Aufgabe 9.1 Dynamischer Strukturfaktor in einem Superfluid

Der dynamische Strukturfaktor für ^{4}He hat einen Delta-Term, der von der Streuung durch das Kondensat herrührt, und ausserdem zwei Gausssche Anteile, die von dem normalen Fluid stammen.

i. Gehe von dem allgemeinen Ausdruck für den symmetrischen dynamischen Strukturfaktor

$$S(\mathbf{Q},\omega) = \frac{1}{\rho}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} n_k\, 2\pi\Big[\delta\Big(\omega - \frac{Q^2}{2m} - \frac{\mathbf{Q}\cdot\mathbf{k}}{m}\Big) - \delta\Big(\omega + \frac{Q^2}{2m} + \frac{\mathbf{Q}\cdot\mathbf{k}}{m}\Big)\Big],$$

bei $T=0$ aus. Die Verteilungsfunktion spaltet in zwei Anteile auf: $n_k = N_0\delta_{k=0} + \bar{n}_k$, wobei $N_0 = f_0\rho$ vom Kondensat kommt, und $\bar{n}_k = (1-f_0)\rho(\frac{2\pi}{mw})^{3/2}e^{-\epsilon_k/w}$ der Beitrag des normalen Fluids ist; hier $\epsilon_k = k^2/2m$, und w ist die Breite der Gaussverteilung. Zeige, dass

$$\begin{aligned} S(Q,\omega) = 2\pi f_0[\delta(\omega-\epsilon_Q) - \delta(\omega+\epsilon_Q)] \\ + (1-f_0)(\pi/\epsilon_Q w)^{1/2}(e^{-(\omega-\epsilon_Q)^2/4\epsilon_Q w} - e^{-(\omega+\epsilon_Q)^2/4\epsilon_Q w}),\end{aligned}$$

wobei die Breite der zwei Gaussschen Funktionen gerade $2(\epsilon_Q w)^{1/2}$ ist.

ii. Berechne folgende Momente für ^{4}He:

$$S(Q) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{4\pi}\mathrm{sgn}(\omega)S(Q,\omega), \quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{4\pi}\omega\, S(Q,\omega), \quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{4\pi}\omega^3 S(Q,\omega).$$

Aufgabe 9.2 Fermi Flüssigkeitstheorie in der Hartree-Fock Näherung

Diese Aufgabe soll ein Beispiel für den mikroskopischen Hintergrund der phenomenologischen Fermi Flüssigkeitstheorie geben. Wir behandeln hier eine Elektronenflüssigkeit in der Hartree-Fock Näherung. Der Hamiltonian einer Elektronenflüssigkeit vor einem positiven ionischen Hintergrund (Jellium Modell) ist gegeben durch:

$$H = \sum_{p,\sigma}\epsilon_p^0 c_{p,\sigma}^\dagger c_{p,\sigma} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{p,p',q\\ \sigma,\sigma'}} V_q c_{p+q,\sigma}^\dagger c_{p'-q,\sigma'}^\dagger c_{p',\sigma'}c_{p,\sigma},$$

wobei $V_q = (4\pi e^2/q^2)(1-\delta_{q=0})$ die Coulombwechselwirkung ist. Der $q=0$ Term kürzt sich mit dem Hintergrund weg.

i. Zeige, dass die Grundzustandsenergie als Funktion der Verteilungsfunktion $n_{p,\sigma}^0$ durch den folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$E_0 = \langle 0|H|0\rangle = \sum_{p,\sigma}\epsilon_p^0 n_{p,\sigma}^0 + \frac{1}{2}\sum_{\substack{p,p'\\ \sigma,\sigma'}} V_0 n_{p,\sigma}^0(n_{p',\sigma'}^0 - \delta_{p,p'}\delta_{\sigma,\sigma'}) - \frac{1}{2}\sum_{\substack{p,q\neq 0\\ \sigma}} V_q n_{p+q,\sigma}^0 n_{p,\sigma}^0.$$

ii. Gebrauche die allgemeinen Ausdrücke $\bar{\epsilon}_{p,\sigma} = \delta E_0/\delta n_{p,\sigma}$ und $f_{pp'\sigma\sigma'} = \delta^2 E_0/\delta n_{p,\sigma}\delta n_{p',\sigma'}$ um das Quasiteilchenspektrum und die Parameter der Landau Theorie zu bestimmen. Für Quasiteilchen, die auf der Fermioberfläche existieren, ist $f_{pp'}$ lediglich eine Funktion des Winkels zwischen $\mathbf{p}$ und $\mathbf{p}'$, bzw. des Parameters $\lambda = \mathbf{p}\cdot\mathbf{p}'/p_F^2$. Leite nun $f_{pp'}^{\uparrow\uparrow}(\lambda)$ und $f_{pp'}^{\uparrow\downarrow}(\lambda)$ aus den Resultat von Teil i her. Berechne die (anti-)symmetrisierte Formen $f_{pp'}^s(\lambda)$ und $f_{pp'}^a(\lambda)$. Schreibe nun die Koeffizienten $F_0^{s(a)}$ und $F_1^{s(a)}$ als Funktion von $f(\lambda)$'s und $g^0(\epsilon_F) = (mk_F/2\pi^2\hbar^2)$ (Zustandsdichte pro Spin an der Fermifläche).

iii. Leite die folgenden Beziehungen her:

$$\kappa_0/\kappa = \frac{s^2}{s_0^2} = \frac{1+F_0^s}{1+F_1^s/3} = 1 + g^0(\epsilon_F)\int_{-1}^{1} d\lambda f^s(\lambda)(1-\lambda),$$
$$\chi_{\mathrm{P}}^0/\chi_{\mathrm{P}} = \frac{1+F_0^a}{1+F_1^s/3} = 1 + g^0(\epsilon_F)\int_{-1}^{1} d\lambda[f^a(\lambda) - \lambda f^s(\lambda)],$$
$$C_0/C = m/m^* = \frac{1}{1+F_1^s/3} = 1 - g^0(\epsilon_F)\int_{-1}^{1} d\lambda\lambda f^s(\lambda).$$

Zeige, dass

$$s^2/s_0^2 = \chi_{\mathrm{P}}^0/\chi_{\mathrm{P}} = 1 - (\pi k_F a_0)^{-1} = 1 - (4/9\pi)^{1/3}(r_s/\pi),$$

wobei a_0 der Bohrsche Radius ist, und r_s gegeben ist durch:

$$(4\pi/3)r_s^3 a_0^3 = 1/n$$

iv. Zeige, dass die spezifische Wärme in der Hartree-Fock Näherung logarithmisch divergiert.