ETH Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Quantenmechanik I
Serie 6

WS 03/04
Prof. G. Blatter

Aufgabe 6.1 Eichinvarianz der Stromdichte

Der Wahrscheinlichkeitsstrom eines Teilchens im EM-Feld ist

$$\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m}(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*) + \frac{e}{mc}\vec{A}\psi^*\psi.$$

Zeige, dass $\vec{j}$ invariant ist unter der Eichtransformation

$$\begin{aligned} \psi &\to \psi \exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\chi\right) , \\ \vec{A} &\to \vec{A} + \vec{\nabla}\chi , \\ \phi &\to \phi - \frac{1}{c}\partial_t\chi, \end{aligned}$$

und überzeuge dich, dass die zeitabhängige Schrödingergleichung ebenfalls eichinvariant ist.

Aufgabe 6.2 Transport durch Doppelbarriere

Für eine technologische Anwendung, siehe Goldmann, Tsui und Cunningham, Phys. Rev. Lett. **58**, 1256 (1987), auf `http://prl.aps.org/` .
Gegeben sei folgendes Doppelbarrieren-Potential in einer räumlichen Dimension,

$$V(x) = V_0 \left[\delta(x) + \delta(x-a)\right] .$$

a) Berechne die Reflektions- und Transmissions-Koeffizienten $r(E)$ und $t(E)$ und zeichne sie (qualitativ) als Funktion der Energie des einlaufenden Teilchens. Wann gibt es Resonanzen? Überprüfe die Grenzfälle starker und schwacher Barrieren.

b) Beschreibe qualitativ, wie die Breite der Resonanz von E und V_0 abhängt.

c) Wie verhält sich die Phase von $t(E)$ und $r(E)$, wenn E durch eine Resonanzenergie läuft? Die Streumatrix für symmetrische Streupotentiale hat die Form

$$S = \begin{pmatrix} t & r \\ r & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |t|e^{i\phi_t} & |r|e^{i\phi_r} \\ |r|e^{i\phi_r} & |t|e^{i\phi_t} \end{pmatrix}.$$

Bestimme qualitativ, wie sich die Einträge der Matrix als Funktion der Energie ändern (betrachte Energien in einer Resonanz und zwischen zwei Resonanzen).

Aufgabe 6.3 α-Zerfall eines Atomkerns

Der α-Zerfall eines Atomkerns wurde von Gamow im Jahre 1928 erklärt (ZS. f. Phys. **51** (1928), 204). Aus Streuexperimenten war damals bekannt, dass die Kernkräfte bis zu einer Entfernung $10^{-14}m$ nicht merklich sind, also das Coulomb Potential dominiert. Qualitativ ergibt sich demnach das folgende radiale Potential für ein α-Teilchen.

$$V(r) = \begin{cases} V_0 r_0/r & r > r_0 \\ -U_0 & r < r_0 \end{cases} \qquad V_0 = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_0}$$

Ein an den Kern gebundenes α-Teilchen mit Energie $E > 0$ stellt einen instabilen Zustand dar. Um sich vom Kern zu lösen muss die Barriere des Coulomb Potentials durchtunnelt werden.

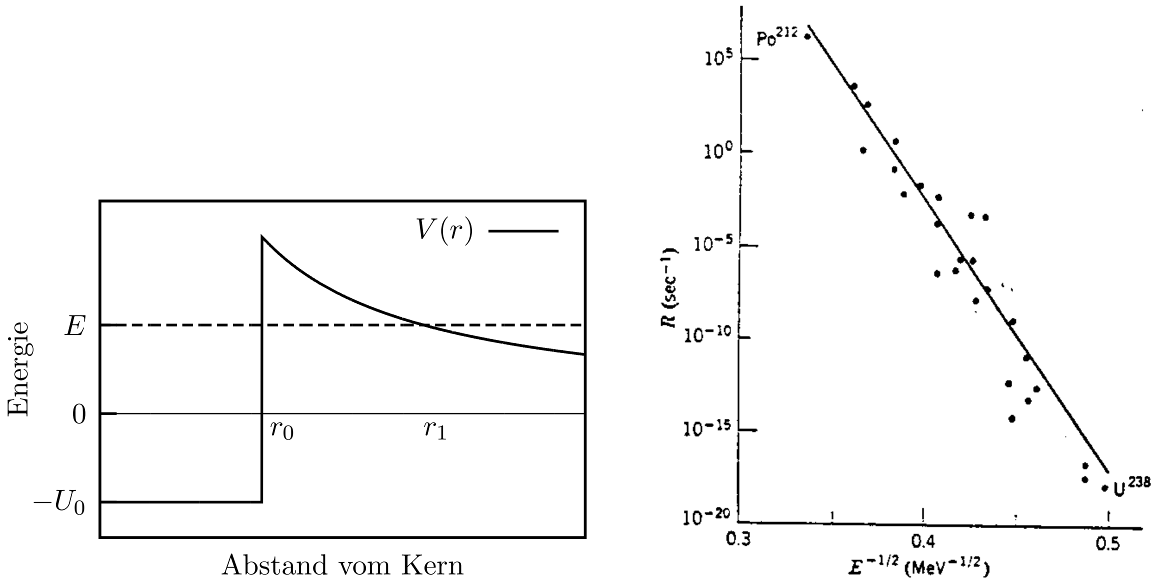

Abbildung 1: Die linke Graphik zeigt das radiale Potential eines α-Teilchens. Die rechte Seite zeigt eine Messung der Zerfallsrate an verschiedenen Atomkernen in Abhängigkeit der kinetischen Energie der α-Teilchen. Man beachte, dass unsere Zerfallsrate Γ hier mit R bezeichnet wird.

a) Man Zeige, daß der Transmissionskoeffizient T proportional zu

$$T \propto \exp\left\{-\frac{2}{\hbar}\int_{r_0}^{r_1}\sqrt{2m(V(r)-E)}dr\right\}$$

ist.

b) Die Zerfallsrate ist $\Gamma = \omega T$, wobei ω die Anzahl der Versuche das Potential zu durchdringen pro Sekunde angibt. Man schätze die sogenannte Versuchsfrequenz ω ab, indem man annimmt, dass sich das Teilchen innerhalb der Barriere klassisch verhält.

c) Man erkläre das lineare Verhalten der Messpunkte in obiger Skizze, wo Γ mit R bezeichnet wird, und man berechne Γ für den α-Zerfall des Atomkernes ${}^{238}_{92}U$ mit $E = 4.2$ MeV und $r_0 = 9 \cdot 10^{-15}$ m.

S.H.