Aufgabe 6.1 Der statische Strukturfaktor

Die Dichte eines Systems ist durch $N/V = \langle \rho(\mathbf{r}) \rangle = \langle \sum_\alpha \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha) \rangle$ mit thermischer oder quantenmechanischer Mittelung gegeben. Zeige, dass der Strukturfaktor

$$S(\mathbf{q}) \equiv \frac{1}{N} \langle \rho(\mathbf{q}) \rho(-\mathbf{q}) \rangle$$

und die Paarverteilungsfunktion eines homogenen Systems

$$g(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \equiv \frac{\langle \rho(\mathbf{r})[\rho(\mathbf{r}') - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \rangle}{\langle \rho(\mathbf{r}) \rangle \langle \rho(\mathbf{r}') \rangle} = \frac{V}{N^2} \left\langle \sum_{\alpha \neq \beta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{r}_\alpha + \mathbf{r}_\beta) \right\rangle$$

folgender Beziehung genügen

$$S(\mathbf{q}) - 1 = \frac{N}{V} \int d^3r \, e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \, g(\mathbf{r}).$$

Berechne $g(\mathbf{r})$ für ein ideales Fermi Gas bei $T = 0$. Zeichne $g(\mathbf{r})$ und $S(\mathbf{q})$.

Aufgabe 6.2 Der dynamische Strukturfaktor eines Fermi Gases

Die Suszeptibilität eines Fermi Gases ist durch die Lindhard Funktion

$$\chi^0(\mathbf{q}, \omega) = 2 \sum_{\mathbf{k}} \frac{f(\epsilon_{\mathbf{k}}) - f(\epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}})}{\omega + \epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + i\eta}$$

gegeben, mit $\eta \to 0$. Das Spektrum sei $\epsilon_{\mathbf{k}} = \hbar^2 k^2 / 2m$. Zeige, dass sich die Suszeptibilität bei $T = 0$ schreiben lässt als

$$\chi^0(\mathbf{q}, \omega) = 2 \sum_{k \leq k_{\mathrm{F}}} \left[\frac{1}{\omega + \epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + i\eta} - \frac{1}{\omega - \epsilon_{\mathbf{k}} + \epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + i\eta} \right]$$

Berechne den Real- und Imaginärteil von χ^0 eines eindimensionalen Fermi Gases. Was ist die Bedeutung des Imaginärteils der Suszeptibilität? Zeichne das Gebiet in der (q, ω)-Ebene, in dem $\mathrm{Im}\chi^0(q, \omega) \neq 0$.