + \vec{v}t'| = ct'$ mit Zentrum $-\vec{v}t'$:



Mechanik und Elektrodynamik zusammen zeichnen eine Klasse “ruhender” Bezugssysteme aus. Diese Vorstellung erschien solange natürlich, als man einen materiellen Äther als Träger des elektromagnetischen Feldes vermutete. Die Bewegung eines Inertialsystems relativ zum Äther liesse sich feststellen durch Abweichungen (9.2) vom Gesetz der Lichtausbreitung. Dies aber misslang (Michelson, Morley 1887).

2. Das Einsteinsche Relativitätsprinzip

Einstein (1905) befreit sich der klassischen Auffassung von Raum und Zeit. Er gibt die Invarianten (1.1, 1.2) preis und führt ein neues Relativitätsprinzip ein:

a) Definition: Inertialsysteme sind ausgezeichnet durch das Gesetz (9.1) der Lichtausbreitung und das Trägheitsgesetz (1.4):

$$\ddot{\vec{x}} = 0 \quad (9.3)$$

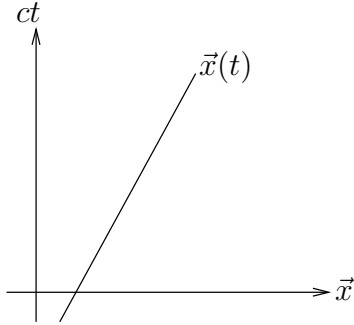
für freie Teilchen.

b) Postulat: Es gibt Inertialsysteme. Die Gesetze der Mechanik und Elektrodynamik lauten in jedem Inertialsystem gleich.

Daraus ergibt sich folgendes Programm: (a) Bestimmung der Gruppe der Transformationen die (9.1) und (9.3) invariant lassen (Lorentz-Transformationen). (b) Relativistische (d.h. Lorentz-invariante) Formulierung der Mechanik und der Elektrodynamik. Dabei zeigt sich, dass die Maxwell-Gleichungen bei passender Transformation der Felder

bereits Lorentz-invariant sind. Anders die Mechanik: Fernwirkungsgesetze (Bsp. Newtonsches Gravitationsgesetz (1.9)) sind a priori nicht-relativistisch, da sie sich auf die klassischen Invarianten (1.1, 1.2) berufen, z.B. auf den "Abstand zweier Körper zur gleichen Zeit". An ihre Stelle tritt die Feldwirkung: eine relativistische Theorie wechselwirkender Teilchen muss das gekoppelte System Materie & Feld beschreiben.

3. Lorentz-Transformationen



Als Koordinaten in einem Inertialsystem benützen wir

$$x = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \vec{x}) . \quad (9.4)$$

Das Trägheitsgesetz (9.3) besagt, dass die Bewegung eines freien Teilchens mit Koordinaten $x = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \vec{x})$ durch eine Gerade gegeben ist. Die gesuchten Transformationen (bijektive Abbildungen $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$) müssen deshalb geradentreu sein. Dies sind bloss die affinen Transformationen

$$x'^{\mu} = A^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu} . \quad (9.5)$$

Oder kurz: $x' = Ax + a$. Koordinatendifferenzen $\xi = x - y$ transformieren dabei homogen

$$\xi' = A\xi \quad (9.6)$$

(Größen, die so transformieren, heissen **4-er Vektoren**) und wegen (9.1) muss der **Lichtkegel**

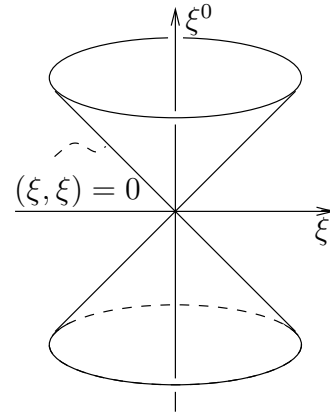
$$(\xi^0)^2 - \vec{\xi}^2 = 0$$

invariant sein. Die hier auftretende quadratische Form ist

$$(\xi, \xi) = g_{\mu\nu} \xi^{\mu} \xi^{\nu} = \xi^T g \xi$$

mit

$$g = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} . \quad (9.7)$$



Man zeigt (s. p. 94), dass (9.1) unter (9.5) invariant bleibt genau, falls

$$A^T g A = \alpha g \quad (9.8)$$

für ein $\alpha \neq 0$. Tatsächlich ist $\alpha > 0$. Dies folgt aus dem Trägheitssatz für quadratische Formen, oder geometrisch: $\alpha < 0$ würde bedeuten, dass unter (9.6) das (nicht zusammenhängende) Innere des Lichtkegels ($(\xi, \xi) > 0$) mit dem (zusammenhängenden) Äusseren ($(\xi, \xi) < 0$) vertauscht wird. Dies ist aber unmöglich.

Die Gruppe der Transformationen (9.5, 9.8) enthält die reinen Dilatationen

$$x \longmapsto \lambda x , \quad (\lambda > 0) ,$$

die einer Änderung der Zeit- und Längeneinheiten entsprechen. Wegen $\alpha > 0$ lässt sich jedes A eindeutig zerlegen in

$$A = \lambda \Lambda, \quad (\lambda > 0), \quad (9.9)$$

$$\Lambda^T g \Lambda = g. \quad (9.10)$$

Die durch (9.10) definierten Transformationen heissen **Lorentz-Transformationen** und bilden die **Lorentz-Gruppe** L . Beschränkt man sich auf Inertialsysteme mit **festen Massstäben**, so folgt aus deren Äquivalenz, dass der Faktor λ in (9.9) durch Λ bestimmt ist, also $A(\Lambda) = \lambda(\Lambda)\Lambda$. Die Gruppeneigenschaft dieser Transformationen verlangt

$$\lambda(\Lambda_1) \lambda(\Lambda_2) = \lambda(\Lambda_1 \Lambda_2). \quad (9.11)$$

Man kann zeigen, dass die einzige stetige Lösung $\lambda : L \rightarrow \mathbb{R}$ davon $\lambda \equiv 1$ ist.

Zusammenfassung: Die Gruppe der Transformationen, welche Inertialsysteme mit festen Massstäben verbinden, ist die Gruppe der inhomogenen Lorentz-Transformationen

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}, \quad \text{bzw.} \quad x' = \Lambda x + a.$$

Dies sind die affinen Transformationen mit der Invarianten

$$(x^0 - y^0)^2 - (\vec{x} - \vec{y})^2. \quad (9.12)$$

Durch (9.12) wird der \mathbb{R}^4 mit einer Metrik versehen, die in jedem Inertialsystem die Normalform (9.7) annimmt.

Anwendung. Zeitdilatation: Sei $\Delta t = t_B - t_A$ die Zeitdifferenz zweier Ereignisse A, B in einem Inertialsystem, wo sie am selben Ort stattfinden (z.B. Zeitanzeigen einer Uhr in ihrem Ruhesystem): $\Delta \vec{x} = 0$. In einem Bezugssystem, in welchem ersteres die Relativgeschwindigkeit v hat, beträgt die Zeitdifferenz beider Ereignisse

$$|\Delta t'| = \gamma |\Delta t|, \quad \gamma = (1 - (v/c)^2)^{-1/2} \geq 1.$$

Dies folgt aus (9.12), d.h. $c^2(\Delta t')^2 - (\Delta \vec{x}')^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta \vec{x})^2$ und $|\Delta \vec{x}'| = v|\Delta t'|$.

Diskussion der Lorentz-Gruppe

Durch Bildung der Determinante, bzw. der (00)-Komponente von (9.10) folgt für $\Lambda \in L$

$$(\det \Lambda)^2 = 1,$$

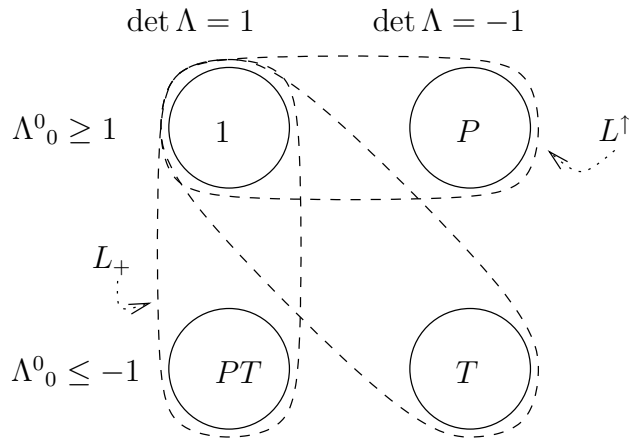
$$(\Lambda^0_0)^2 - \sum_{k=1}^3 (\Lambda^k_0)^2 = 1.$$

Dass alle 4 Fälle auftreten, zeigen die **Spiegelungen**

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix},$$

$$T = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad PT = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix},$$

Somit zerfällt L in 4 disjunkte Komponenten



die selber eine Untergruppe bilden. Weitere Untergruppen sind z.B.

$$\begin{aligned}
 L_+ &= \{\Lambda \in L \mid \det \Lambda = 1\} && \text{eigentliche Lorentz-Transformationen} \\
 L^\uparrow &= \{\Lambda \in L \mid \Lambda^0_0 \geq 1\} && \text{orthochrone Lorentz-Transformationen} \\
 L^\uparrow_+ &= L_+ \cap L^\uparrow. && \tag{9.13}
 \end{aligned}$$

Dass L^\uparrow eine Gruppe ist, sieht man geometrisch: $\Lambda \in L$ bildet das Innere des Lichtkegels auf sich ab und die beiden Teilkegel

$$V_\pm = \{\xi \mid (\xi, \xi) > 0, \pm \xi^0 \geq 0\}$$

bleiben invariant oder werden vertauscht. Entscheidend ist das Vorzeichen $\text{sgn}(\Lambda^0_0)$, da $\Lambda : (1, \vec{0}) \mapsto (\Lambda^0_0, \Lambda^1_0, \Lambda^2_0, \Lambda^3_0)$. Somit sind $\text{sgn}(\Lambda^0_0)$ und $\det \Lambda$ multiplikativ unter Gruppenmultiplikation.

Jedes $\Lambda \in L$ ist das Produkt eines Elements aus L^\uparrow_+ mit einer Spiegelung. Wir beschränken uns deshalb auf die

Diskussion von L^\uparrow_+

1) Räumliche Drehungen

$$\Lambda = \left(\begin{array}{c|ccc} * & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & * & \\ 0 & & & \end{array} \right) \implies \Lambda = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & R & \\ 0 & & & \end{array} \right) = \Lambda(R) \tag{9.14}$$

mit $R \in \text{SO}(3)$, wie aus (9.10, 9.13) folgt.

2) Spezielle Lorentz-Transformationen (Boosts) sind charakterisiert durch die Blockform

$$\Lambda = \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & & 0 \\ c & d & & 0 \\ \hline & & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{array} \right) \implies \Lambda = \left(\begin{array}{cc|cc} \text{ch } \chi & -\text{sh } \chi & & 0 \\ -\text{sh } \chi & \text{ch } \chi & & 0 \\ \hline & & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{array} \right) = \Lambda(\chi) \tag{9.15}$$

für ein $\chi \in \mathbb{R}$. Beweis: (9.10) lautet

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - c^2 & ab - cd \\ ab - cd & b^2 - d^2 \end{pmatrix} .$$

Aus $a = \Lambda^0_0 \geq 1$ und $a^2 - c^2 = 1$ folgt $a = \text{ch } \chi, c = -\text{sh } \chi$ für ein $\chi \in \mathbb{R}$. Aus $ab - cd = 0$ folgt $(b, d) = \lambda(-\text{sh } \chi, \text{ch } \chi)$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Schliesslich ist $1 = \det \Lambda = \lambda(\text{ch }^2 \chi - \text{sh }^2 \chi) = \lambda$.

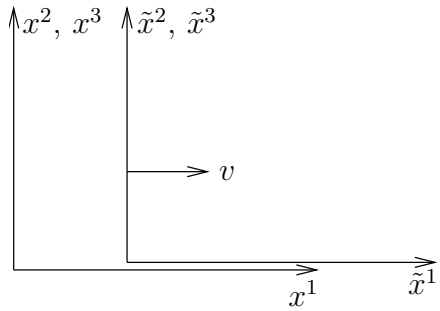
Die Boosts bilden eine Untergruppe, und zwar mit dem Multiplikationsgesetz

$$\Lambda(\chi_1)\Lambda(\chi_2) = \Lambda(\chi_1 + \chi_2) . \quad (9.16)$$

Bedeutung der Boosts: $\tilde{x} = \Lambda(\chi)x$ lautet ausgeschrieben

$$\begin{aligned} c\tilde{t} &= (\text{ch } \chi)ct - (\text{sh } \chi)x^1, & \tilde{x}^2 &= x^2, \\ \tilde{x}^1 &= -(\text{sh } \chi)ct + (\text{ch } \chi)x^1, & \tilde{x}^3 &= x^3. \end{aligned} \quad (9.17)$$

Ein im neuen Koordinatensystem ruhender Punkt folgt im alten der Bahn



$$\begin{aligned} x^1 &= (\text{ch } \chi)^{-1}\tilde{x}^1 + (\text{th } \chi)ct, \\ x^2 &= \tilde{x}^2, \quad x^3 = \tilde{x}^3. \end{aligned}$$

$\Lambda(\chi)$ transformiert also auf ein neues Inertialsystem, das sich gegenüber dem alten gleichförmig in 1-Richtung bewegt mit der Relativgeschwindigkeit

$$v = c \cdot \text{th } \chi ,$$

womit $-c < v < c$. Mit

$$\text{ch } \chi = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \text{sh } \chi = \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

lautet (9.17)

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \frac{t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{vx^1/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, & \tilde{x}^2 &= x^2, \\ \tilde{x}^1 &= -\frac{vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{x^1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, & \tilde{x}^3 &= x^3. \end{aligned} \quad (9.18)$$

Schreiben wir dafür $\Lambda(v)$ statt $\Lambda(\chi)$, so lautet (9.16) nun $\Lambda(v_1)\Lambda(v_2) = \Lambda(v)$ mit

$$v = c \cdot \text{th } (\chi_1 + \chi_2) = c \frac{\text{th } \chi_1 + \text{th } \chi_2}{1 + \text{th } \chi_1 \cdot \text{th } \chi_2} = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \quad (9.19)$$

(Additionsgesetz der Geschwindigkeiten). Im Limes $c \rightarrow \infty$ gehen die Boosts (9.18) über in die Galilei-Transformationen

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{x}^1 = x^1 - vt, \quad \tilde{x}^2 = x^2, \quad \tilde{x}^3 = x^3$$

und (9.19) in $v = v_1 + v_2$.

Lässt man den Boosts (9.15) noch eine Drehung (9.14) vorangehen bzw. nachfolgen, so erhält man alle $\Lambda \in L_+^\uparrow$:

Zerlegungssatz. Jede Lorentz-Transformation $\Lambda \in L_+^\uparrow$ lässt sich schreiben als

$$\Lambda = \Lambda(R_1)\Lambda(\chi)\Lambda(R_2) . \quad (9.20)$$

Beweis. Sei $y = \Lambda x$: Betrachte den Unterraum

$$M = \{x \mid x^0 = y^0 = 0\} .$$

Es gibt zwei Fälle:

a) $\dim M = 3$. Dann ist $M = \{x^0 = 0\} = \{y^0 = 0\}$. M ist also invariant unter Λ , ebenso das orthogonale Komplement

$$M^\perp = \{x \mid x^1 = x^2 = x^3 = 0\}$$

im Sinne der Metrik (9.7). Somit hat Λ die für Drehungen typische Blockform (9.14).

b) $\dim M = 2$. Wir wählen in M zwei orthonormierte Vektoren e_2, e_3 . Durch eine passende Drehung in $\{x^0 = 0\} \supset M$ (bzw. in $\{y^0 = 0\} \supset M$) können wir erreichen, dass e_2, e_3 mit den 2- und 3-Richtungsvektoren in den x - (bzw. y -) Koordinaten übereinstimmen. Dann ist $M = \{x^0 = x^1 = 0\} = \{y^0 = y^1 = 0\}$ unter Λ punktweise invariant. $M^\perp = \{x^2 = x^3 = 0\}$ ist zumindest als Menge invariant. Also hat Λ die für Boosts typische Blockform (9.15). \square

Nachtrag zur Herleitung der Lorentz-Transformationen.

Lemma 1. Sei $A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $\det A \neq 0$. Falls A die Gleichung $(\xi, \xi) = \xi^T g \xi = 0$ invariant lässt, dann ist

$$A^T g A = \alpha g , \quad \alpha \neq 0 .$$

Beweis. Aus $\xi^0 = \pm |\vec{\xi}|$ folgt $(\xi, \xi) = 0$. Somit muss gelten

$$\begin{aligned} 0 &= (A\xi, A\xi) = \xi^T \underbrace{A^T g A}_{B=B^T} \xi = B_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu \\ &= \sum_{k=1}^3 (B_{00} + B_{kk}) \underline{(\xi^k)^2} \pm 2 \sum_{k=1}^3 B_{0k} \underline{|\vec{\xi}| \xi^k} + 2 \sum_{i < k} B_{ik} \underline{\xi^i \xi^k} \end{aligned}$$

für alle $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^3$. Da die unterstrichenen Funktionen linear unabhängig sind, folgt

$$B_{ik} = 0 , \quad B_{0k} = 0 , \quad B_{kk} = -B_{00} ,$$

d.h. $B = B_{00}g$ und wegen $\det A \neq 0$ ist $B_{00} \neq 0$. \square

Lemma 2. Sei $\lambda : L \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $\lambda(\cdot) > 0$ und (9.11). Dann ist $\lambda \equiv 1$.

Beweis. Nach (9.11, 9.20) genügt es, $\lambda(\Lambda) = 1$ zu zeigen für Λ (i) eine Spiegelung, (ii) einen Boost, und (iii) eine Drehung.

- (i) Aus $\Lambda^2 = 1$ folgt $\lambda(\Lambda)^2 = 1$, also $\lambda(\Lambda) = 1$.
(ii) Es gilt $\Lambda(-\chi) = P\Lambda(\chi)P$. Wegen $\lambda(P) = 1$ ist also $\lambda(-\chi) = \lambda(\chi)$. Aus $\Lambda(-\chi)\Lambda(\chi) = 1$ folgt $\lambda(\chi)^2 = 1$.
(iii) Jede Drehung $R \in \text{SO}(3)$ ist eine Drehung um eine feste Achse \vec{e} mit Winkel φ . Bei festem \vec{e} ist $R(\varphi_1)R(\varphi_2) = R(\varphi_1 + \varphi_2)$ und $R(2\pi) = 1$. Also: $\lambda(\varphi_1)\lambda(\varphi_2) = \lambda(\varphi_1 + \varphi_2)$ und $\lambda(2\pi) = 1$. Sei nun $\varphi = 2\pi m/n$ (m, n ganz). Dann ist $\lambda(\varphi)^n = \lambda(2\pi)^m = 1$, d.h. $\lambda(\varphi) = 1$. Da λ stetig ist, folgt $\lambda(\varphi) = 1$ für alle φ . \square

4. Die Struktur der Minkowski Raum-Zeit

Die Raum-Zeit der speziellen Relativitätstheorie soll noch koordinatenfrei beschrieben werden, analog zur Galilei-Raumzeit auf p. 9.

Definition. Eine **Minkowski-Raumzeit** ist ein 4-dimensionaler affiner Raum E mit der Eigenschaft: Auf dem Differenzraum V existiert eine ausgezeichnete symmetrische Bilinearform (\cdot, \cdot) der Signatur $(+, -, -, -)$.

Dadurch ausgezeichnet sind Koordinatensysteme (O, e_0, e_1, e_2, e_3) ($O \in E, e_\mu \in V$) mit

$$(e_\mu, e_\nu)_{\mu, \nu=0, \dots, 3} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

(Interpretation: Inertialsysteme). Transformationen unter solchen Koordinatensystemen sind die inhomogenen Lorentztransformationen

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu, \quad (a \in \mathbb{R}^4, \Lambda \in L).$$

Beachte, dass die Struktur einer Minkowski-Raumzeit einfacher ist als die einer Galilei-Raumzeit.

5. Relativistische Mechanik

Die Bewegung eines Teilchens ist dargestellt im \mathbb{R}^4 durch seine **Weltlinie** $x(\lambda) = (x^0(\lambda), \vec{x}(\lambda))$, wobei λ ein beliebiger Kurvenparameter ist, z.B. die Zeitkoordinate:

$$x(t) = (ct, \vec{x}(t)). \quad (9.21)$$

Unabhängig vom Kurvenparameter und Lorentz-invariant ist die Bogenlänge

$$\int_{(1)}^{(2)} d\lambda \left(\frac{dx}{d\lambda}, \frac{dx}{d\lambda} \right)^{1/2} = \int_{(1)}^{(2)} ds,$$

wobei (\cdot, \cdot) das Skalarprodukt zur Metrik (9.7) ist. Die Bogenlänge s ist charakterisiert durch

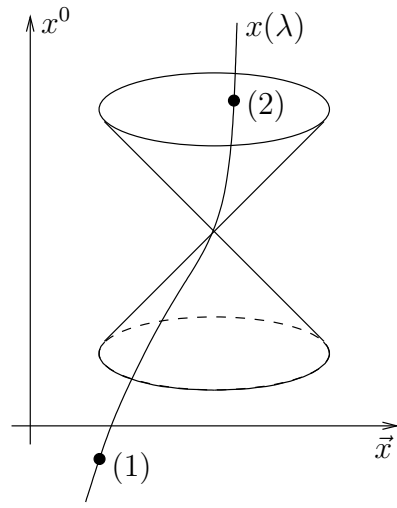
$$\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dx}{ds}\right) = 1, \quad (9.22)$$

d.h.

$$ds^2 = (dx, dx) = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

Sie ist somit bis auf Transformationen $s' = \lambda s + a$ ($\lambda = \pm 1, a \in \mathbb{R}$) eindeutig. Statt s benützen wir die **Eigenzeit** $\tau = s/c$. Aus (9.21) folgt dann mit $\vec{v} = d\vec{x}/dt$

$$\begin{aligned} ds^2 &= (c^2 - v^2) dt^2, \\ d\tau &= dt \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}. \end{aligned} \quad (9.23)$$



– Der Name Eigenzeit rührt davon her, dass $d\tau = dt$ im Ruhesystem des Teilchens (ein Inertialsystem, in dem das Teilchen momentan die Geschwindigkeit Null hat).

– Wir haben $v < c$ vorausgesetzt. Geometrisch bedeutet dies, dass die Weltlinie innerhalb des Lichtkegels durch jeden ihrer Punkte verläuft. Diese Bedingung ist mit der Bewegungsgleichung verträglich (siehe später): gilt sie zu einer Zeit, so zu allen.

– Durch die Wahl der positiven Wurzel in (9.23) hat $d\tau$ stets das Vorzeichen von dt . Deshalb ist $d\tau$ ein Pseudoskalar unter Lorentz-Transformationen,

$$d\bar{\tau} = \text{sgn}(\Lambda^0_0) d\tau.$$

Wir bilden die Pseudovektoren

$$\begin{aligned} u &= \frac{dx}{d\tau} \quad (\mathbf{4\text{-er Geschwindigkeit}}), \\ p &= mu \quad (\mathbf{4\text{-er Impuls}}). \end{aligned}$$

Hier ist $m > 0$ die (Lorentz-invariante) **Masse** des Teilchens. Aus (9.22) folgt

$$(u, u) = c^2, \quad (p, p) = m^2 c^2. \quad (9.24)$$

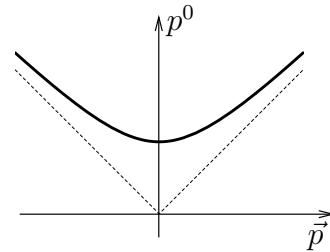
In Komponenten ist

$$u^\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}(c, \vec{v}), \quad p^\mu = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}(c, \vec{v}), \quad (9.25)$$

womit stets $p^0 > 0$ ist. Der 4-er Impuls liegt auf einem durch m bestimmten ‘Massenhyperboloid’ im \mathbb{R}^4 :

$$(p^0)^2 - \vec{p}^2 = m^2 c^2, \quad (9.26)$$



bzw. $p^0 = \sqrt{m^2 c^2 + \vec{p}^2}$.



Analog zu (1.6) postuliert man, dass der Gesamtimpuls P^μ eines isolierten Systems erhalten sei. (Da P^μ ein 4-er Vektor ist, genügt dafür, dass der räumliche Anteil \vec{P} in jedem

Inertialsystem erhalten ist). Im Unterschied zum nicht relativistischen Fall ist dann die Gesamtmasse nicht erhalten!

Beispiel. Symmetrischer Zerfall:

vorher:  $P^\mu = (Mc, \vec{0})$
 nacher:  $P^\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (2mc, \vec{0})$

Somit ist

$$2m = M\sqrt{1 - v^2/c^2} < M :$$

die Gesamtmasse ist nicht erhalten! Der Massendefekt, mal c^2 , ist

$$(M - 2m)c^2 = 2m\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right)c^2 = 2 \cdot \frac{1}{2}mv^2 + \dots, \quad (9.27)$$

für $v \ll c$ also gleich der nichtrelativistischen Energie der Zerfallsprodukte.

6. Bewegungsgleichung

Die Weltlinien freier Teilchen sind Geraden im \mathbb{R}^4 , und damit Geodäten im Sinne der lorentzinvarianten Metrik $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, also charakterisiert durch das Variationsprinzip

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} ds = 0 \quad (9.28)$$

bei festen Endpunkten im \mathbb{R}^4 . In jedem Inertialsystem können wir dies nach (9.23) schreiben als Hamilton-Prinzip

$$0 = \delta \int_{(1)}^{(2)} -mc^2 d\tau = \delta \int_{(1)}^{(2)} L_0(\vec{v}) dt$$

zur Lagrange-Funktion

$$L_0(\vec{v}) = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}.$$

Der an sich willkürliche Faktor $-mc^2$ wird deshalb gewählt, weil dann für $v \ll c$

$$L_0(\vec{v}) = -mc^2 + \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + \dots$$

äquivalent wird zur nicht-relativistischen Lagrange-Funktion des freien Teilchens: $\frac{1}{2}m\vec{v}^2$
 In diesem Grenzfall kennen wir auch den Zusatzterm (5.24)

$$-e\left(\varphi - \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{A}\right),$$

der die Kopplung des Teilchens an ein äusseres **elektromagnetisches Feld** beschreibt. Diesen übernehmen wir unverändert in die relativistische Lagrange-Funktion:

$$L(\vec{x}, \vec{v}, t) = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} - e\left(\varphi - \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{A}\right). \quad (9.29)$$

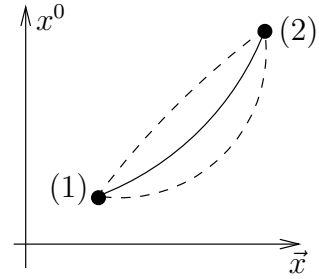
Fasst man $A = (\varphi, \vec{A})$ als 4-er Vektor auf (s. Vorlesung 'Elektrodynamik), so ist

$$Ldt = -\left(mc^2 + \frac{e}{c}(u, A)\right)d\tau$$

lorentzinvariant, und das Hamiltonsche Variationsprinzip für die Weltlinie des Teilchens hat die lorentzinvariante Form

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} \left(mc^2 + \frac{e}{c}(u, A)\right) d\tau = 0$$

bei festen Endpunkten im \mathbb{R}^4 .



Die Bewegungsgleichungen eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld sind die Euler-Lagrange-Gl. zu (9.29):

$$\frac{d}{dt} \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = e \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{B} \right), \quad (9.30)$$

denn an der nicht-relativistischen Rechnung auf p. 48 ist bloss zu ersetzen

$$\frac{\partial}{\partial \vec{v}} \frac{mv^2}{2} = m\vec{v} \quad \longrightarrow \quad -mc^2 \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

d.h. $m\vec{v} \rightarrow \vec{p}$. Durch (9.30) ist auch dp^0/dt bestimmt: Ableitung von (9.26) nach t liefert

$$c \frac{dp^0}{dt} = c \frac{\vec{p}}{p^0} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{v} \cdot \vec{E}. \quad (9.31)$$

Dies ist der **Energiesatz**: Rechts steht die Leistung der Lorentzkraft. Also ist

$$cp^0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

als relativistische **kinetische Energie** aufzufassen. Die Leistung (9.31) ist über ein endliches Zeitintervall beschränkt, falls \vec{E} es ist; dann ist es auch cp^0 , womit das Teilchen $v = c$ nicht erreichen kann. Für $v \ll c$ ist

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \dots$$

$\frac{1}{2}mv^2$ ist die nichtrelativistische kinetische Energie. mc^2 heisst **Ruheenergie** des Teilchens. Sie spielt, vgl. (9.27), bei Streuprozessen eine Rolle.

Der kanonische Impuls zu (9.29)

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{e}{c}\vec{A}$$

unterscheidet sich vom räumlichen Anteil des kinetischen Impulses, wie auch schon im nicht-relativistischen Fall. Es folgt

$$\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + m^2c^2 = \frac{m^2v^2}{1 - v^2/c^2} + m^2c^2 = \frac{m^2c^2}{1 - v^2/c^2}$$

und daraus die **Hamiltonfunktion** eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld:

$$\begin{aligned} H(\vec{x}, \vec{p}, t) &= \vec{p} \cdot \vec{v} - L = \frac{mv^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + e\varphi \\ &= c \left[\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{x}, t)\right)^2 + m^2c^2 \right]^{1/2} + e\varphi(\vec{x}, t). \end{aligned}$$

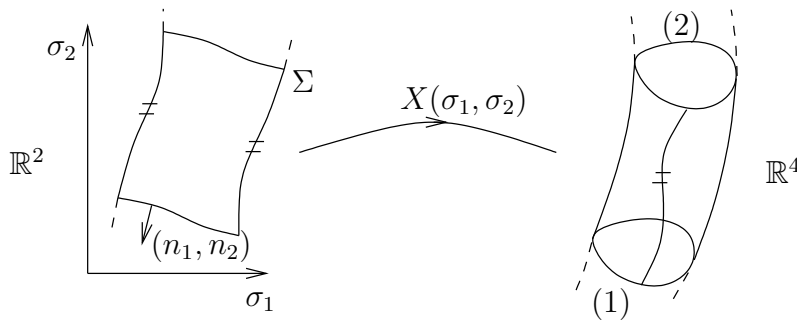
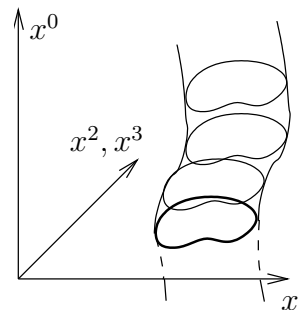
7. Klassische Strings

String-Theorie verfolgt, grob gesprochen, die Möglichkeit, dass Elementarteilchen nicht punktförmig, sondern Anregungen eines ausgedehnten 1-dimensionalen Objekts sind.

Geschlossene Strings sind Schleifen im \mathbb{R}^3 . Ihre Bewegung ist dargestellt durch eine 2-dimensionale "Weltfläche" in der Raumzeit \mathbb{R}^4 . (Interessanter sind zwar Raum-Zeit-Dimensionen $D \neq 4$, insbesondere $D = 26$):

$$X(\sigma_1, \sigma_2) = (X^\mu(\sigma_1, \sigma_2))_{\mu=0, \dots, 3},$$

wobei $(\sigma_1, \sigma_2) \in \Sigma$ beliebige Flächenparameter sind:



Unabhängig von der Parametrisierung und lorentzinvariant ist die **Fläche**

$$\int_{\Sigma} d\sigma_1 d\sigma_2 \left(- \underbrace{\det(h_{ij})}_{\equiv h} \right)^{1/2} =: \int_{(1)}^{(2)} dA, \quad (9.32)$$

wobei $(h_{ij})_{ij=1,2}$ die durch (\cdot, \cdot) auf Σ induzierte Metrik ist:

$$h_{ij} = \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma_i}, \frac{\partial X}{\partial \sigma_j} \right) = g_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma_i} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma_j}.$$

Zum Vergleich: Vertraut ist der Fall $D = 3$ mit Euklidischer Metrik, wo

$$h = h_{11}h_{22} - h_{12}^2 = \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma_1}\right)^2 \cdot \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma_1} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma_2}\right)^2 = \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma_1} \wedge \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma_2}\right)^2.$$

In (9.32) haben wir für (h_{ij}) Signatur $(+, -)$ vorausgesetzt, also $h < 0$. Geometrisch bedeutet dies, dass die Weltfläche den Lichtkegel durch jeden seiner Punkte schneidet.

Bewegungsgleichung. Postuliert wird das zu (9.28) analoge Variationsprinzip (Nambu, 1970)

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} dA = \delta \int_{\Sigma} d\sigma_1 d\sigma_2 \underbrace{(-h)^{1/2}}_{\equiv L\left(\frac{\partial X}{\partial \sigma_1}, \frac{\partial X}{\partial \sigma_2}\right)} = 0 \quad (9.33)$$

bei **festen Endschleifen** (1), (2) im \mathbb{R}^4 . Die linke Seite ist nach dem Satz von Gauss gleich

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma} d\sigma_1 d\sigma_2 \frac{\partial L}{\partial(\partial X^\mu / \partial \sigma_i)} \cdot \frac{\partial}{\partial \sigma_i} \delta X^\mu \\ &= - \int_{\Sigma} d\sigma_1 d\sigma_2 \left(\frac{\partial}{\partial \sigma_i} \frac{\partial L}{\partial(\partial X^\mu / \partial \sigma_i)} \right) \cdot \delta X^\mu + \int_{\partial \Sigma} dn_i \frac{\partial L}{\partial(\partial X^\mu / \partial \sigma_i)} \cdot \underbrace{\delta X^\mu}_{=0} \end{aligned} \quad (9.34)$$

(Summenkonvention bzgl. μ, i). Damit lauten die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_i} \frac{\partial L}{\partial(\partial X^\mu / \partial \sigma_i)} = 0. \quad (9.35)$$

Für $L = (-h)^{1/2}$ findet man mit

$$\frac{\partial(-h)^{1/2}}{\partial(\dots)} = -\frac{1}{2}(-h)^{-1/2} \frac{\partial h}{\partial(\dots)}, \quad \frac{\partial h}{\partial(\dots)} = h \cdot h^{jk} \frac{\partial h_{jk}}{\partial(\dots)},$$

wobei (h^{jk}) die zu (h_{jk}) inverse Matrix ist, und mit

$$\frac{\partial h_{jk}}{\partial(\partial X^\mu / \partial \sigma_i)} = g_{\mu\nu} \left(\delta_{ij} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma_k} + \delta_{ik} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma_j} \right),$$

dass

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial X^\mu / \partial \sigma_i)} = g_{\mu\nu} (-h)^{1/2} h^{ij} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma_j}. \quad (9.36)$$

Für die Bewegungsgleichungen (9.35) bedeutet dies

$$\square_h X^\nu = 0, \quad (9.37)$$

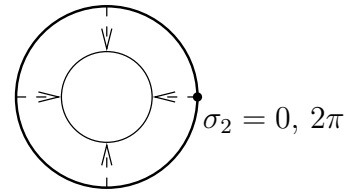
wobei (vgl. (8.19))

$$\square_h = (-h)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial \sigma_i} (-h)^{1/2} h^{ij} \frac{\partial}{\partial \sigma_j}$$

der Laplace-Beltrami (d'Alembert) Operator zur Metrik (h_{ij}) ist. Beachte, dass die Wellengleichung (9.37) nicht linear in X ist, da (h_{ij}) selbst davon abhängt.

Beispiel. $(\sigma_1, \sigma_2) \in \Sigma = \mathbb{R} \times [0, 2\pi]$,

$$X(\sigma_1, \sigma_2) = A(\sigma_1, \cos \sigma_1 \cos \sigma_2, \cos \sigma_1 \sin \sigma_2, 0),$$



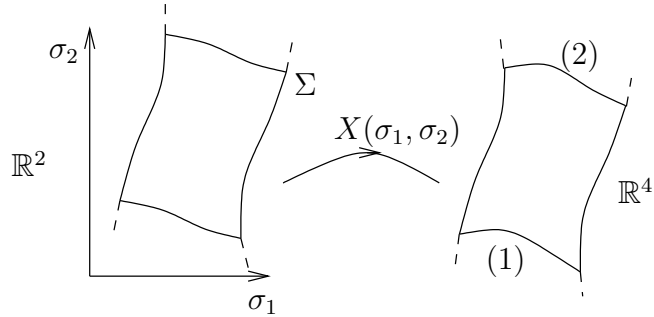
(d.h. $\sigma_1 \cong \text{Zeit}$). Damit ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial \sigma_1} &= A(1, -\sin \sigma_1 \cos \sigma_2, -\sin \sigma_1 \sin \sigma_2, 0), \\ \frac{\partial X}{\partial \sigma_2} &= A(0, -\cos \sigma_1 \sin \sigma_2, \cos \sigma_1 \cos \sigma_2, 0), \\ h_{ij} &= A^2 \cos^2 \sigma_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (-h)^{1/2} h^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \square_h &= A^{-2} \cos^{-2} \sigma_1 \left(\frac{\partial^2}{\partial \sigma_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial \sigma_2^2} \right) \end{aligned} \quad (9.38)$$

und (9.37) gilt ersichtlich.

Betrachtet werden auch **offene Strings** mit demselben Variationsprinzip (9.33). Die seitlichen Teile des Randes $(\partial\Sigma)_s$ werden aber unter $X(\sigma_1, \sigma_2)$ nicht mehr identifiziert. Da dort δX^μ beliebig ist, folgt aus (9.34, 9.36) zusätzlich

$$n_i (-h)^{1/2} h^{ij} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma_j} = 0 \quad (9.39)$$



auf den Weltlinien der Endpunkte der String. Das Längenquadrat des 4-er Vektors (9.39) ist

$$0 = (-h) n_i h^{ij} n_k h^{kl} \underbrace{\left(\frac{\partial X}{\partial \sigma_j}, \frac{\partial X}{\partial \sigma_l} \right)}_{h_{jl}} = (-h) h^{ik} n_i n_k$$

und $= (-h) h^{22}$ in Koordinaten, wo die Weltlinie eines Endpunktes gegeben ist durch $\{\sigma_2 = 0\}$, bzw. durch $\sigma_1 \mapsto X(\sigma_1, 0)$. Zusammen mit $h h^{22} = h_{11}$ (Inversion einer 2×2 Matrix!) folgt

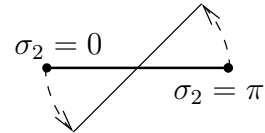
$$0 = h_{11} = \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma_1}, \frac{\partial X}{\partial \sigma_1} \right) :$$

die Endpunkte der String bewegen sich mit Lichtgeschwindigkeit!

Beispiel. $(\sigma_1, \sigma_2) \in \Sigma = \mathbb{R} \times [0, \pi]$,

$$X(\sigma_1, \sigma_2) = A(\sigma_1, \cos \sigma_1 \cos \sigma_2, \sin \sigma_1 \cos \sigma_2, 0),$$

(d.h. $\sigma_1 \cong \text{Zeit}$). Nun ist



$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial \sigma_1} &= A(1, -\sin \sigma_1 \cos \sigma_2, \cos \sigma_1 \cos \sigma_2, 0) , \\ \frac{\partial X}{\partial \sigma_2} &= A(0, -\cos \sigma_1 \sin \sigma_2, -\sin \sigma_1 \sin \sigma_2, 0) ,\end{aligned}$$

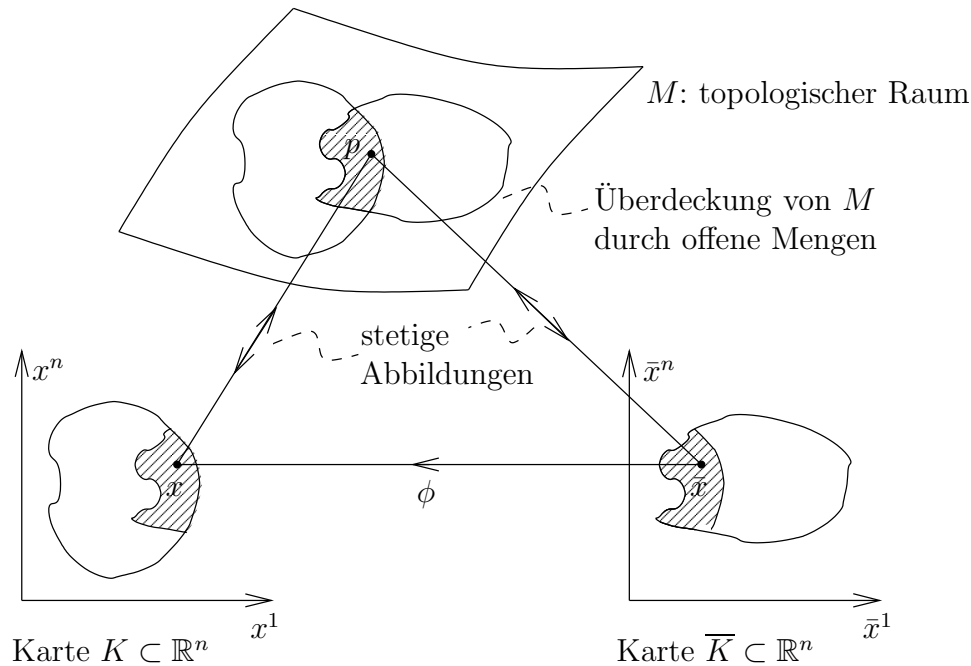
und (9.38) gilt mit der Ersetzung $\cos \sigma_1 \rightarrow \sin \sigma_2$, womit (9.37) immer noch zutrifft. Die Randbedingung (9.39) lautet

$$\frac{\partial X}{\partial \sigma_2} = 0 \quad \text{bei } \sigma_2 = 0, \pi$$

und ist ebenfalls erfüllt.

1. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Eine n -dimensionale **differenzierbare Mannigfaltigkeit** M ist ein Raum, der "lokal wie \mathbb{R}^n aussieht". Wir verzichten auf eine mathematische strenge Definition. Stattdessen beschreibt folgende Figur die Umgebung eines beliebigen Punkts $p \in M$:



Im schraffierten Überlappungsgebiet zweier Karten sind die Koordinatentransformationen $x = \phi(\bar{x})$ beliebig oft differenzierbar.

Eine **pseudo-Riemannsche** Mannigfaltigkeit trägt eine ausgezeichnete (nicht notwendigerweise positiv definite) **Metrik** g : Diese bestimmt die Bogenlänge einer Kurve in M , und zwar in einer Karte durch

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu ,$$

wobei $(g_{\mu\nu}(x))$ eine symmetrische Matrix ist. Bei Kartenwechsel $x = \phi(\bar{x})$ transformiert diese gemäß (8.21) mit x statt q . **Geodäten** $x(\tau)$ sind charakterisiert durch

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} \underbrace{(g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu)^{1/2}}_{\equiv L(x, \dot{x})} d\tau = 0 \quad (10.1)$$

(feste Endpunkte in M), wobei $\cdot = d/d\tau$ und τ ein beliebiger Kurvenparameter ist. Ein **affiner Kurvenparameter** τ liegt vor, falls $L(x, \dot{x})$ längs der Kurve konstant ist ($= k$; Bsp. Bogenlänge $k = 1$ oder Eigenzeit $k = c$). Eine so parametrisierte Geodäte ist nach p. 57 auch eine Bahn zur Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = L^2 = g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu . \quad (10.2)$$

Umgekehrt ist längs einer Bahn zu (10.2) wegen $\partial\mathcal{L}/\partial\tau = 0$ und (5.35)

$$\kappa = \dot{x}^\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^\mu} - \mathcal{L} = 2\mathcal{L} - \mathcal{L} = \mathcal{L}$$

erhalten, also (für $\kappa > 0$) eine affin parametrisierte Bahn zu (10.1) mit $k = \sqrt{\kappa}$. Der Vorteil von \mathcal{L} über L liegt darin, dass $\kappa \leq 0$ sein darf.

Die Euler-Lagrange Gleichung zu (10.2) ist die Geodätengleichung (5.50)

$$\ddot{x}^\mu + \underbrace{\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(g_{\alpha\nu,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu})}_{\equiv \Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x)} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0 \quad (10.3)$$

wobei $_{,\alpha} = \partial/\partial x^\alpha$ und $(g^{\mu\nu}(x))$ die zu $(g_{\mu\nu}(x))$ inverse Matrix bezeichnet. Die $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ heißen Christoffel-Symbole .

2. Die Raum-Zeit Struktur der ART

Die Raum-Zeit Struktur der speziellen Relativitätstheorie entspricht dem Spezialfall $M = \mathbb{R}^4$ mit

$$g_{\mu\nu}(x) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \equiv \eta_{\mu\nu} \quad (10.4)$$

konstant, wobei $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ die Bedeutung von Koordinaten bzgl. eines Inertialsystems haben. Dort ist natürlich $\Gamma^\mu_{\alpha\beta} \equiv 0$ und (10.3) (Trägheitsbahn) reduziert sich auf $\ddot{x}^\mu = 0$. Bezüglich eines allgemeinen, nicht inertialen Bezugssystems mit Koordinaten \bar{x} ist aber $\bar{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta} \neq 0$ und die rechte Seite in

$$m\ddot{\bar{x}}^\mu = -m\bar{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta}\dot{\bar{x}}^\alpha\dot{\bar{x}}^\beta$$

wird als **Scheinkraft** auf das freie Teilchen der trägen Masse m aufgefasst. Einstein (1907) interpretiert die Gleichheit von schwerer und träger Masse dahingehend, dass die **Gravitation eine Scheinkraft ist**: Sie lässt sich ja eliminieren durch Übergang auf ein **frei fallendes** Bezugssystem, allerdings nur **lokal** (vgl. p. 7).

Auf dieser Spur gelangte Einstein (1912) zur folgenden Auffassung von Raum und Zeit:

1) Die Raumzeit ist eine 4-dimensionale pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit M , deren Metrik g in jedem Punkt die Signatur $(+, -, -, -)$ hat.

2) In einem gegebenen Koordinatensystem beschreiben die Bewegungsgleichungen (10.3) die Bewegung frei fallender Teilchen. Genauer: Trägheitsbahnen sind **zeitartige** Geodäten, d.h. $\mathcal{L} = \kappa > 0$ (oEdA = 1 durch Wahl der Bogenlänge als affiner Parameter); Lichtstrahlen (in geometrisch-optischer Näherung) sind **Nullgeodäten**, d.h. $\mathcal{L} = \kappa = 0$.

Der Unterschied zur SRT ist, dass es i.A. keine globale Transformation gibt, die g auf die konstante Form (10.4) bringt. Man beweist aber, dass es um jeden festen Punkt $p_0 \in M$ ein Koordinatensystem gibt, so dass

$$g_{\mu\nu}(x_0) = \eta_{\mu\nu} , \quad \Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x_0) = 0 ,$$

wobei x_0 die Koordinaten von p_0 sind. (Interpretation: lokales Inertialsystem, d.h. frei fallendes, nicht rotierendes lokales Bezugssystem.)

Durch obige Postulate ist die Bewegung von Materie und Licht in einem äusseren (gegebenen) Gravitationsfeld im wesentlichen bestimmt; letzteres seinerseits durch die **Feldgleichungen für das metrische Feld** $g_{\mu\nu}(x)$ (Einstein 1915), worauf wir nicht näher eingehen können. In diesen tritt als Quelle des Feldes die Energie-Impulsverteilung der Materie und der Strahlung ein. Damit beeinflussen sich die Metrik einerseits und die Materie und die Strahlung andererseits gegenseitig — im Unterschied zur SRT.

3. Die Schwarzschild Metrik

Schwarzschild (1916) fand folgende exakte Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen im Vakuum:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (10.5)$$

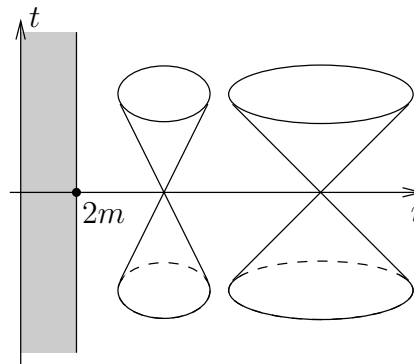
($c = 1$), wobei $m > 0$ ein Parameter ist, dessen Bedeutung später klar wird. Die Metrik ist erklärt in einer Karte

$$t \in \mathbb{R}, \quad r > 2m, \quad 0 \leq \theta < \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Für $r \rightarrow \infty$ ist sie asymptotisch zur Minkowski-Metrik (10.4), in Polarkoordinaten ausgedrückt:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Beim Schwarzschild-Radius $r = 2m$ wird die Metrik (10.5) in der verwendeten Karte singular: Die Öffnung der Lichtkegel strebt gegen Null. Das durch (10.5) beschriebene Stück der Raumzeit ist nebenbei skizziert. Ohne Beweis sei bemerkt, dass bei $r = 2m$ nur die Karte, nicht aber die Metrik singular wird: Es gibt eine Karte in welcher die Raumzeit fortgesetzt wird; darin erscheint die Gerade $r = 2m$ als ein Punkt ($\times S^2$, durch Hinzunahme von θ, φ).



Die Schwarzschild-Metrik beschreibt das statische Gravitationsfeld im Äusseren einer sphärischen, nicht rotierenden Masse M . Sie ist durch entsprechende Symmetriebedingungen eindeutig bestimmt.

Geodäten in der Schwarzschild-Metrik

Die Lagrange-Funktion (10.2) lautet

$$\mathcal{L} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2(\dot{\theta}^2 + (\sin^2 \theta) \dot{\varphi}^2)$$

($\cdot = d/d\tau$, τ : affiner Parameter; $c = 1$). Die θ -Gleichung

$$-(r^2 \dot{\theta})' + (r \dot{\varphi})^2 \sin \theta \cos \theta = 0$$

ist identisch erfüllt durch $\theta = \pi/2$, was wir nun voraussetzen (Bahn in Äquatorebene). Dann ist

$$\mathcal{L} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - (r\dot{\varphi})^2 .$$

Die Variablen t, φ sind zyklisch: Es gelten die **Erhaltungssätze**

$$\begin{aligned} r^2 \dot{\varphi} &= l , & (\text{Drehimpuls}) \\ \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} &= \mathcal{E} . \end{aligned}$$

Ferner ist \mathcal{L} erhalten. Dann folgt für die **radiale Gleichung**

$$\mathcal{L} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} (\mathcal{E}^2 - \dot{r}^2) - \frac{l^2}{r^2} ;$$

oder

$$\begin{aligned} \dot{r}^2 + V(r) &= \mathcal{E}^2 , \\ V(r) &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(\mathcal{L} + \frac{l^2}{r^2}\right) . \end{aligned} \tag{10.6}$$

Es ist zweckmässig, die Variable $u = 1/r$ zu benutzen. Aus $\dot{u} = -u^2 \dot{r}$ und $\dot{\varphi} = lu^2$ folgt für $u' = du/d\varphi$

$$u'^2 = \left(\frac{\dot{u}}{\dot{\varphi}}\right)^2 = \frac{\mathcal{E}^2 - V}{l^2} = \frac{\mathcal{E}^2}{l^2} - (1 - 2mu) \left(\frac{\mathcal{L}}{l^2} + u^2\right)$$

oder, nach φ abgeleitet (und dividiert durch $2u'$):

$$u'' + u - \mathcal{L} \frac{m}{l^2} = 3mu^2 . \tag{10.7}$$

i) Periheldrehung

Wir betrachten **zeitartige** Geodäten (10.7) (frei fallende Körper) und normieren dann

$$\mathcal{L} = 1 , \quad \text{d.h. } \tau = \text{Eigenzeit} .$$

Dann lautet (10.7)

$$u'' + u - \frac{m}{l^2} = 3mu^2 . \tag{10.8}$$

Die radiale Gleichung für die **nicht-relativistische** Bewegung im Gravitationsfeld eines Zentralkörpers der Masse M ist, s. p. 11,

$$\dot{r}^2 - \frac{2m}{r} + \frac{l^2}{r^2} = 2E ,$$

bzw.

$$u'' + u - \frac{m}{l^2} = 0 \tag{10.9}$$

wobei $m = GM/c^2$ und wir auch hier eine Zeitskala mit $c = 1$ verwendet haben. Der Vergleich von (10.8) mit (10.9) zeigt, dass (abgesehen von $\mathcal{E}^2 - 1 = 2E$) der Term $\sim r^{-3}$

in (10.6), bzw. $\sim u^2$ in (10.8), die ART-Korrektur beschreibt. Jede (nichtrelativistische) Lösung von (10.9),

$$u_0 = \frac{1}{d}(1 + \varepsilon \cos \varphi), \quad d = \frac{l^2}{m},$$

stellt für $0 < \varepsilon < 1$ eine **Ellipse** dar: Dabei wurde die Phase so gewählt, dass sich das Perihel bei $\varphi = 0, 2\pi, \dots$ befindet. Für die Lösung von (10.8) setzen wir an $u = u_0 + v$ und erhalten (in 1. Ordnung in m) für die Störung v die lineare inhomogene Gleichung

$$v'' + v = \frac{3m}{d^2}(1 + 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2 \cos^2 \varphi).$$

Für die Anfangsbedingungen $v = v' = 0$ bei $\varphi = 0$ haben die 3 Gleichungen

$$v'' + v = \begin{cases} A_1 \\ A_2 \cos \varphi \\ A_3 \cos^2 \varphi \end{cases}$$

die Lösungen

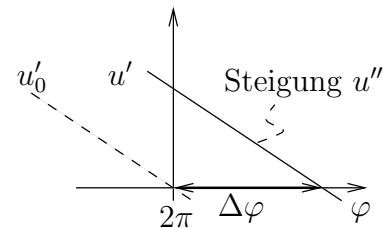
$$v = \begin{cases} A_1(1 - \cos \varphi) \\ \frac{1}{2}A_2\varphi \sin \varphi \\ A_3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cos 2\varphi - \frac{2}{3} \cos \varphi\right) \end{cases}$$

Nur der 2. Term liefert einen Beitrag zu $u'(2\pi) = v'(2\pi)$, nämlich

$$u'(2\pi) = A_2\pi = \frac{6\pi m \varepsilon}{d^2}.$$

Wegen $u''(2\pi) = -\varepsilon/d$ (0. Ordnung) ist also die Perihel-Verschiebung (d.h. Verschiebung der Nullstelle von $u'(\varphi)$):

$$\Delta\varphi = -\frac{u'(2\pi)}{u''(2\pi)} = \frac{6\pi m}{d} = \frac{6\pi m}{a(1 - \varepsilon^2)},$$



wobei a die grosse Halbachse der Ellipsenbahn ist. Für Merkur ergibt sich $\Delta\varphi \approx 43''$ pro Jahrhundert ($'' =$ Bogensekunden), was heute auf ca. 1% bestätigt ist. (Andere Störungen sind ca. 10 mal grösser!)

ii) Lichtablenkung an der Sonne

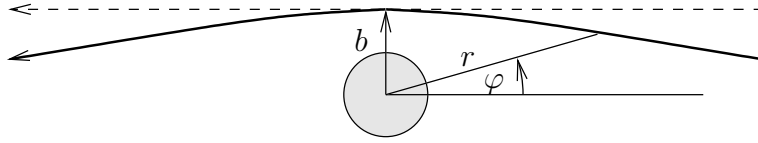
Wir betrachten **lichtartige Geodäten** (10.7): $\mathcal{L} = 0$. Dann lautet (10.7)

$$u'' + u = 3mu^2. \tag{10.10}$$

Die Gleichung $u'' + u = 0$ beschreibt hingegen den geraden Lichtstrahl $u_0 = b^{-1} \sin \varphi$, d.h. $r \sin \varphi = b$ (Wahl der Phase: Perihel bei $\varphi = \pi/2$):

Lösung von (10.10) durch Störungsrechnung: $u = u_0 + v$,

$$v'' + v = \frac{3m}{b^2} \sin^2 \varphi$$



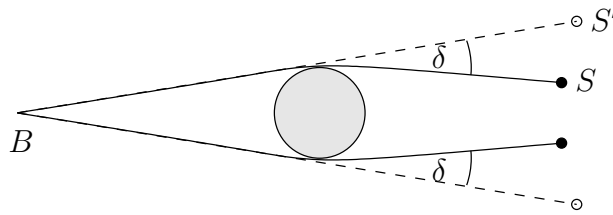
mit $v = v' = 0$ bei $\varphi = \pi/2$:

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{1}{b} \sin \varphi + \frac{3m}{b^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cos^2 \varphi - \frac{1}{3} \sin \varphi \right) \\
 &= \frac{\varphi}{b} + \frac{3m}{b^2} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \varphi \right) + O(\varphi^2), \quad (\varphi \rightarrow 0),
 \end{aligned}$$

d.h. die Nullstelle $\varphi = 0$ von u_0 verschiebt sich in 1. Ordnung in m zu $\varphi_\infty = -2m/b$. Die Gesamtabweichung $\delta = 2|\varphi_\infty|$ beträgt

$$\delta = \frac{4m}{b} \approx \frac{1,75''}{b/R_\odot}$$

für die Sonne mit Radius R_\odot und kann bei einer totaler Sonnenfinsternis beobachtet werden. Die experimentelle Übereinstimmung liegt geschiet bei etwa 1%. (Andere Störungen: optische Ablenkung in der Sonnenkorona.)



(B : Beobachter; S, S' : echte und scheinbare Position eines Sterns).

Literatur

Physikalisch:

H. Goldstein, Classical mechanics (Addison Wesley).

L.D. Landau, E.M. Lifschitz, Lehrbuch der Theoretischen Physik, Band I. Mechanik (Akademie-Verlag).

F. Kuypers, Klassische Mechanik (VCH).

F. Scheck, Mechanik (Springer).

H. Stephani, G. Kluge, Theoretische Mechanik (Spektrum-Verlag).

Mathematisch:

V.I. Arnold, Mathematical Methods of Classical Mechanics (Springer).

G. Gallavotti, The Elements of Mechanics (Springer).

N. Straumann, Klassische Mechanik (Springer).