Festkörperphysik II
Serie 7

Aufgabe 7.1 Einstein Relation und das Fluktuation-Dissipations Theorem

In dieser Übungsaufgabe wollen wir die *Einstein Relation*

$$\mu = \frac{D}{T},$$

welche die Mobilität μ eines Teilchens (Dissipation) mit der Diffusionskonstante D verknüpft, mikroskopisch herleiten. Einstein zeigte, dass diese Relation aus der makroskopischen Transporttheorie folgt (vgl. Ashcroft/Mermin S. 602).
Die *Diffusionskonstante* ist über die Diffusionsgleichung

$$\dot{n}(x,t) = D\Delta n(x,t)$$

definiert. Berechne die Greensche Funktion $n_{\mathcal{G}}(x,t)$ der Differentialgleichung in einer Dimension und, dass

$$\langle [x(t) - x(0)]^2 \rangle = 2Dt$$

für $t \to \infty$. Die Mittlung $\langle \cdot \rangle$ ist definiert durch

$$\langle f(x) \rangle = \int dx\, f(x) n_{\mathcal{G}}(x,t)/Z$$

mit

$$Z = \int dx\, n_{\mathcal{G}}(x,t).$$

Die *Mobilität* eines Teilchens ist als Antwort $\langle \dot{x}(t) \rangle = \mu F(t)$ auf den Wechselwirkungs-Hamiltonian $\mathcal{H}_{\text{int}} = xF(t)$ definiert mit $F(t)$ als Treiber. In linearer Ordnung gilt

$$\langle x(t) \rangle = \int dt' \mathcal{G}(t-t') F(t'),$$

mit $\mathcal{G}(t-t')$ der zum Treiber gehörenden Greenschen Funktion. Benutze das FD Theorem

$$\langle x_\omega x_{\omega'} \rangle = 2\pi\hbar\delta(\omega+\omega')\, \mathrm{Im}\mathcal{G}(\omega) \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right)$$

im Limes $T \to \infty$. Berechne den Korrelator $\langle [x(t) - x(0)]^2 \rangle$ und leite damit die Einstein Relation mikroskopisch her.

Aufgabe 7.2 Spezifische Wärmekapazität eines Halbleiters

Berechne das Tieftemperaturverhalten der spezifischen Wärmekapazität c_v in einem undotierten "direct gap" Halbleiter. Die Dispersionen im Valenz- (v) und im Leitungsband (c) seien gegeben durch

$$\varepsilon_{\text{v}}(\mathbf{k}) = \epsilon_{\text{v}}(0) - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{\text{v}}},$$
$$\varepsilon_{\text{c}}(\mathbf{k}) = \epsilon_{\text{c}}(0) + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{\text{c}}},$$

wobei $\epsilon_{\text{c}}(0) - \epsilon_{\text{v}}(0) = 2\Delta = E_{\text{g}}$. Um die folgenden Rechnungen zu vereinfachen, nehmen wir an, dass m_{c} wesentlich grösser als m_{v} ist. In diesem Fall sind die tiefliegenden Anregungen hauptsächlich durch die Krümmung des Leitungsbandes gegeben.

1. Das chemische Potential $\mu(\mathrm{T})$ sei temperaturunabhängig ($\mu(\mathrm{T}=0) = \mu_0$): Berechne die innere Energie und daraus die spezifische Wärmekapazität $\mathrm{c_v}(\mathrm{T})$ für tiefe Temperaturen.
2. Das chemische Potential sei selbst eine Funktion der Temperatur: Berechne $\mu(\mathrm{T})$, und wiederhole den ersten Teil der Aufgabe.