Quantenmechanik I
Serie 10

Aufgabe 10.1 Schwach gebundene Zustände in einer, zwei und drei Dimensionen

Wir nehmen ein rotationssymmetrisches attraktives ($V_0 > 0$) Potential in d Dimensionen von der Form

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} -V_0, & r < r_0 \\ 0, & r > r_0 \end{cases}$$

an. Man zeige, dass ein solches Potential für $d = 1$ und $d = 2$ immer einen gebunden Zustand hat. Weiter zeige man, dass für ein schwaches Potential, das heisst $\xi_0 = \sqrt{2mV_0}r_0/\hbar \ll 1$, die Energie des Grundzustandes durch

$$E = \begin{cases} -V_0\xi_0^2 & d = 1 \\ -\frac{V_0}{\xi_0^2}\, e^{-4/\xi_0^2} & d = 2 \end{cases}$$

gegeben ist. Schliesslich zeige man noch, dass es in 3 Dimensionen für $\xi_0 < \pi/2$ überhaupt keinen gebundenen Zustand gibt.

Hinweis:

$$\mathrm{J}_0(x) = 1 - x^2/4 + O(x^4)$$

$$\mathrm{K}_0(x) = -\ln(x) + O(1)$$

Aufgabe 10.2 Algebraische Potentiale in drei Dimensionen

Betrachte ein attraktives 3-D Potential der Form

$$U(r) = -\frac{A}{r^b}. \tag{1}$$

a) Indem man die Grundzustandsenergie abschätzt, zeige man, dass für $b < 2$ ein stabiler Grundzustand existiert, nicht aber für $b > 2$ (das Teilchen fällt in den Ursprung). Diese Aussage gilt auch, falls nur die Asymptotik für $r \to 0$ durch (1) gegeben ist.

b) Wir wollen nun annehmen, dass die Asymptotik des Potentials für $r \to \infty$ durch (1) gegeben ist, dass aber für kleine r das Potential so ist, dass das Teilchen nicht in den Ursprung fällt. Zeige, dass für $b < 2$ unendlich viele gebundene Niveaus existieren welche dichter und dichter werden gegen $E = 0$ und dass für $b > 2$ die totale Anzahl der gebundenen Zustände beschränkt ist.

c) Mit Hilfe des *Virialsatzes der Quantenmechanik* kann die Aussage a) rigoroser hergeleitet werden. Für Potentiale, welche im ganzen Raum die Form (1) besitzen, gilt:
Existiert ein Grundzustand $|\psi_1\rangle$, so ist

$$-2\langle T\rangle_1 = b\langle U\rangle_1. \tag{2}$$

Beweise (2) und damit die Aussage in a). Was kann über den Fall $b = 2$ ausgesagt werden?

d) Zeige, dass für $b = 2$ ein A_{cr} existiert, so dass gilt: das Teilchen fällt in den Ursprung falls $A > A_{cr}$ und falls $A < A_{cr}$ existieren keine gebundenen Zustände.

A. R.