Aufgabe 8.1 Landausche Theorie der Fermi-Flüssigkeiten

i. *Quasiteilchenenergie bei endlicher Temperatur*

Die Verteilungsfunktion einer Fermi-Flüssigkeit ist im thermodynamischen Gleichgewicht durch

$$n^0_{\mathbf{p}} = \frac{1}{1 + e^{(\bar{\epsilon}_{\mathbf{p}} - \mu)/T}} \tag{1}$$

gegeben, mit $\bar{\epsilon}_{\mathbf{p}} = \epsilon_{\mathbf{p}} + \sum_{\mathbf{p}'} f_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} \delta n_{\mathbf{p}'}$ der Quasiteilchenenergie und $\delta n_{\mathbf{p}} = n^0_{\mathbf{p}}(T,\mu) - n^0_{\mathbf{p}}(0,\mu)$. Schätze ab, dass $\sum_{\mathbf{p}'} f_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} \delta n_{\mathbf{p}'} \propto T^2 V \rho(\mu) f / m^* v_F^2$ gilt, wobei $\rho(\mu) = m^* p_F / \pi^2$ die Zustandsdichte beim chemischen Potential und f die Energieskala für $f_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}$ bezeichnet. Zeige, dass damit bei tiefen Temperaturen die nichtwechselwirkende Quasiteilchenenergie $\bar{\epsilon}_{\mathbf{p}} = \epsilon_{\mathbf{p}}$ in Gl. (1) benutzt werden kann.

ii. *Quasiteilchenstrom*

Die kinetische Gleichung für die Verteilungsfunktion $n_{\mathbf{p}}$ ist in Abwesenheit von äusseren Kräften und Kollisionen gegeben durch

$$\frac{\partial n_{\mathbf{p}}}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} n_{\mathbf{p}} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} \bar{\epsilon}_{\mathbf{p}} - \nabla_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \bar{\epsilon}_{\mathbf{p}} = 0. \tag{2}$$

$\nabla_{\mathbf{p}} \bar{\epsilon}_{\mathbf{p}}$ gibt die Geschwindigkeit des Quasiteilchens, $-\nabla_{\mathbf{r}} \bar{\epsilon}_{\mathbf{p}}$ die effektive Kraft auf das Quasiteilchen. Durch Einsetzen von $n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r},t) = n^0_{\mathbf{p}} + \delta n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r},t)$ und Berücksichtigung der Terme bis in 1. Ordnung in $\delta n_{\mathbf{p}}$ erhalten wir

$$\frac{\partial \delta n_{\mathbf{p}}}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} \delta n_{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{p}} - \nabla_{\mathbf{p}} n^0_{\mathbf{p}} \cdot \sum_{\mathbf{p}'} f_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} \nabla_{\mathbf{r}} \delta n_{\mathbf{p}'} = 0, \tag{3}$$

eine Transport-Gleichung für die Quasiteilchen. Wenn wir dies nach Summation über $\mathbf{p}$ als Kontinuitätsgleichung für Strom und Dichte der Quasiteilchen interpretieren, finden wir den Quasiteilchenstrom

$$\mathbf{j}_{\mathbf{p}} = \mathbf{v}_{\mathbf{p}} - \sum_{\mathbf{p}'} f_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} \frac{\partial n^0_{\mathbf{p}'}}{\partial \epsilon_{\mathbf{p}'}} \mathbf{v}_{\mathbf{p}'}. \tag{4}$$

Der zweite Term hat die Bedeutung eines 'drag' oder 'backflow' Stromes, der erzeugt wird, weil das Quasiteilchen wegen der Wechselwirkung das Medium mitschleppt. Die Herleitung des Quasiteilchenstromes aus der Galilei-Invarianz, welche allerdings nur in translationsinvarianten Systemen gilt, zeigt den Ursprung des 'drag current'. Bei einer Galilei-Transformation ändert sich der Impuls der Teilchen um $\mathbf{q}$ ($\mathbf{p} \to \mathbf{p} + \mathbf{q}$), wobei $\mathbf{q}/m = \mathbf{v}$ die Geschwindigkeit des relativen Inertialsystem ist. Die erzeugte kinetische Energieänderung des Systems ist daher in 1. Ordnung in $\mathbf{q}$

$$\delta E = \left\langle \sum_k \mathbf{q} \cdot \frac{\mathbf{p}_k}{m} \right\rangle, \tag{5}$$

woraus der totale Strom $\mathbf{j} = \partial E / \partial \mathbf{q}$ folgt. Wir wenden diese Relation nun auf den Zustand eines angeregten Quasiteilchens an. Unter Galilei-Transformation transformiert der Impuls sowohl des Quasiteilchens als auch des Fermisees. Berechne die Energieänderung des Systems unter einer Galilei-Transformation $\mathbf{p} \to \mathbf{p} + \mathbf{q}$ und daraus den Quasiteilchenstrom $\mathbf{j}_{\mathbf{p}}$.

iii. *Effektive Masse*

Im translationsinvarianten System ist der Strom eines Quasiteilchens sowohl im wechselwirkenden als auch im nichtwechselwirkenden System gegeben durch $\mathbf{j_p} = \mathbf{p}/m$. Bestimme die effektive Masse $m^* = m(1 + F_1^s/3)$ aus dem Ausdruck (4) für den Quasiteilchenstrom. Als Stabilitätsbedingung für das System gilt $F_1^s > -3$.

iv. *Spin-Suszeptibilität*

Leite die paramagnetische Spin-Suszeptibilität bei $T = 0$,

$$\chi^0 = \rho^0(\mu)\mu_B^2 = \frac{3}{2}\frac{n}{\epsilon_F^0}\mu_B^2, \tag{6}$$

für ein freies Elektronengas her. Zeige, dass innerhalb der Landau-Fermi-Flüssigkeit Theorie die Suszeptibilität ($T = 0$) gegeben ist durch

$$\chi = \frac{\rho(\mu)}{1 + F_0^a}\mu_B^2 = \frac{1 + F_1^s/3}{1 + F_0^a}\chi^0 \tag{7}$$

Hinweis: Benutze die Variablen $\delta\bar{n}_{\mathbf{p}}$, siehe Skript.