Serie 11: Transport in Metallen

Abgabe: 18. Januar 2005

Aufgabe 11.1 Boltzmann-Gleichung in der Relaxationszeit Näherung

[a] (*Aufgabe 16.2, im Aschroft-Mermin, engl. Ausgabe*). Man betrachte ein Metall in gleichförmingem elektrischen Feld und Temperatur Gradient. Führe die Relaxationszeit Näherung ein,

$$\left(\frac{df(k)}{dt}\right)_{\text{coll}} = -\frac{f(k) - f^0(k)}{\tau(k)}, \tag{1}$$

wobei $f^0(k)$ die lokale Gleichgewichts Verteilungsfunktion ist. Zeige, dass die Lösung der Boltzmann-Gleichung, linear in $\vec{E}$ und ∇T als,

$$f(\vec{k}) = f^0(k) + \tau(\epsilon_k)\left(-\frac{\partial f^0}{\partial \epsilon}\right)\vec{v}_{\vec{k}} \cdot \left[-|e|\vec{E} + \frac{\epsilon_k - \mu}{T}(-\nabla T)\right], \tag{2}$$

gegeben ist (vergleiche mit der Gl. (5.73) des Skripts).

[b] Nehme jetzt an, dass die Relaxationszeit eine Funktion der Energie ist. Es sei,

$$\tau(\epsilon) = \frac{1}{(\epsilon - \epsilon_r)^2 + \Delta^2}. \tag{3}$$

Berechne die Leitfähigkeit (σ) und die Wärmeleitfähigkeit (κ) im Limes $T \ll \Delta$ (nütze die Sommerfeld'sche Entwicklung) und überprüfe das Wiedemann-Franz-Gesetz.

Berechne die thermoelektrischen Kraft Q.

Hinweis: Folge der Rechnung im Kapitel 5.7 des Skripts. Verwende zusätztlich, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^{2n}\left(-\frac{d}{dx}\frac{1}{e^x + 1}\right) = (2n)!\, a_n \tag{4}$$

ist, mit $a_1 = \pi^2/6$ und $a_2 = \frac{7}{4}\pi^4/90$.

Aufgabe 11.2 Elektrischer Widerstand von Metallen

[a] *Bloch-Grüneisen-Form des Widerstands*

Überprüfe, dass die Elektron-Phonon Streuung auf die Bloch-Grüneisen-Form des elektrischen Wiederstands führt,

$$\rho(T) \propto \begin{cases} T^5 & T \ll \theta, \\ T & T \gg \theta, \end{cases} \tag{5}$$

wobei θ die Debye-Temperatur ist.

Hinweis: Fange mit dem Ausdruck (5.59) des Skripts (Streuung Relaxationszeit) an und leite das asymptotische Verhalten des Integrals,

$$\int_0^{2\theta/T} \frac{y^4 dy}{e^y - 1}, \tag{6}$$

her.

[b] *Verschiedene Mechanismen der Streuung*

Grob findet man die folgenden Relaxationszeiten für verschiedene Streuungsmechanismen im Natrium,

Elektron-Phonon

$1/\tau_{el-ph} \simeq k_B T$	Raumtemperatur
$1/\tau_{el-ph} \simeq T^5 \times 10^4$	flüssig Helium Temperatur

Elektron-Verunreinigung

$1/\tau_{el-imp} \simeq (N_i/N) \times 10^{15}$	Temperatur unabhängig

Elektron-Elektron

$1/\tau_{el-el} \simeq (k_B T/\epsilon_F)^2 \times 10^{15}$	$k_B T \ll \epsilon_F$

Zeichne den Widerstand für Temperaturen $0 - 300\,K$.

Welche sind die dominanten Mechanismen bei $T \simeq 0\,K$, welche bei Raumtemperatur?

Wie 'rein' muss Natrium sein, damit man die Effekte der Elektron-Elektron Streuung sieht?

Wie Hängt RRR [Residual Resistivity Ratio, $RRR = R(T = 300K)/R(T = 0))$], von der Verunreinigungs Konzentration ab?

Aufgabe 11.3 Instabilitäten in Fermi-Flüssigkeiten *

Die linearisierte Transportgleichung (ohne Stoss-Integral) in der Landau Fermi-Flüssigkeit Theorie lautet,

$$(\vec{q} \cdot \vec{v}_q - \omega) u_p + \vec{q} \cdot \vec{v}_q \sum_{p'} f_{pp'} \delta(\epsilon_{p'} - \mu) u_{p'} = 0, \tag{7}$$

wobei u_p durch,

$$\delta n_{\vec{p}} = \delta(\epsilon_p - \mu) v_F u_{\vec{p}} \tag{8}$$

definiert ist. Die Lösungen der Transportgleichung für $(\vec{q}, \omega)$ entsprechen den kollektiv-Anregungen der Fermi-Flüssigkeit mit dem Wellenvektor $\vec{q}$ und der Energie $\hbar\omega$.

Zeige, dass in einem rotationsinvatianten System, die Gleichung (7) eine Lösung mit $\omega = 0$ erlaubt, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist,

$$F_l^s = -(2l + 1) \tag{9}$$
$$F_l^a = -(2l + 1). \tag{10}$$

Eine 'Anregung' mit $\omega = 0$ entspricht der Instabilität des Grundzustands.
Die Stabilitätbedingungen sind also,

$$F_l^s > -(2l + 1) \tag{11}$$
$$F_l^a > -(2l + 1). \tag{12}$$