

**Aufgabe 12.1 Spezifische Wärme bosonischer Anregungen**

Betrachte einen  $d$ -dimensionalen Festkörper, in welchem die kollektiven Anregungen die Dispersion

$$\omega = Ak^n$$

haben; z.B.  $n = 1$  für akustische Phononen und Spinwellen im Antiferromagneten,  $n = 2$  für Spinwellen im Ferromagneten. Zeige, dass in diesem Fall das Tieftemperaturverhalten der spezifischen Wärmekapazität  $c_v = \partial_T U$  durch das folgende Potenzgesetz gegeben ist:

$$c_v = BT^{d/n}.$$

Die undotierten Basiskomponenten der Hochtemperatursupraleiter sind typischerweise antiferromagnetische Isolatoren. Die Spinanregungen (Magnonen) in diesen Materialien sind auf die zwei-dimensionalen  $\text{CuO}_2$ -Ebenen beschränkt, während die Phononen drei-dimensionale Gitterschwingungen sind. Wie sollte man die Wärmekapazität dieser Materiale am besten auftragen, damit man beide Anteile (Phononen und Magnonen) ablesen kann? Würde man in Wirklichkeit erwarten, beide Anteile zu erkennen?

Bestimme die Proportionalitätskonstante  $B$  als Funktion von  $A, n, d$ , dem spektralen Cut-off  $\Theta_c = \hbar\omega_c$  und der Anzahl der Freiheitsgrade  $s$  jeder Mode. Führe diese Rechnung nur für den Fall, in welchem  $d/n$  eine ganze Zahl ist, aus.

**Aufgabe 12.2 Schmelzen von Kristallen**

Sei  $u(\mathbf{r}, t)$  das skalare Auslenkungsfeld eines  $d$ -dimensionalen Kristalls. In der Elastizitätstheorie ist der effektive Hamiltonian durch

$$\mathcal{H} = \frac{C}{2} \int d^d r |\nabla u|^2$$

gegeben, mit  $C$  der Elastizitätskonstanten. Für eine gedämpfte Bewegung mit Dämpfungskonstante  $\eta$  ist die Greensche Funktion gegeben durch  $G(\mathbf{q}, \omega) = (-i\eta\omega + Cq^2)^{-1}$ . Benutze das Fluktuations-Dissipations Theorem

$$\langle u(\omega)u(\omega') \rangle_{\text{th}} = 2\pi\hbar\delta(\omega + \omega')\text{Im}G(\omega) \coth(\hbar\omega/2T),$$

um die mittlere thermische Auslenkung  $\langle u(\mathbf{x}, t)^2 \rangle_{\text{th}}$  bei hohen Temperaturen  $T \gg \hbar\omega$  für  $d = 1, 2, 3$  zu berechnen.

Das Lindemann Kriterium  $\langle u^2 \rangle_{\text{th}} \approx ca^2$ , mit  $a$  dem typischen Atomabstand und  $c \sim 0.1$ , ist ein heuristisches Schmelzkriterium. Bei welcher Temperatur schmilzt ein Kristall in  $d = 1, 2, 3$ ?