

ELEKTRODYNAMIK

(N. Stammann, WS)

Einleitung

Die klassische Elektrodynamik (ED) ist – nach der klassischen Mechanik – das zweite grosse Gebäude der theoretischen Physik. Seine Errichtung verdanken wir in erster Linie Faraday (1791–1867) und Maxwell (1831–1879). Maxwell hat die mehr bildhaften, intuitiven Vorstellungen von Faraday, welche von den Zeitgenossen als unklar und unmathematisch empfunden wurden, in eine endgültige mathematische Form gebracht.

Die ED ist der Prototyp einer (klassischen) Feldtheorie. Im Laufe des 19. Jahrhunderts wurde langsam klar, dass auch im materiellen Vakuum Felder als etwas physikalisch Reales (als Zustände des Raumes) existieren, denen man u.a. Energie, Impuls und Spannungen zuschreiben muss. Diese Einsicht setzte sich freilich erst durch, nachdem alle Versuche erfolglos blieben, die ED ^{auf} die mechanischen Eigenschaften eines besonderen Mediums – des sog. Äthers – zurückzuführen. Diese Versuche sind heute nur noch historisch und psychologisch in-

interessant. Endgültig hat diesen merkwürdigen Äther, dem die wunderbarsten inneren Eigenschaften zugeschrieben wurden, eigentlich erst Einstein im Zuge seiner speziellen Relativitätstheorie aus der Physik eliminiert.

Die Quellen des elektromagnetischen Feldes sind Ladungen und Ströme. Die Theorie beschreibt die Abhängigkeit des elektromagnetischen Feldes von diesen Quellen durch partielle Differentialgleichungen. Damit findet das Nahwirkungsprinzip seine vollkommene mathematische Formulierung. Der Schritt von der alten Fernwirkungsanschauung (welche etwa im Newtonschen Gravitationsgesetz zum Ausdruck kommt) zum Nahwirkungsprinzip hat nicht nur erst eine erfolgreiche Theorie der zeitabhängigen elektromagnetischen Erscheinungen ermöglicht, sondern war auch für die weitere Entwicklung der theoretischen Physik von ungeheurer Fruchtbarkeit. Für die Elektrodynamik selber wurde es damit möglich, die riesige Mannigfaltigkeit der elektromagnetischen Erscheinungen – inklusive die Optik (!) – durch einige wenige Gleichungen, die

Maxwell-Gleichungen ,

von vollendeter Schönheit zu beschreiben.

Damit war auch der Weg zu einer Feldtheorie der Gravitation frei, womit derjenige Teil der Physik, den man den klassischen nennt, krönend

abgeschlossen^{wurde}. Alle weiteren grundsätzlichen Entwicklungen standen und stehen im Zeichen der Quantentheorie.

Aber auch in der Quantentheorie verlieren die Maxwell'schen Gleichungen ihre Gültigkeit nicht. Das elektromagnetische Feld erfährt "lediglich" eine natürliche quantenmechanische Reinterpretation. Die quantisierte Form der ED, die Quantenelektrodynamik (QED) ist, was ihre Übereinstimmung mit der Erfahrung betrifft, die erfolgreichste physikalische Theorie die wir bis jetzt besitzen. Sie wurde in zahlreichen Experimenten bis zu unglaublicher Genauigkeit bestätigt.

Aus der ED ist auch in zwingender Weise die Spezielle Relativitätstheorie hervorgegangen. Nicht umsonst lautet der Titel von Einsteins Arbeit, in welcher diese Theorie entwickelt wird: "Zur Elektrodynamik bewegter Körper".

Diese kurzen Bemerkungen sollen andeuten, welche zentrale Bedeutung die ED im Gebäude der theoretischen Physik hat. Ihre Anwendungen sind ungeheuer mannigfaltig und längst nicht erschöpft. So gibt es zum Beispiel interessante ungelöste ^{Probleme} in der Elektrodynamik und Plasmaphysik der Pulsare.

Beim Aufbau dieser Vorlesung werde ich einem etwas unüblichen Weg folgen. Zunächst werden wir – wie beim induktiven Zugang – ausführlich die Elektrostatik abhandeln. Hier werden wir bereits einige der grundlegenden Begriffe einführen und prinzipielle Gesichtspunkte der Feldtheorie verdeutlichen können. Gleichzeitig kann man sich in der Elektrostatik auch wirkliches handwerkliches Rüstzeug aneignen.

In Umkehrung der historischen Entwicklung werden wir aber abschliessend bei der Darstellung der Elektrodynamik die Lorentzinvarianz als ein allgemeines Symmetrieprinzip zugrunde legen. Für diese gibt es heute sehr direkte Forderungen, welche nicht auf der Elektrodynamik beruhen (siehe die Mechanik-Vorlesung). Es wird sich zeigen, dass die Maxwell'schen Gleichungen praktisch eindeutig durch die drei folgenden Forderungen festgelegt sind:

- (i) Erhaltung der elektrischen Ladung
- (ii) Lorentzinvarianz
- (iii) Anschluss an die Elektrostatik.

(Diese Postulate implizieren also insbesondere die Existenz von Magnetfeldern.) Es ist dies ein wichtiges Beispiel für die Kraft von Symmetrieprinzipien beim Aufbau der Physik. (Verwandte Überlegungen führten Einstein zu seinen Gleichungen des Gravitationsfeldes.)

Kapitel I. Elektrostatik

§ 1. Elektrische Ladung und elektrisches Feld

"Elektrisch geladene" Medien (Siegellackstange und Reiben mit Katzenfell) üben auf Probekörper Kräfte aus. Diese Kräfte haben die Form

$$\underline{K}(\underline{x}) = e \underline{E}(\underline{x}) \quad , \quad (1.1)$$

wobei e nur vom Probekörper abhängt und $\underline{E}(\underline{x})$ ein vom Probekörper unabhängiges Feld ist, welches nach Wahl eines Massstabes eindeutig bestimmt ist. Man nennt e die elektrische Ladung des Probekörpers und $\underline{E}(\underline{x})$ die elektrische Feldstärke. Diesem Feld wird eine unmittelbare, von der Existenz einer Probeladung unabhängige Realität zugeschrieben und zum eigentlichen Gegenstand der Untersuchung gemacht.

Der Ausdruck (1.1) für die Kraft auf die Probeladung gilt im allgemeinen nur im Grenzfall sehr kleiner Ladungen des Probekörpers. (Ausserdem muss seine räumliche Ausdehnung sehr klein sein.) Hat man z.B. ausgedehnte Metallplatten, die das Feld erzeugen, so würde ein Probekörper von grosser Ladung eine Verschiebung der Ladungen und damit eine Veränderung des Feldes bewirken. Es ist deshalb wesentlich, dass die Existenz von Probekörpern beliebig kleiner Ladung angenommen wird. Makroskopisch ist diese Idealisierung durchaus erlaubt. Atomistisch gesehen stösst man aber auf eine untere Grenze. Die Ladungen aller Elementarteilchen sind ganzzahlige Vielfache der elementaren Ladungseinheit (Elektronenladung), ein Faktum welches bis heute

ein unerklärtes tiefes Kabel ist. (Siehe aber die Bemerkung auf S. 11.)

§2. Grundgleichungen der Elektrostatik

Nun wollen wir die Grundgesetze des elektrischen Feldes \underline{E} erstaten. Als Ausgangspunkt wählen wir das Coulomb'sche Gesetz, wonach eine Punktladung in Punkt \underline{x}_1 mit der Ladung e_1 ein elektrisches Feld der Grösse

$$\underline{E}(\underline{x}) = e_1 \frac{\underline{x} - \underline{x}_1}{|\underline{x} - \underline{x}_1|^3} \quad (2.1)$$

erzeugt. Für mehrere Punktladungen superponieren sich die elektrischen Felder gemäss

$$\underline{E}(\underline{x}) = \sum_i e_i \frac{\underline{x} - \underline{x}_i}{|\underline{x} - \underline{x}_i|^3}. \quad (2.2)$$

Die Verallgemeinerung auf eine "kontinuierliche Ladungsverteilung" ist offensichtlich. Es bezeichne ρ die Ladungsdichte; die Ladung in einem Volumen V ist dann

$$Q(V) = \int_V \rho dV. \quad (2.3)$$

An Stelle der Summe in (2.2) steht jetzt ein Integral:

$$\underline{E}(\underline{x}) = \int \rho(\underline{x}') \frac{\underline{x} - \underline{x}'}{|\underline{x} - \underline{x}'|^3} d^3x'. \quad (2.4)$$

Dies ist ein konservatives Feld :

$$\underline{E} = -\text{grad } \varphi, \quad (2.5)$$

wobei das Potential φ durch folgenden Ausdruck gegeben ist (siehe Satz 2.1 unten)

$$\varphi(\underline{x}) = \int \frac{\rho(\underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|} d^3x'. \quad (2.6)$$

Aus (2.5) folgt (wegen $\text{rot grad } \varphi \equiv 0$):

$$\text{rot } \underline{E} = 0. \tag{2.7}$$

Dies ist das erste Differentialgesetz des elektrostatischen Feldes. Durch Divergenzbildung folgt aus (2.5) $\text{div } \underline{E} = -\Delta\varphi$, wobei Δ den Laplace Operator $\Delta = \text{div grad}$ bezeichnet. Wir zeigen unten, dass aus (2.6) die Poisson Gleichung

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho \tag{2.8}$$

folgt. Folglich ist $\text{div } \underline{E} = 4\pi\rho$. Die Differentialgesetze (Naturwirkungsgesetze) des elektrischen Feldes lauten demnach:

$\text{rot } \underline{E} = 0, \quad \text{div } \underline{E} = 4\pi\rho.$

(2.9)

Aus der 2. Gl. von (2.9) folgt für den elektrischen Fluss durch den ^(geschlossenen) Rand ∂G eines Gebietes G

$$\int_{\partial G} \underline{E} \cdot d\underline{s} = \int_G \text{div } \underline{E} dV = 4\pi \int_G \rho dV = 4\pi Q(G),$$

↑
S. von Gauss

d.h. das Gauss'sche Gesetz:

$\int_{\partial G} \underline{E} \cdot \underline{n} d\sigma = 4\pi Q(G)$

(2.10)

(\underline{n} : nach aussen gerichteter normaler Einheitsvektor).

§3. Integration der Grundgleichungen für eine vorgegebene Ladungsverteilung

Es sei ρ eine vorgegebene Ladungsverteilung mit kompaktem Träger. (Weitere nötige Eigenschaften von ρ seien stillschweigend vorausgesetzt.) Aus der ersten Gl. von (2.9) folgt, dass \underline{E} ein Gradientenfeld ist (Lemma von Poincaré):

$$\underline{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (3.1)$$

Gehen wir damit in die 2. Gl. von (2.9) ein, so ergibt sich für φ wieder die Poisson-Gleichung

$$\Delta \varphi = -4\pi \rho. \quad (3.2)$$

An dieser Stelle erinnere ich an einige Tatsachen aus der Theorie der Distributionen (s. HUP-Strikt). Die Funktion $G(\underline{x}) = 1/|\underline{x}|$ ist, als Distribution aufgefasst, bis auf eine Normierung eine Fundamentallösung des Laplace-Operators:

$$\Delta \left(\frac{1}{|\underline{x}|} \right) = -4\pi \delta. \quad (3.3)$$

Mit dieser können wir eine Lösung von (3.2) angeben:

$$\varphi = G * \rho, \quad \text{d.h.,} \quad \varphi(\underline{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|} d^3x'. \quad (3.4)$$

In der Tat gilt ^(*)

$$\Delta\varphi = \Delta G * \rho \stackrel{-4\pi}{=} \delta * \rho \stackrel{-4\pi}{=} \rho.$$

Das skalare Feld (3.1) zu φ in (3.4) ergibt sich aus

$$\text{grad } \varphi = \text{grad } G * \rho$$

und

$$\text{grad } G(\underline{x}) = - \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|^3}$$

zu
$$\underline{E} = + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\underline{x} - \underline{x}'}{|\underline{x} - \underline{x}'|^3} \rho(\underline{x}') d^3x', \quad (3.5)$$

womit wir wieder bei (3.4) angekommen sind.

Die Lösung (3.4) verhält sich im Unendlichen wie $O(1/|\underline{x}|)$. Durch diese Randbedingung wird sie aber auch eindeutig bestimmt. Das sieht man folgendermaßen: Die Differenz von zwei Lösungen ist eine harmonische Funktion im ganzen \mathbb{R}^3 ($\Delta\psi = 0$), welche im Unendlichen verschwindet. Eine solche Funktion ist aber identisch null, wie wir im nächsten Abschnitt zeigen werden.

Die Eindeigkeit kann man auch so einschauen:

* Für die Differentiation von Faltungen gilt allgemein

$$d^x(T * S) = (d^x T) * S.$$

Ich erinnere auch daran, dass die Faltung von $T \in \mathcal{D}'$ mit $S \in \mathcal{D}'$ sicher sinnvoll ist, wenn S kompakten Träger hat.

Die allgemeinste Lösung der Poisson-Gleichung ist
(s. KMP, p. VII.6)

$$\varphi = G * \rho + P,$$

wo P ein harmonisches Polynom ist. Aufgrund der geforderten Randbedingung muss dieses aber verschwinden.

Zwei Hinweise:

1. Zur Genauigkeit des $\frac{1}{r^2}$ -Gesetzes auf der Basis von Labor-Experimenten à la Cavendish, siehe

Williams et al., Phys. Rev. Lett. 26, 721 (1971).

Verwendet man die Parameterisierung

$$U(r) = qq' e^{-\alpha r}/r$$

für das Potential, so ergibt sich

$$\alpha < 3 \times 10^{-10} \text{ cm}^{-1}.$$

2. Zur Gleichheit der Beträge der Ladungen von Elektron und Proton, mit einer Genauigkeit von $< 10^{-21}$, siehe

Phys. Rev. A7, 1224 (1973);

Phys. Lett. B 137, 439 (1984).

Eine mögliche Erklärung dieser Übereinstimmung geben gewisse grossveräherlichtete Erdtheorien, bei denen die elektrische Ladung ein Generator der Erdgruppe ist, wobei es ^{ist} wesentlich, dass letztere halbkugelförmig ist.

§4. Harmonische Funktionen

A. Darstellung durch Flächenbelegungen

Unter einer Grundlösung der Potentialgleichung $\Delta\psi=0$ ^(im Gebiet G) versteht man eine Funktion der Form

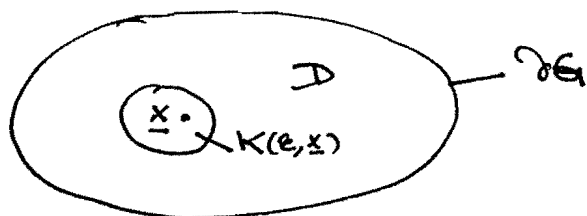
$$\gamma(\underline{x}, \underline{x}') = \frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|} + h(\underline{x}, \underline{x}'), \quad (4.1)$$

wobei $h(\underline{x}, \underline{x}')$ bei festem \underline{x} in G harmonisch ist und in $C_1(\bar{G})$ ist.

Nun wenden wir die z. Green'sche Formel

$$\int_{\partial D} \left(\psi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi' \frac{\partial \psi'}{\partial n} \right) d\omega = \int_D (\psi \Delta \psi' - \psi' \Delta \psi) dV \quad (4.2)$$

auf $D = G \setminus K(\epsilon, \underline{x})$ an (siehe Fig.; wir betrachten immer nur Gebiete mit (stückweise) glattem Rand).



Dabei sei φ eine harmonische Funktion und $\varphi(\underline{x}') = \gamma(\underline{x}, \underline{x}')$ (\underline{x} fest). Da $\Delta_{\underline{x}'} \gamma(\underline{x}, \underline{x}') = 0$ für $\underline{x} \neq \underline{x}'$, folgt mit

$$\int_{\partial K(\epsilon, \underline{x})} [\varphi(\underline{x}') \frac{\partial}{\partial n_{\underline{x}'}} \gamma(\underline{x}, \underline{x}') - \gamma(\underline{x}, \underline{x}') \frac{\partial}{\partial n_{\underline{x}'}} \varphi(\underline{x}')] d\sigma(\underline{x}')$$

$$= + \int_{|\underline{k}|=1} \left\{ \varphi(\underline{x} + \epsilon \underline{k}) \frac{\partial}{\partial \epsilon} \gamma(\underline{x}, \underline{x} + \epsilon \underline{k}) - \gamma(\underline{x}, \underline{x} + \epsilon \underline{k}) \frac{\partial}{\partial \epsilon} \varphi(\underline{x} + \epsilon \underline{k}) \right\} \cdot \epsilon^2 d\Omega_{\underline{k}}$$

$$\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} -4\pi \varphi(\underline{x}).$$

die Darstellung

$$\varphi(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial G} \left\{ \gamma(\underline{x}, \underline{x}') \frac{\partial}{\partial n_{\underline{x}'}} \varphi(\underline{x}') - \varphi(\underline{x}') \frac{\partial}{\partial n_{\underline{x}'}} \gamma(\underline{x}, \underline{x}') \right\} d\sigma(\underline{x}'). \quad (4.3)$$

Dies gilt insbesondere für $\gamma(\underline{x}, \underline{x}') = \frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|}$. Die Gleichung (4.3) ist als eine Integralgleichung aufzufassen, da man φ und $\partial\varphi/\partial n$ nicht unabhängig vorgeben kann; denn aus (4.2) folgt z.B. für $\varphi = 1$

$$\int_{\partial G} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = 0 \quad (4.4)$$

als notwendige Bedingung für eine harmonische Funktion.

B. Das Maximumprinzip

Wählen wir in (4.3) für G die Kugel $K(R, \underline{x})$ und für $\gamma(\underline{x}, \underline{x}')$ $\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|}$, so folgt die Mittelwertformel der Potentialtheorie (wenn wir noch (4.4) benutzen):

$$\varphi(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial K(R, \underline{x})} \varphi \, d\sigma. \quad (4.5)$$

Daraus folgt zunächst: Ist φ eine harmonische Funktion im ganzen Raum und $\lim_{|\underline{x}| \rightarrow \infty} \varphi(\underline{x}) = 0$, dann verschwindet φ identisch.

Mit der Mittelwertformel können wir auch den folgenden Satz beweisen.

Satz 4.1 (Maximumprinzip für harmonische Funktionen):

Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet (d.h. eine offene zusammenhängende Teilmenge) und $\varphi: G \rightarrow \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion. Nimmt φ in einem Punkt $\underline{x}_0 \in G$ ihr Maximum an, so ist φ konstant.

Beweis: Es nehme φ in \underline{x}_0 ihren maximalen Wert M an,

$$\varphi(\underline{x}_0) = M := \sup_{\underline{x} \in G} \varphi(\underline{x}).$$

Wir zeigen zuerst, dass dann φ in jeder ε -Kugel mit dem Mittelpunkt \underline{x}_0 die ganz in G liegt, konstant ist.

Es gilt dann nämlich für jedes $t \in (0, \varepsilon)$ nach der Mittelwertformel

$$M = \varphi(\underline{x}_0) = \frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial K(t, \underline{x}_0)} \varphi \, d\sigma$$

oder

$$\int_{\partial K(\epsilon, x_0)} (u - \varphi) d\sigma = 0.$$

Da $u - \varphi \geq 0$, kann dies wegen der Stetigkeit von φ nur dann gelten, wenn $\varphi = u$ überall auf $\partial K(\epsilon, x_0)$ (und dies für jedes $\epsilon \in (0, \epsilon)$).

Nun sei $M = \{x \in G : \varphi(x) = u\}$. Nach dem eben bewiesenen ist M offen. Wegen der Stetigkeit von φ ist andererseits M abgeschlossen. Da G zusammenhängend ist und M nach Annahme nicht leer ist, muss $M = G$ sein, also ist $\varphi = \text{const.}$ \square

Korollar. Ist das Gebiet ausserdem beschränkt und hat φ eine stetige Erweiterung auf \bar{G} , dann nimmt φ ihr Maximum und ihr Minimum auf dem Rand an.

Beweis: Da \bar{G} kompakt ist, nimmt φ sein Maximum auf \bar{G} an. Würde das Maximum nicht auf dem Rand ∂G angenommen, sondern in einem Punkt von G , so müsste nach dem obigen Satz φ konstant sein. Somit würde φ sein Maximum doch am Rand annehmen.

Für das Minimum beachte man $-\varphi$ an Stelle von φ . \square

Folgerung: Die Lösung der Poissonsgleichung $\Delta \varphi = \rho$ in \mathbb{R}^3 ist eindeutig falls

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |\varphi(x)| = 0.$$

Dies sehen wir bereits mit Hilfe der Mittelwerteneigenschaft für harmonische Funktionen. Mit dem obigen Korollar kann

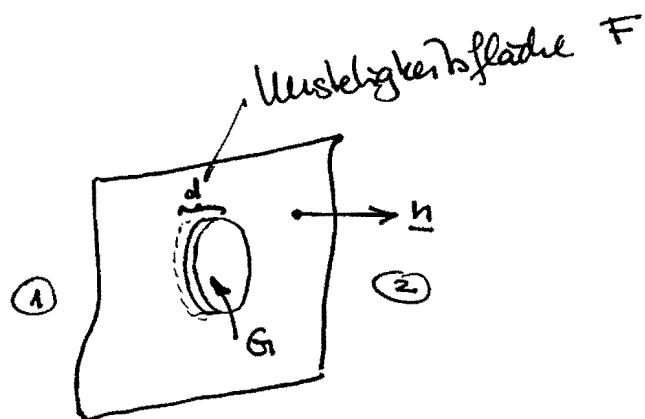
man auch so argumentieren: Die Differenz $u = \varphi_1 - \varphi_2$ von zwei Lösungen ist im ganzen \mathbb{R}^3 harmonisch und verschwindet aufgrund der geforderten Randbedingung im Unendlichen. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es daher ein $R > 0$, so dass $|u(x)| \leq \varepsilon$ für alle x mit $|x| \geq R$. In der Kugel $K(R, 0)$ nimmt u ihr Maximum und ihr Minimum auf dem Rand $\{|x| = R\}$ an. Deshalb ist $|u(x)| \leq \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist u identisch null.

§5. Oberflächenladungen, Randbedingungen für Leiter

Elektrische Leiter sind Substanzen mit "frei" beweglichen Elektronen. Im statischen Fall dürfen keine Ströme fließen und deshalb muss das elektrische Feld in einem Leiter verschwinden. Dasselbe gilt demzufolge auch für die Ladungsdichte, ausser an der Oberfläche. Bei Ladungsverteilungen auf Leitern kann man praktisch die Dimensionen im Inneren des Leiters vernachlässigen und von Oberflächenladungsdichten sprechen. Bezeichnet $\rho^*(x)$ die Flächenladungsdichte auf einer Fläche F , dann ist das zugehörige Potential

$$\varphi(x) = \int_F \frac{\rho^*(x')}{|x - x'|} d\sigma(x'). \quad (5.1)$$

Falls x durch die Fläche F hindurchgeht bleibt φ stetig. Die elektrische Feldstärke macht aber einen Sprung. Um diesen zu bestimmen, wenden wir den Satz vom Fluss auf ein Gebiet G an, das durch eine zylindrische Fläche begrenzt wird, welche ein Stück der geladenen Fläche F umschliesst (siehe Fig.).



$$\int_{\partial G} (\underline{E}, d\underline{\sigma}) = 4\pi \int_{G \cap F} \rho^* d\sigma.$$

Wir machen den Grenzübergang: Höhe des Zylinders $\rightarrow 0$,
 Grundfläche = const. Dies gibt (s. Fig.)

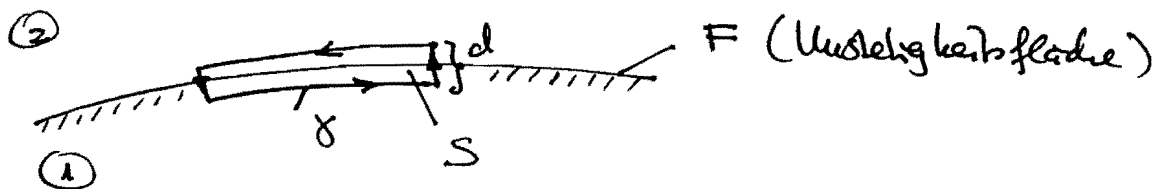
$$\int_{F'} (\underline{E}_2 - \underline{E}_1) \cdot \underline{n} \, d\sigma = 4\pi \int_{F'} \rho^* d\sigma, \text{ für alle } F' \subset F,$$

oder
$$\underline{(\underline{E}_2 - \underline{E}_1) \cdot \underline{n}} = 4\pi \rho^*. \quad (5.2)$$

Der Sprung der Normalkomponente $[\underline{E}_n] = E_{2n} - E_{1n}$ ist
 also gleich $4\pi \rho^*$. Die Tangentiale Komponente bleibt hingegen
stetig. Um dies zu sehen, bilden wir das Linienintegral

$$\int_{\gamma} \underline{E} \cdot d\underline{s}$$

von \underline{E} längs γ in der nachstehenden Fig..



Nach dem Stokes'schen Satz gilt

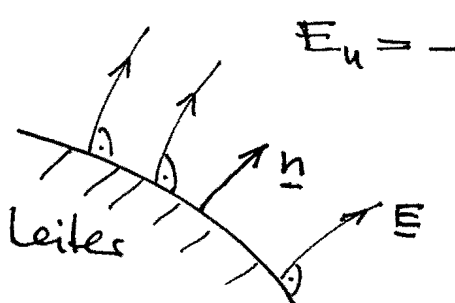
$$\int_{\gamma} \underline{E} \cdot d\underline{s} = \int_S \operatorname{rot} \underline{E} \cdot d\underline{s} = 0,$$

wobei S eine Fläche mit γ als Rand rot. Lassen wir die Höhe des "Kediteles" gegen Null, bei konstant gehaltenen Grundlinie, so folgt für ein beliebiges Kurvenstück Γ in F

$$\int_{\Gamma} (\underline{E}_1 - \underline{E}_2) \cdot d\underline{s} = 0.$$

Da Γ beliebig rot folgt die Stetigkeit der Tangentialkomponente von \underline{E} .

Für einen Leiter liegt insbesondere folgende Situation vor: Im Inneren muss das \underline{E} -Feld verschwinden. Am Rande muss deshalb auch die Tangentialkomponente verschwinden. Dagegen rot die Normalkomponente nach aussen

$$E_n = - \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 4\pi \rho^+ \quad (5.3)$$


Das Diagramm zeigt einen Leiter (eine gekrümmte Linie) mit schraffierten Innenteilen. Ein Normalvektor \underline{n} zeigt von der Oberfläche nach außen. Ein elektrisches Feld \underline{E} ist ebenfalls nach außen gezeichnet. Ein Winkel α ist zwischen dem Feldvektor und der Tangentialrichtung an der Oberfläche markiert.

Der Gradient von φ steht damit senkrecht auf der Leiteroberfläche; d.h. φ ist auf der Leiteroberfläche konstant.

§ 6. Die Energie des elektrostatischen Feldes

A. System von Punktladungen

Die (potentielle) Energie einer Anzahl von Punktladungen e_i in den Positionen \underline{x}_i ist gleich der Arbeit, die nötig

ist, um diese Ladungen aus dem Unendlichen in die vorgegebenen Positionen zu bringen.

Nun ist die Arbeit, die nötig ist um eine Punktladung e in einem beliebigen \underline{E} -Feld von \underline{x}_1 nach \underline{x} zu bringen gleich

$$W = - \int_{\underline{x}_1}^{\underline{x}} \underline{k} \cdot d\underline{s} \quad , \quad \underline{k} = e \underline{E} . \quad (6.1)$$

Da \underline{E} konservativ ist, ist das Linienintegral (6.1) unabhängig vom Weg. Aus $\underline{E} = -\nabla\varphi$ folgt

$$W = e \int_{\underline{x}_1}^{\underline{x}} \nabla\varphi \cdot d\underline{s} = e [\varphi(\underline{x}) - \varphi(\underline{x}_1)] .$$

Für $\underline{x}_1 \rightarrow \infty$ und ein im Unendlichen verschwindendes Potential erhalten wir

$$W = e\varphi(\underline{x}) . \quad (6.2)$$

Betrachten wir nun unser System von Punktladungen, so ist die Arbeit, die nötig ist, um die i te Ladung in die gewünschte Position \underline{x}_i zu bringen - wenn alle anderen Ladungen schon in ihren Positionen sind - gleich

$$W_i = e_i \varphi_i' \quad , \quad (6.3)$$

wo

$$\varphi_i' = \sum_{j(\neq i)} \frac{e_j}{|\underline{x}_j - \underline{x}_i|} . \quad (6.4)$$

Wenn die Ladungen jetzt sukzessive aus dem Unendlichen in ihre Positionen gebracht werden, erhalten wir die folgende potentielle Energie des Systems

$$E_{\text{pot}} = \sum_{i < j} \frac{e_i e_j}{|\underline{x}_i - \underline{x}_j|} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{e_i e_j}{|\underline{x}_i - \underline{x}_j|} . \quad (6.5)$$

Mit (6.4) können wir dafür auch schreiben

$$\Phi_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \sum e_i \varphi_i' . \quad (6.6)$$

B. Kontinuierliche Ladungsverteilung

Als Verallgemeinerung von (6.5) erhalten wir in diesem Fall

$$\Phi_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3x' \frac{\rho(x) \rho(x')}{|x-x'|} , \quad (6.7)$$

oder auch

$$\Phi_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \int d^3x \rho(x) \varphi(x) . \quad (6.8)$$

Diesem Ausdruck wollen wir jetzt so umformen, dass nur noch das elektrische Feld vorkommt. Es ist zunächst

$$\Phi_{\text{pot}} = \frac{1}{8\pi} \int d^3x \varphi \nabla \cdot \underline{E} .$$

Mit

$$\nabla(\varphi \underline{E}) = \varphi \nabla \cdot \underline{E} + \underline{E} \cdot \nabla \varphi$$

und dem Gauss'schen Integralsatz folgt

$$\Phi_{\text{pot}} = - \frac{1}{8\pi} \int \underline{E} \cdot \nabla \varphi d^3x = \frac{1}{8\pi} \int |\underline{E}|^2 d^3x \geq 0 . \quad (6.9)$$

Dabei haben wir ein Oberflächenintegral im Unendlichen weggelassen. Dies ist sicher erlaubt, wenn ρ ausschließlich eines beschränkten Gebietes verschwindet (dann geht $\varphi \sim \frac{1}{r}$, $\underline{E} \sim \frac{1}{r^2}$, $d\sigma \sim r^2$).

Die wichtige Formel (6.9) legt es nahe, die folgende Energiedichte des elektrischen Feldes einzuführen:

$$w = \frac{1}{8\pi} |\underline{E}|^2 . \quad (6.10)$$

Bemerkung

Für Punktladungen gilt (6.9) nicht; das Integral würde divergieren. Dies rührt davon her, dass in (6.9) auch "Selbstenergie"-Beiträge enthalten sind. Um diesen Fall zu untersuchen sei

$$\varphi_k(\underline{x}) = \frac{e_k}{|\underline{x} - \underline{x}_k|}, \quad \underline{E}_k = -\nabla \varphi_k.$$

Nun betrachten wir für $i \neq j$ das Integral $\int \underline{E}_i \cdot \underline{E}_j d^3x$, wobei wir die Singularitäten in \underline{x}_i und \underline{x}_j durch kleine Kugeln $k_i = K(R_i, \underline{x}_i)$ aussparen. Ähnlich wie unter B folgt dann

$$\begin{aligned} \int \underline{E}_i \cdot \underline{E}_j dV &= - \int \underline{E}_i \cdot \nabla \varphi_j dV = - \int \nabla \cdot (\varphi_j \underline{E}_i) dV + \\ &+ \int \varphi_j \underbrace{\nabla \cdot \underline{E}_i}_0 dV = - \int_{\partial k_i} \varphi_j \underline{E}_{in} d\sigma - \int_{\partial k_j} \varphi_j \underline{E}_{iu} d\sigma \end{aligned}$$

(∇ zeigt ins Innere von k_i). Wieder haben wir uns Recht ein Oberflächenintegral im Unendlichen weggelassen. Der zweite Term (nach dem letzten Gleichheitszeichen) geht gegen Null wenn k_j auf \underline{x}_j zusammenschrumpft. Nur der erste Term gibt einen Beitrag: Für $k_i \rightarrow \underline{x}_i$ geht $\varphi_j \rightarrow e_j / |\underline{x}_i - \underline{x}_j|$, $\underline{E}_{iu} = -\underline{e}_i / R_i^2$, also

$$- \int_{\partial k_i} \underline{E}_{iu} \varphi_j d\sigma \rightarrow 4\pi \frac{e_i e_j}{|\underline{x}_i - \underline{x}_j|},$$

d.h.
$$\int \underline{E}_i \cdot \underline{E}_j d^3x = 4\pi \frac{e_i e_j}{|\underline{x}_i - \underline{x}_j|} \quad (i \neq j). \quad (6.11)$$

Dies beweist, mit (6.5),

$$\underline{E}_{\text{pot}} = \frac{1}{8\pi} \sum_{i \neq j} \int \underline{E}_i \cdot \underline{E}_j d^3x, \quad (6.12)$$

oder auch

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{8\pi} \int [E^2 - \sum E_i^2] dV. \quad (6.13)$$

Der zweite Term im Integranden subtrahiert die Selbstenergie. (Das Integral darf man natürlich nicht in zwei Teile aufspalten, da jeder einzeln divergiert!)

§ 7. Der Spannungstensor des elektrostatischen Feldes

Dem elektrischen Feld kann man auch Spannungen zuordnen. Um dies zu sehen, formen wir die Kraftdichte

$$\underline{k}(\underline{x}) = \rho(\underline{x}) \underline{E}(\underline{x}) \quad (7.1)$$

auf eine kontinuierliche Ladungsverteilung ρ , unter Benutzung der Feldgleichungen (z.B.), wie folgt um:

$$\underline{k} = \frac{1}{4\pi} \underline{E} (\nabla \cdot \underline{E}) = \frac{1}{4\pi} [\underline{E} (\nabla \cdot \underline{E}) + \underbrace{(\nabla \wedge \underline{E}) \wedge \underline{E}}_{\text{tot } \underline{E} = 0}]. \quad (7.1')$$

Nun ist

$$[(\nabla \wedge \underline{E}) \wedge \underline{E}]_i = \underbrace{\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jmn}}_{(\delta_{in} \delta_{km} - \delta_{im} \delta_{kn})} (\partial_m E_n) E_k$$

$$= (\partial_k E_i) E_k - (\partial_i E_k) E_k = E_k (\partial_k E_i - \partial_i E_k).$$

Damit ist

$$\begin{aligned} 4\pi k_i &= E_i \partial_k E_k + E_k (\partial_k E_i - \partial_i E_k) \\ &= \partial_k (E_i E_k) - \frac{1}{2} \partial_i E^2 = \partial_k [E_i E_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} E^2]. \end{aligned}$$

Wir setzen

$$\underline{T}_{ik} = \frac{1}{4\pi} [E_i E_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} E^2], \quad (7.2)$$

womit das Resultat unserer Rechnung wie folgt lautet

$$\boxed{k_i = \partial_k T_{ik}} \quad (7.3)$$

Man zeigt leicht, dass T_{ik} sich wie die Komponenten eines Tensors 2. Stufe (beim Übergang zu einem neuen cartesischen Koordinatensystem) transformieren. T_{ik} ist der elektrische Spannungstensor. Wir diskutieren seine physikalische Bedeutung.

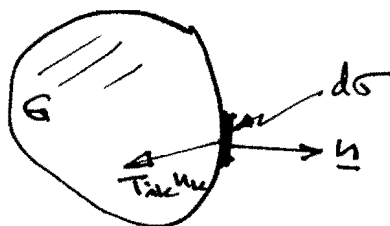
Die gesamte elektrische Kraft, welche auf ein Teilgebiet G einer Ladungsverteilung wirkt, ist

$$K_i = \int_G k_i dV = \int_G \partial_k T_{ik} dV.$$

Nach dem Gauss'schen Satz können wir die rechte Seite in ein Oberflächenintegral verwandeln:

$$K_i = \int_{\partial G} T_{ik} n_k d\sigma \quad (\underline{n}: \text{Normalenvektor}). \quad (7.4)$$

Dies zeigt, dass die Volumenkraft äquivalent zu einer Oberflächkraft ist. Die Größen $T_{ik} \cdot n_k$ (\underline{n} : Normale nach ausen) sind die cartesischen Komponenten der Kraft, welche pro Flächeneinheit auf den Körper wirkt (s. Fig.).



Die elektrischen Kräfte sind also von ähnlicher Art wie die Spannungen in einem elastischen Körper, welche durch Deformationen desselben hervorgerufen werden. (Konsultiere ein Buch über Mechanik deformierbarer Medien, z.B. Sommerfeld, Bd. II.)

Die Formel (7.4) kann man auch praktisch benutzen, um

die elektrische Kraft auf einen Körper zu berechnen (s. Übungen).
 Liegt ein Flächenelement ds senkrecht zu den Feldlinien, d.h. ist \underline{n} parallel (oder antiparallel) zu \underline{E} , so ist

$$T_{ik} n_k = \frac{1}{8\pi} n_i |\underline{E}|^2 \quad (7.5)$$

und liegt ds tangential zu den Feldlinien ($\underline{n} \cdot \underline{E} = 0$), so ist

$$T_{ik} n_k = -\frac{1}{8\pi} n_i |\underline{E}|^2 \quad (7.6)$$

Gl. (7.5) interpretiert man als "Zug" in Richtung der Feldlinien und Gl. (7.6) als "Druck" senkrecht zu den Feldlinien.

Wir betonen, dass die Komponenten des Spannungstensors an einer Stelle nur von der elektrischen Feldstärke an dieser Stelle abhängen.

Der Spannungstensor ist nach (7.2) symmetrisch. Dies hat folgende Bedeutung. Betrachten wir das Drehmoment \underline{N} , welches durch die elektrischen Kräfte auf die Ladungsverteilung innerhalb G ausgeübt wird:

$$\underline{N} = \int_G \underline{x} \wedge \underline{k}(\underline{x}) d\vec{x} \quad (7.7)$$

Nach (7.3) ist dieses

$$N_i = \varepsilon_{ijk} \int_G x_j \partial_l T_{kl} dx = \varepsilon_{ijk} \int_G [\partial_l (x_j T_{kl}) - T_{kj}] dx.$$

Da T_{kj} symmetrisch ist, verschwindet durch den 2. Term und es bleibt

$$N_i = \varepsilon_{ijk} \int_G \partial_l (x_j T_{kl}) dx = \varepsilon_{ijk} \int_{\partial G} x_j T_{kl} n_l d\sigma \quad (7.8)$$

Dies ist das Drehmoment, welches durch die Oberflächenkraftdichte $T_{\text{ke}} n_e$ hervorgerufen wird. Dafür ist die Symmetrie von T_{ke} wesentlich, andernfalls würde ein Volumintegral hinzukommen.

Da sich sowohl Gesamtkraft als auch das Drehmoment durch Oberflächenintegrale darstellen lassen, verschwinden diese Größen für ein abgeschlossenes System von Ladungen und dem durch diese hervorgerufenen elektrischen Feld, d.h. es gilt der Impulssatz und auch der Drehimpulssatz. Teilt man überdies ein Gesamtsystem in zwei Teilsysteme auf, so ergibt sich leicht das Prinzip von $a_{\text{ch}0} = +e a_{\text{ch}0}$.

Damit haben wir die wichtigsten Grundlagen der "mikroskopischen" Elektrostatik erarbeitet. Wir wollen nun die Felder von einigen konkreten Systemen bestimmen und dazugehörige Methoden entwickeln.

* * *

§ 8. Randwertprobleme der Elektrostatik

8.1. Leiter im elektrostatischen Feld

Häufig ist in elektrostatischen Problemen die Ladungsverteilung nicht vorgegeben. Wenn eine Anzahl elektrischer Leiter L_1, L_2, \dots, L_n (im Endlichen) vorliegt, dann ist auf diesen entweder das Potential, oder die Oberflächenladung vorgegeben. Das elektrostatische Potential φ genügt deshalb den folgenden Bedingungen:

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \Delta \varphi(\underline{x}) = 0 \quad \text{für } \underline{x} \notin \bigcup_i L_i, \\ \text{(ii)} \quad \varphi = \varphi_i \quad \text{auf } L_i, \quad i=1, \dots, m (\leq n), \\ \text{(iii)} \quad -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial L_j} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = Q_j, \quad j=m+1, \dots, n, \end{array} \right\} \quad (8.1)$$

wobei die φ_i ($i=1, \dots, m$) und die Q_j ($j=1, \dots, n$) vorgegeben sind.

Über Randwertprobleme dieser und verwandter Art gibt es eine ausgedehnte mathematische Literatur. Obwohl eine physikalisch sinnvolle Randwertaufgabe auch eine Lösung hat, ist es interessant, auch mathematische Existenzsätze zu beweisen. Dies ist aber gar nicht einfach und ich muss diese Mathematische Vorlesungen überlassen. Viel einfacher ist die Frage der Eindeutigkeit: Es seien φ_1 und φ_2 zwei Lösungen von (8.1) und $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$. Dann gilt auf allen Leitern

$$\int_{\partial L_i} \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} d\sigma = 0, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Nun wenden wir den Gauss'schen Integralsatz für $\psi \nabla \psi$ auf das Gebiet $\mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_i L_i$ an, und bemerken, dass ψ im Unendlichen verschwindet. (Wir verlangen, neben (8.1), dass φ im Unendlichen wie $O(1/|x|)$ verschwindet.) Es bleibt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\bigcup_i \partial L_i} \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} d\sigma = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_i L_i} \nabla \cdot (\psi \nabla \psi) dV \\ &= \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_i L_i} |\nabla \psi|^2 dV. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Deshalb ist ausserhalb der Leiter $\nabla \psi = 0$ und damit $\varphi_1 = \varphi_2$ ausserhalb der Leiter. Da ψ an den Leiteroberflächen stetig und innerhalb der Leiter konstant ist, folgt $\varphi_1 = \varphi_2$ im ganzen \mathbb{R}^3 .

Wir beobachten zunächst das spezielle Problem (S), bei dem die Potentiale φ_i auf allen Leitern vorgegeben sind. (Darauf lässt sich der allgemeine Fall zurückführen, wie wir weiter unten sehen werden.)

Es sei $\varphi^{(i)}$ die Lösung des Randwertproblems mit den Randbedingungen $\varphi^{(i)}(\underline{x}) = \delta_{ik}$ für $\underline{x} \in L_k, k=1, \dots, n$.

Wegen der Linearität des Randwertproblems (S) lässt sich dessen Lösung wie folgt darstellen:

$$\varphi(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n \varphi_i \varphi^{(i)}(\underline{x}). \quad (8.3)$$

Wir betrachten die zugehörige Feldenergie

$$W = \frac{1}{8\pi} \int |\nabla\varphi|^2 dV = \sum_{i,j} \varphi_i \varphi_j \frac{1}{8\pi} \int \nabla\varphi^{(i)} \cdot \nabla\varphi^{(j)} dV. \quad (8.4)$$

Die Kapazitätskoeffizienten, C_{ij} , sind definiert durch

$$\frac{1}{2} C_{ij} = \frac{1}{8\pi} \int \nabla\varphi^{(i)} \cdot \nabla\varphi^{(j)} dV. \quad (8.5)$$

Diese bilden eine positiv definite symmetrische Matrix (W ist positiv!). Ähnlich wie (8.2) erhält man

$$\underline{4\pi C_{ij}} = \int_{\bigcup_i \partial L_i} \varphi^{(i)} \frac{\partial\varphi^{(j)}}{\partial n} d\sigma = \int_{\partial L_i} \frac{\partial\varphi^{(j)}}{\partial n} d\sigma = 4\pi Q_i^{(j)}. \quad (8.6)$$

Dabei ist $Q_i^{(j)}$ die Ladung auf L_i bei der Randbedingung: $\varphi=1$ auf L_j , $\varphi=0$ auf L_u ($u \neq j$). (Beachte, dass die Normale \underline{n} in den Leiter hineinzeigt; deshalb ist das Vorzeichen in (8.6) richtig.)

Für die Lösung (8.3) ist damit die Ladung Q_i auf L_i gleich

$$Q_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} \varphi_j, \quad (8.7)$$

und die Energie ist nach (8.4), (8.5) und (8.7)

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,j} C_{ij} \varphi_i \varphi_j = \frac{1}{2} \sum_i Q_i \varphi_i. \quad (8.8)$$

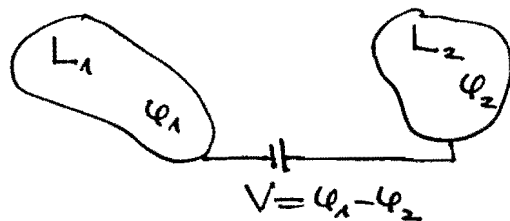
Beachte, dass die Bestimmung der C_{ij} die Lösung von n Randwert Aufgaben vom Typ (S) erfordert. (Diese hängen also nur von der Geometrie ab.)

Nun führen wir das allgemeine Problem (8.1) auf (S) zurück. Dazu schreiben wir (8.7) in der Form

$$\sum_{j=m+1}^n C_{ij} \varphi_j = Q_i - \sum_{j=1}^m C_{ij} \varphi_j, \quad i=m+1, \dots, n. \quad (8.9)$$

Die rechte Seite in (8.9) ist bekannt. Ferner ist die Determinante der C_{ij} ($i, j=m+1, \dots, n$) strikte positiv, da dies die Koeffizienten einer positiv definiten quadratischen Form sind. Deshalb kann man (8.9) stets nach $\varphi_{m+1}, \dots, \varphi_n$ auflösen und damit ist das Randwertproblem (8.1) auf (S) zurückgeführt.

Kapazität eines Kondensators: Ein solcher besteht aus zwei Leitern L_1, L_2 mit $Q_1 + Q_2 = 0$.



Ist $V = \varphi_1 - \varphi_2$ die Potentialdifferenz, so definiert man die Kapazität C durch

$$Q_1 = -Q_2 = C V. \quad (8.10)$$

Wie hängt diese mit den C_{ij} ($i, j=1, 2$) zusammen?

Aus

$$0 = Q_1 + Q_2 \stackrel{(8.7)}{=} (C_{11} + C_{12}) \varphi_1 + (C_{22} + C_{12}) \varphi_2,$$

$$V = \varphi_1 - \varphi_2,$$

findet man

$$\varphi_1 = \frac{C_{22} + C_{12}}{C_{11} + C_{22} + 2C_{12}} \cdot V, \quad \varphi_2 = - \frac{C_{11} + C_{12}}{C_{11} + C_{22} + 2C_{12}} \cdot V,$$

und damit

$$Q_1 = C_{11} \varphi_1 + C_{12} \varphi_2 = \frac{C_{11} C_{22} - C_{12}^2}{C_{11} + C_{22} + 2C_{12}} \cdot V.$$

Dies zeigt

$$C = \frac{C_{11} C_{22} - C_{12}^2}{C_{11} + C_{22} + 2C_{12}}. \quad (8.11)$$

Die Energie (8.8) ist

$$W = \frac{1}{2} \sum \varphi_i Q_i = \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_2) Q_1 = \frac{1}{2} V Q_1$$

oder nach (8.10)

$$W = \frac{1}{2} C V^2. \quad (8.12)$$

Daraus folgt insbesondere $C > 0$.

Beispiel eines Randwertproblems (Faraday Käfig):

Ein ladungsfreies Gebiet G werde von einer metallischen Oberfläche ∂G begrenzt. Dort ist also $\varphi = \text{const.}$. Die eindeutige Lösung in G ist $\varphi = \text{const.}$ (Nach dem Maximumprinzip ist das Maximum gleich dem Minimum in \bar{G} , also $\varphi = \text{const.}$.) In G ist also $\underline{E} = 0$. Dies ist das Prinzip des Faraday Käfigs.

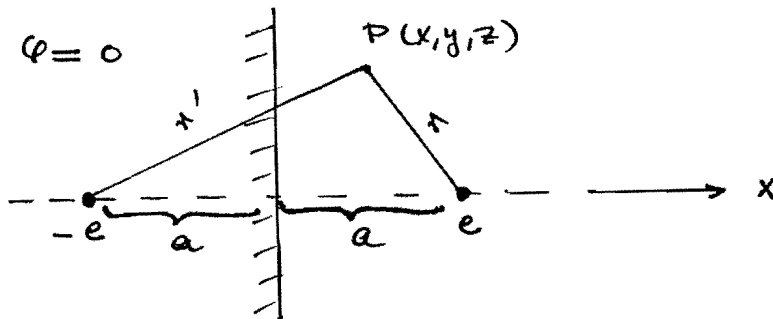
8.2. Lösung einiger spezieller Randwertprobleme

Wir betrachten zuerst ein sehr einfaches Problem

a) Punktladung gegenüber einer unendlich ausgedehnten Metallplatte (Methode der Spiegelung)

Wir setzen die Platte als geerdet voraus. (Damit ist gemeint, dass die Platte mit Hilfe einer leitenden Verbindung auf dem gleichen Potential gehalten wird wie der Punkt im Unendlichen. Dabei ist angenommen, dass diese Verbindung die Potentialverteilung nicht stört.)

Nun denken wir uns im linken Halbraum eine gespiegelte Ladung mit dem umgekehrten Vorzeichen hinein-gesetzt (s. Fig.).



Betrachten wir im rechten Halbraum das Potential

$$\varphi = \frac{e}{r} - \frac{e}{r'} \quad , \quad (8.13)$$

so ist dort ausserhalb der Punktladung die Laplace Gleichung erfüllt und an der Plattenoberfläche ist $\varphi=0$.
Sehen wir deshalb

$$\varphi = \begin{cases} \frac{e}{r} - \frac{e}{r'} & \text{im rechten Halbraum,} \\ 0 & \text{im linken Halbraum,} \end{cases} \quad (8.14)$$

so sind die Feldgleichungen und die Randbedingungen erfüllt. Damit haben wir die eindeutige (!) Lösung gefunden. (Skizziere die zugehörigen elektrischen Feldlinien)

Wir berechnen noch die auf der Platte induzierte Oberflächenladung. Die Komponente der Feldstärke senkrecht zur Platte (x -Komponente) ist

$$E_x = \frac{e}{r^3} (x-a) - \frac{e}{r'^3} (x+a).$$

Auf der Platte ist $x=0$, $r=r'$, $E_x = -\frac{2a}{r^3} e = 4\pi \rho^k$,
d.h.

$$\rho^k = -\frac{e}{2\pi} \frac{a}{r^3}. \quad (8.15)$$

Die Gesamtladung auf der Platte ist ($r = \sqrt{\rho^2 + a^2}$):

$$\underline{0} = \int_0^\infty 2\pi \rho d\rho \rho^k(\rho) = \int_a^\infty 2\pi r dr \rho^k(r) = \underline{-e}, \quad (8.16)$$

Spiegelungsmethode: Die in diesem Beispiel benutzte Spiegelungsmethode besteht etwas allgemeiner ausgedrückt in folgendem. Für einfache geometrische Konfigurationen kann man manchmal eine Anzahl von Ladungen ausserhalb des interessierenden Gebietes so hinstellen, dass die geforderten Randbedingungen simuliert werden. Dadurch wird das vorliegende elektostatische Problem mit Randbedingungen durch ein solches ohne Randbedingungen (mit "virtuellen" Ladungen) ersetzt. Damit die Laplace-Gleichung im ursprünglich betrachteten Gebiet erfüllt bleibt, ist es wichtig, dass die virtuellen Ladungen ausserhalb dieses Gebietes liegen.

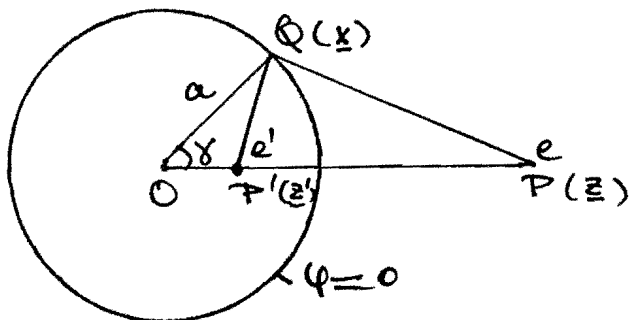
Wir illustrieren diese Bemerkungen durch weitere Beispiele.

b) Punktladung ausserhalb einer geerdeten leitenden Kugel

Wir betrachten eine geerdete leitende Kugel K mit Radius a und eine Punktladung e ausserhalb von K mit dem Ortsvektor \underline{z} . An der zu \underline{z} Kelvintransformierten Stelle

$$\underline{z}' = a^2 \frac{\underline{z}}{|\underline{z}|^2} \quad (\Rightarrow |\underline{z}| \cdot |\underline{z}'| = a^2) \quad (8.17)$$

setzen wir eine virtuelle Ladung e' . In der nachstehenden Fig. sind die Dreiecke $OP'Q$ und OQP ähnlich, denn der Winkel bei O ist gemeinsam und es ist $|\underline{z}'|/a = a/|\underline{z}|$.



Deshalb gilt für einen Punkt x auf der Kugeloberfläche

$$\frac{|\underline{x} - \underline{z}'|}{|\underline{x} - \underline{z}|} = \frac{a}{|\underline{z}|} = \frac{|\underline{z}'|}{a} = \sqrt{\frac{|\underline{z}'|}{|\underline{z}|}} = \text{const.} \quad (8.18)$$

Setzen wir also

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} \frac{e}{|\underline{x}-\underline{z}|} + \frac{e'}{|\underline{x}-\underline{z}'|} & \text{außerhalb } K, \\ 0 & \text{innerhalb } K, \end{cases} \quad (8.19)$$

so ist die Randbedingung $\varphi=0$ auf der Kugeloberfläche erfüllt, falls

$$e' = -e \frac{|\underline{x}-\underline{z}'|}{|\underline{x}-\underline{z}|} = -e \sqrt{\frac{|\underline{z}'|}{|\underline{z}|}} (= \text{const!}) = -e \frac{a}{|\underline{z}|} \quad (8.20)$$

ist. Mit diesem Wert von e' löst also (8.19) das Randwertproblem.

Wir berechnen noch die Oberflächen-Ladungsdichte

$$\rho^* = -\frac{1}{4\pi} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=a} ; \quad r = |\underline{x}|.$$

Nach dem Satz vom Fluss ist die gesamte Oberflächenladung gleich e' . Sei $|\underline{z}| = \rho$ ($\Rightarrow |\underline{z}'| = a^2/\rho$) und γ der Winkel zwischen \underline{x} und \underline{z} , dann ist für $r \geq a$

$$\varphi(r, \gamma) = \frac{e}{(r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \gamma)^{1/2}} - e \frac{a}{\rho} \frac{1}{(r^2 + \frac{a^4}{\rho^2} - 2r\frac{a^2}{\rho} \cos \gamma)^{1/2}}$$

und folglich

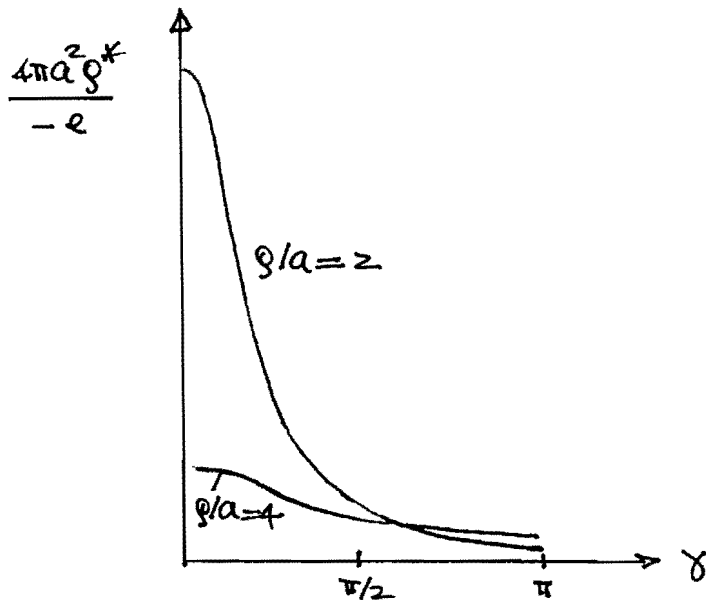
$$\rho^*(\gamma) = \frac{e}{4\pi} \left\{ \frac{a - \rho \cos \gamma}{(a^2 + \rho^2 - 2\rho a \cos \gamma)^{3/2}} - \frac{a}{\rho} \frac{a - \frac{a^2}{\rho} \cos \gamma}{(a^2 + \frac{a^4}{\rho^2} - \frac{2a^3}{\rho} \cos \gamma)^{3/2}} \right\}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\rho^2/a} \frac{1 - a/\rho \cos \gamma}{(a^2 + \rho^2 - 2\rho a \cos \gamma)^{3/2}} \leftarrow \cdot \cos \gamma$

oder

$$\rho^*(\gamma) = -\frac{e}{4\pi a^2} \frac{a}{\rho} \frac{1 - a^2/\rho^2}{(1 + \frac{a^2}{\rho^2} - \frac{2a}{\rho} \cos \gamma)^{3/2}}. \quad (8.21)$$

Diese Verteilung ist in der nächsten Fig. für zwei Werte von ρ/a dargestellt. Natürlich konzentriert sich die Ladung in Richtung von e .



Wie gross ist die Kraft auf e ? Diese ist offensichtlich gleich der Kraft der virtuellen Ladung e' auf e , d.h.

$$|\underline{K}| = \frac{|e'e|}{|z-z'|^2} = \frac{e^2 a}{\rho} \frac{1}{\rho^2 (1 - \frac{a^2}{\rho^2})^2}$$

oder

$$|\underline{K}| = \frac{e^2}{a^2} \left(\frac{a}{\rho}\right)^3 \frac{1}{(1 - a^2/\rho^2)^2}. \quad (8.22)$$

Dies muss auch gleich der Kraft sein, welche auf die Kugel wirkt. Es ist instruktiv, dies durch direkte Rechnung zu verifizieren. Das \underline{E} -Feld steht senkrecht auf der Oberfläche und hat den Betrag $4\pi q^k$. Wenn \underline{n} das Einheits-Normalenfeld auf der Kugeloberfläche (nach aussen) bezeichnet, so ist die Oberflächenkraftdichte $T_{ik} n_k$ nach (7.5) parallel zu \underline{n} gleich $\frac{1}{8\pi} \underline{n} |\underline{E}|^2 = \underline{n} 2\pi (\rho^k)^2$. Aus Symmetriegründen trägt natürlich nur die Komponente parallel zu \underline{z} etwas zur Gesamtkraft bei. Deshalb ist

$$|\underline{K}| = 2\pi \int_{\Omega_K} (\rho^k)^2 \cos \gamma \, d\Omega = 2\pi a^2 \int_{S^2} (\rho^k)^2 \cos \gamma \, d\Omega \quad (8.21)$$

$$= \frac{e^2}{8\pi a^2} \left(\frac{a}{\rho}\right)^2 (1 - \frac{a^2}{\rho^2})^2 \int_{S^2} \frac{\cos \gamma}{(1 + \frac{a^2}{\rho^2} - \frac{2a}{\rho} \cos \gamma)^3} \, d\Omega.$$

$$2\pi \int_{-1}^{+1} d(\cos \gamma) \frac{\cos \gamma}{(1 + \frac{a^2}{\rho^2} - \frac{2a}{\rho} \cos \gamma)^3}$$

Daraus ergibt sich sofort (8.22).

c) Punktladung ausserhalb einer isolierten leitenden Kugel

Wir geben uns jetzt die Gesamtladung Q auf der isolierten Leitersoberfläche ∂K vor.

Die Lösung dieses Problems erhalten wir offensichtlich, wenn wir neben der in b) betrachteten virtuellen Punktladung noch eine solche im Nullpunkt von der Grösse $Q - e'$ hinzusetzen:

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} \frac{e}{|\underline{x} - \underline{z}|} + \frac{e'}{|\underline{x} - \underline{z}'|} + \frac{Q - e'}{|\underline{x}|} & \text{ausserhalb } K, \\ (Q - e')/a & \text{innerhalb } K. \end{cases} \quad (8.23)$$

Nach dem Satz vom Fluss ist die gesamte Oberflächenladung in der Tat gleich Q und die Laplace Gleichung ist ausserhalb \bar{K} erfüllt; ausserdem ist φ auf ∂K stetig.

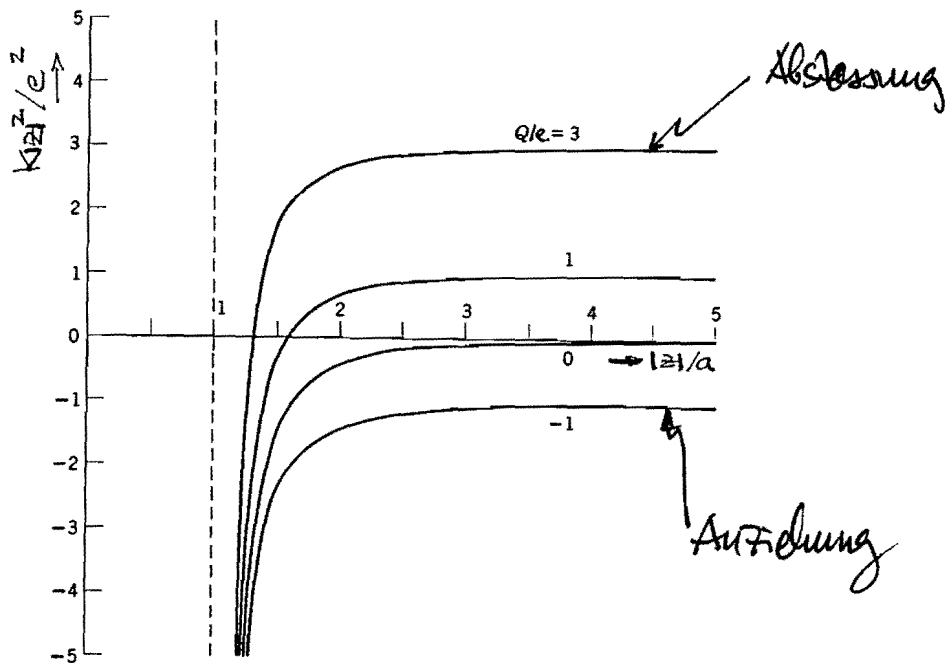
Wir bestimmen wieder die Kraft auf die Ladung e .

$$\begin{aligned} \underline{K} &= \frac{ee'}{|\underline{z} - \underline{z}'|^3} (\underline{z} - \underline{z}') + \frac{e(Q - e')}{|\underline{z}|^3} \underline{z} \\ &= \frac{eQ}{|\underline{z}|^3} \underline{z} + \underbrace{ee'}_{-ea/|\underline{z}|} \left[\frac{\underline{z}(1 - a^2/|\underline{z}|^2)}{|\underline{z}(1 - a^2/|\underline{z}|^2)|^3} - \frac{\underline{z}}{|\underline{z}|^3} \right]; \\ &\quad \underbrace{\frac{\underline{z}}{|\underline{z}|^3} \left[\frac{1}{(1 - a^2/|\underline{z}|^2)^2} - 1 \right]} \\ \underline{K} &= \frac{e\underline{z}}{|\underline{z}|^3} \left[Q - \frac{ea^3}{|\underline{z}|} \frac{2|\underline{z}|^2 - a^2}{(1|\underline{z}|^2 - a^2)^2} \right]. \end{aligned} \quad (8.24)$$

Dieses Resultat wollen wir genauer diskutieren. Für $|\underline{z}| \gg a$ erhält man natürlich die übliche Coulombkraft zwischen zwei Punktladungen.

In der folgenden Fig. ist $K|\underline{z}|^2/e^2$ für verschiedene Werte von Q/e als Funktion von $|\underline{z}|/a$ aufgetragen.

Positive (negative) Werte entsprechen Abstossung (Anziehung).
 Für $Q_e \leq 0$ ist die Kraft überall attraktiv. Aber auch für $Q_e > 0$ wird diese bei kleinen Abständen attraktiv. Der instabile Gleichgewichtspunkt ($K=0$) ist für $Q \gg e$ ganz nahe bei der Kugel: $|z| \approx a(1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{e}{Q}})$. Dieses Ergebnis illustriert, warum eine Überschussladung auf einer Oberfläche – trotz gegenseitiger Repulsion – diese nicht sofort verlässt, denn die zugehörige virtuelle Ladung würde diese sofort anziehen.



d) Leitende Kugel in einem homogenen elektrischen Feld

Dieses Problem kann man als Grenzfall von c) für $Q=0$ auffassen, indem man folgenden Limes durchführt: $|z| \rightarrow \infty$, $e \rightarrow \infty$, so dass $\frac{e}{|z|^2} \rightarrow E$, wobei E das homogene elektrische Feld bezeichnet. (Dieses zeige in die x-Richtung.)
 Dann entsteht im Mittelpunkt der Kugel aus den virtuellen Ladungen ein Dipol (s. Übungen) mit dem Moment:

$$p = \lim_{|z| \rightarrow \infty} |e'| |z'| = \lim_{|z| \rightarrow \infty} [e \sqrt{\frac{|z'|}{|z|}} |z'|] = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{ea^3}{|z|^2} = E a^3 \quad (8.25)$$

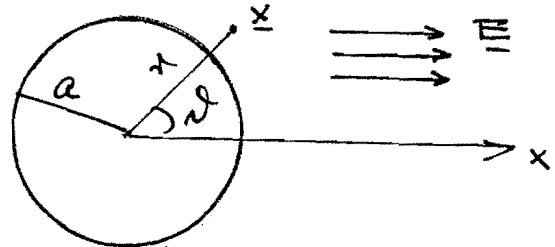
Man kann auch direkt den Ansatz machen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi = \underbrace{-Ex}_{\text{äusseres Feld}} + A + \underbrace{\frac{Bx}{r^3}}_{\text{Dipolfeld}}, \quad r := |x| > a, \\ \varphi = A, \quad r < a. \end{array} \right.$$

Dieser erfüllt $\Delta\varphi = 0$.

Sei $x = r \cos\vartheta$ (s. Fig.), dann lautet der Ansatz

$$\varphi = \cos\vartheta \left(-Er + \frac{B}{r^2} \right) + A, \quad r > a.$$



Damit φ für $r=a$ stetig ist, muss die Klammer dort verschwinden, d.h. $B = Ea^3$, wie in (8.25). (A bleibt unbestimmt, da man φ beliebig normieren kann).

Die Ladungsverteilung auf der Kugeloberfläche ist

$$4\pi \rho^* = - \frac{\partial\varphi}{\partial r} \Big|_{r=a} = \cos\vartheta \left(E + \frac{2B}{a^3} \right) = 3E \cos\vartheta. \quad (8.26)$$

Die Gesamtladung verschwindet deshalb ($\int \cos\vartheta d\Omega = 0$).

Die Kraft auf die Kugel ist (nur die x-Komponente verschwindet nicht a priori)

$$K = 2\pi \int (\rho^*)^2 \cos\vartheta d\sigma = 0.$$

Wir halten das Resultat für später fest:

$$\varphi = \begin{cases} E \cos\vartheta \left(-r + \frac{a^3}{r^2} \right) + A, & r > a, \\ A, & r < a. \end{cases} \quad (8.27)$$

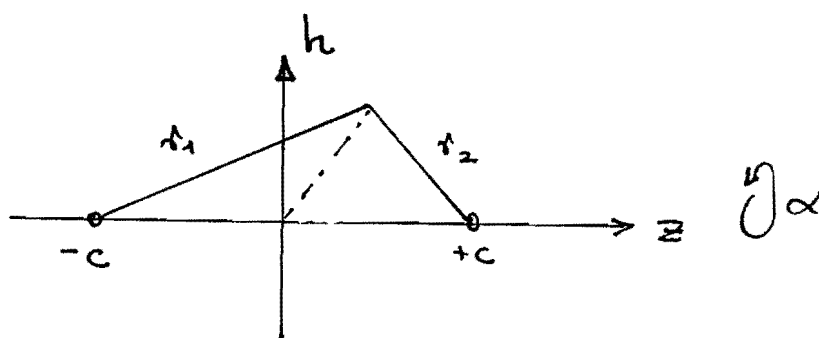
Skizziere den Feldlinienverlauf.

* * *

e) Das Feld eines geladenen leitenden Rotationsellipsoids

Wir bestimmen jetzt das Feld eines leitenden geladenen Rotationsellipsoids der Gesamtladung Q .

Dazu konstr. wir die Laplace-Gleichung auf elliptische Koordinaten (u, v, α) . Diese sind wie folgt definiert (s. Fig.):



(h, z, α) seien zylindrische Koordinaten;

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= 2u, \\ r_1 - r_2 &= 2v. \end{aligned} \quad (8.28)$$

Aus der Fig. entnimmt man:

$$r_1^2 = (z+c)^2 + h^2, \quad r_2^2 = (z-c)^2 + h^2, \quad (h^2 = x^2 + y^2).$$

Deshalb ist

$$u \cdot v = \frac{r_1^2 - r_2^2}{4} = c \cdot z,$$

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2) = z^2 + c^2 + h^2;$$

$$\Rightarrow h^2 = u^2 + v^2 - z^2 - c^2 = u^2 + v^2 - \frac{u^2 v^2}{c^2} - c^2,$$

d.h.

$$\left. \begin{aligned} z &= \frac{uv}{c}, \\ h &= \frac{\sqrt{(u^2 - c^2)(c^2 - v^2)}}{c}. \end{aligned} \right\} \quad (8.29)$$

Das Linienelement ist, wie eine kleine Rechnung zeigt,

$$ds^2 = dh^2 + dz^2 + h^2 d\alpha^2 = (u^2 - v^2) \left\{ \frac{du^2}{u^2 - c^2} + \frac{dv^2}{c^2 - v^2} \right\} + \frac{(u^2 - c^2)(c^2 - v^2)}{c^2} d\alpha^2. \quad (8.30)$$

MUP, Kap. IV

Im Anhang zu diesem Kapitel wird der Laplace Operator auf allgemeine krummlinige (rechtwinklige) Koordinaten transformiert. Mit der Formel (A.11) findet man aus (8.30) sofort:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{u^2 - v^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left((u^2 - c^2) \frac{\partial\varphi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left((c^2 - v^2) \frac{\partial\varphi}{\partial v} \right) \right\} + \frac{c^2}{(u^2 - c^2)(c^2 - v^2)} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}. \quad (8.31)$$

Die Oberfläche des Leiters ist: $u = a =$ grosse Halbadise.

Da das Potential auf dieser Fläche konstant sein muss, darf hier φ nicht von v und α abhängen. Wir suchen deshalb eine spezielle Lösung der Laplace-Gleichung, die nur von u abhängt. Eine solche erfüllt nach (8.31) die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial u} \left((u^2 - c^2) \frac{\partial\varphi}{\partial u} \right) = 0.$$

Also ist

$$\varphi(u) = A \ln \frac{u+c}{u-c} + B. \quad (8.32)$$

Damit dieser Ausdruck in grossen Entfernungen in das Coulomb-Potential zur Ladung Q übergeht, muss $B=0$ und $A = Q/2c$ sein. (Nach (8.28) ist in grossen Entfernungen $u \approx r$ und dort wird der Logarithmus in (8.32) ungefähr gleich $2c/r$.)

Wir berechnen noch die Ladungsverteilung auf der Oberfläche

des Ellipsoids. Mit (8.30) finden wir:

$$4\pi q^x = - \text{grad}_n \varphi \Big|_{u=a} = - \frac{\partial \varphi}{\partial u} \Big|_{u=a} \cdot \sqrt{\frac{u^2 - c^2}{u^2 - v^2}} \Big|_{u=a}$$

$$= \frac{Q}{b \sqrt{a^2 - v^2}}; \quad b := \sqrt{a^2 - c^2} = \text{kleine Halbachse.} \quad (8.33)$$

Das Oberflächenelement $d\sigma$ des Ellipsoids ist nach (8.30)

$$d\sigma = \frac{b}{c} \sqrt{a^2 - v^2} dv d\alpha. \quad (8.34)$$

Daher wird tatsächlich

$$\int_{\text{ell.}} q^x d\sigma = \int_{-c}^{+c} dv \int_0^{2\pi} d\alpha \frac{Q}{4\pi b} \cdot \frac{b}{c} = Q$$

gleich der Gesamtladung des Ellipsoids.

* * *

8.3. Greensche Funktionen und Randwertaufgaben der Elektrostatik

Unter der Dirichletschen Randwertaufgabe versteht man folgendes. Gesucht ist zu einem beschränkten Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$ eine Funktion φ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $\varphi \in C^2(G)$ und $\Delta\varphi = 0$ (in G);
- (ii) $f \in C(\partial G)$ sei vorgegeben; φ ist in $C(\bar{G})$ und $\varphi|_{\partial G} = f$.

Wenn dieses Problem eine Lösung hat, dann ist sie eindeutig, wie man mit dem Maximumprinzip sofort sieht.

In § 4 A haben wir φ , mit Hilfe einer Grundlösung $\chi(x, x')$ (Fundam.l.), durch seine Randwerte wie folgt darstellen können:

$$\varphi(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial G} \left[\gamma(\underline{x}, \underline{x}') \frac{\partial \varphi(\underline{x}')}{\partial n_{x'}} - \varphi(\underline{x}') \frac{\partial \gamma(\underline{x}, \underline{x}')}{\partial n_{x'}} \right] d\sigma(\underline{x}'). \quad (8.35)$$

Wenn es gelänge, eine Fundlösung $\gamma(\underline{x}, \underline{x}')$ zu finden, welche für $\underline{x}' \in \partial G$ verschwindet, dann könnte man mit Hilfe von (8.35) das Dirichlet'sche Randwertproblem lösen. Eine Fundlösung mit dieser Eigenschaft nennt man eine Green'sche Funktion $G(\underline{x}, \underline{x}')$ des Dirichlet'schen Randwertproblems. $G(\underline{x}, \underline{x}')$ ist durch die drei folgenden Eigenschaften charakterisiert. Es sei \underline{x} ein fester Punkt in D . (Wir ersetzen G durch D .) Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & G(\underline{x}, \cdot) \in C^2(D \setminus \{\underline{x}\}), \quad G(\underline{x}, \cdot) \in C^1(\bar{D} \setminus \{\underline{x}\}); \\ \text{(ii)} \quad & G(\underline{x}, \cdot) - \frac{1}{|\underline{x} - \cdot|} \in C^2(D); \\ & \Delta_{x'} G(\underline{x}, \underline{x}') = 0 \quad \text{für } \underline{x}' \neq \underline{x}; \\ \text{(iii)} \quad & G(\underline{x}, \underline{x}') = 0 \quad \text{für } \underline{x}' \in \partial D. \end{aligned} \quad (8.36)$$

Daraus kann man die folgenden Eigenschaften von G ableiten:

$$G(\underline{x}, \underline{x}') = G(\underline{x}', \underline{x}) \quad , \quad \underline{x}, \underline{x}' \in D; \quad (8.37)$$

$$0 \leq G(\underline{x}, \underline{x}') \leq \frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|}. \quad (8.38)$$

Beweis: Für zwei beliebige $\underline{x}_1, \underline{x}_2$ aus D wähle man kleine Kugeln $K_1, K_2 \subset D$, $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ mit Mittelpunkten \underline{x}_i und wende die z. Green'sche Formel auf die beiden Funktionen $G(\underline{x}_1, \underline{x}')$ und $G(\underline{x}_2, \underline{x}')$ im Gebiet $D \setminus (K_1 \cup K_2)$ an. Dort sind diese Funktionen harmonisch und verschwinden nach (iii) auf ∂D . Lässt man die K_i auf die Punkte \underline{x}_i zusammenschrumpfen, so erhält man leicht (8.37) (Übung).

Die Funktion $G(\underline{x}-\underline{x}') = \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|}$ ist in D harmonisch mit den negativen Randwerten $-\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|}$. Aus dem Maximumprinzip folgt deshalb, dass sie in D negativ ist, was (8.38) beweist. \square

Falls in D eine Greensche Funktion $G(\underline{x}, \underline{x}')$ existiert, so folgt aus (8.35):

$$\varphi(\underline{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial n_{x'}} G(\underline{x}, \underline{x}') \varphi(\underline{x}') d\sigma(\underline{x}'). \quad (8.39)$$

Deshalb wird das Dirichlet'sche Randwertproblem durch

$$\varphi(\underline{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial n_{x'}} G(\underline{x}, \underline{x}') f(\underline{x}') d\sigma(\underline{x}'). \quad (8.40)$$

gelöst. Für Existenzbeweise Greenscher Funktionen verweise ich wieder auf die mathematische Literatur.

Beispiel: Die Greensche Funktion für die Kugel

Die Greensche Funktion $G(\underline{x}, \underline{x}')$ für eine Kugel K (Radius a) erhält man dadurch, in dem man neben einer Einheitsladung in $\underline{x}' \in K$ noch eine dazu gespiegelte Ladung der Grösse $-a/|\underline{x}'|$ in $\frac{a^2}{|\underline{x}'|} \frac{\underline{x}'}{|\underline{x}'|^2}$ (ausserhalb K) beladnet (siehe das Beispiel 8) auf S. 30). Das Potential dieser beiden Punktladungen

$$G(\underline{x}, \underline{x}') = \frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} - \frac{a}{|\underline{x}'||\underline{x}-\underline{x}_1|}, \quad \underline{x}_1 = \frac{a^2}{|\underline{x}'|^2} \underline{x}', \quad (8.41)$$

erfüllt alle Bedingungen für die Greensche Funktion. Nun ist auf ∂K :

$$\frac{\partial}{\partial n_{x'}} G(\underline{x}, \underline{x}') = \frac{\underline{x}'}{a} \nabla_{x'} G(\underline{x}, \underline{x}') = \frac{1}{a} \frac{\underline{x}^2 - a^2}{|\underline{x}-\underline{x}'|^3}.$$

Damit lautet die Lösung (8.40) im Falle der Kugel

$$\varphi(\underline{x}) = \frac{a^2 - \underline{x}^2}{4\pi a} \int_{|\underline{x}'|=a} \frac{f(\underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|^3} d\Omega(\underline{x}'). \quad (8.42)$$

Das ist das Poissonsche Integral (Poissonsche Integralformel). Daraus folgt auch wieder die Mittelwertformel für harmonische Funktionen.

§9. Das elektrische Feld in grosser Entfernung von den felderzeugenden Ladungen (Multipolentwicklung)

Für lokalisierte Ladungsverteilungen ist es für manche Zwecke wichtig, Reihenentwicklungen für φ und \underline{E} zu haben, welche für genügend grosse Abstände schnell konvergieren. (Beispielsweise ist die Ausdehnung eines Atomkerns viel kleiner als der mittlere Abstand eines Elektrons in der Atomhülle.)

Wir nehmen an, der Träger der Ladungsverteilung ρ sei innerhalb einer Kugel mit dem Radius a . Für $|\underline{x}| > a$ können wir in

$$\varphi(\underline{x}) = \int \frac{\rho(\underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|} d^3x' \quad (9.1)$$

den Kern $\frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|}$ wie folgt nach Kugelfunktionen entwickeln (s. MHP-Skript, Kap. IV):

$$\frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{1}{2^{l+1}} \frac{r'^l}{r^{l+1}} Y_{lm}^*(\hat{\underline{x}}') Y_{lm}(\hat{\underline{x}}). \quad (9.2)$$

Darin ist $r = |\underline{x}|$, $r' = |\underline{x}'|$, $\hat{\underline{x}} = \underline{x}/r$, $\hat{\underline{x}}' = \underline{x}'/r'$ und die $\{Y_{lm}\}$ sind die Kugelfunktionen. Diese bilden, wie im Anhang zu diesem Kapitel* gezeigt wird, ein orthonormiertes vollständiges System auf der Sphäre S^2 . Neben expliziten Formeln für Y_{lm} wird in diesem Anhang auch Gl. (9.2) hergeleitet (siehe (B.43)).

*) Verschieben in MHP-Skript.

Setzen wir (9.2) in (9.1) ein so erhalten wir für das Potential φ die folgende Multipolentwicklung außerhalb der Quelle:

$$\varphi(\underline{x}) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{1}{r^{l+1}} \frac{1}{r^{l+1}} q_{lm} Y_{lm}(\hat{x}), \quad (9.3)$$

wobei die q_{lm} die folgenden Multipolmomente sind:

$$q_{lm} = \int r'^l Y_{lm}(\hat{x}') \varrho(\underline{x}') d^3x'. \quad (9.4)$$

Für diese gilt nach (B.31)

$$q_{l-m} = (-1)^m q_{lm}^*. \quad (9.5)$$

Für $l=0, 1, 2$ lauten die Kugelfunktionen in Polarkoord.:

$$\begin{aligned} l=0 & \quad Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}; \\ l=1 & \quad \begin{cases} Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\phi}, \\ Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta; \end{cases} \\ l=2 & \quad \begin{cases} Y_{22} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2\theta e^{2i\phi}, \\ Y_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta \cos\theta e^{i\phi}, \\ Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2\theta - \frac{1}{2} \right). \end{cases} \end{aligned} \quad (9.6)$$

Deshalb ist $q_{00} = Q/\sqrt{4\pi}$ (Q = Gesamtladung) und

$$\begin{aligned} q_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_x + i p_y), \\ q_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_z, \end{aligned} \quad (9.7)$$

wobei
$$p = \int \underline{x} \varrho(\underline{x}) d^3x \quad (9.8)$$

das elektrische Dipolmoment ist. Für $l=2$ ist

$$\begin{aligned} q_{22} &= \frac{1}{12} \sqrt{\frac{15}{4\pi}} (Q_{11} - 2i Q_{12} - Q_{22}), \\ q_{21} &= -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{15}{8\pi}} (Q_{13} - i Q_{23}), \\ q_{20} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} Q_{33}, \end{aligned} \quad (9.9)$$

wobei Q_{ij} den spurlosen Quadrupol Tensor bezeichnet:

$$Q_{ij} = \int (3x_i x_j - \delta_{ij} r^2) \rho(\underline{x}) d^3x. \quad (9.10)$$

In rechtwinkligen Koordinaten beginnt deshalb die Multipolentwicklung (9.3) wie folgt

$$\varphi(\underline{x}) = \frac{Q}{|\underline{x}|} + \frac{\underline{p} \cdot \underline{x}}{|\underline{x}|^3} + \frac{1}{2} Q_{ij} \frac{x_i x_j}{|\underline{x}|^5} + \dots \quad (9.11)$$

was man mit einer Taylorentwicklung auch leicht direkt einsehen kann.

Das elektrische Feld zu (9.3) lautet (siehe Anhang A):

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \frac{4\pi(l+1)}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{l+2}}, \\ E_\theta &= -\frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{1}{r^{l+2}} \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{lm}(\theta, \phi), \\ E_\phi &= -\frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{1}{r^{l+2}} \frac{\partial}{\partial \phi} Y_{lm}(\theta, \phi) \end{aligned} \right\} \quad (9.12)$$

($Y_{lm} \propto e^{im\phi}$).

Für $l=1$ (mit \underline{p} längs der z -Richtung) erhält man

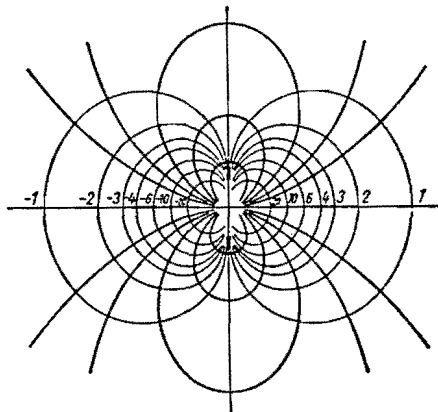
$$\underline{E}_r = \frac{2p \cos \theta}{r^3}, \quad E_\theta = \frac{p \sin \theta}{r^3}, \quad E_\phi = 0. \quad (9.13)$$

In Cartesianen Koordinaten ist

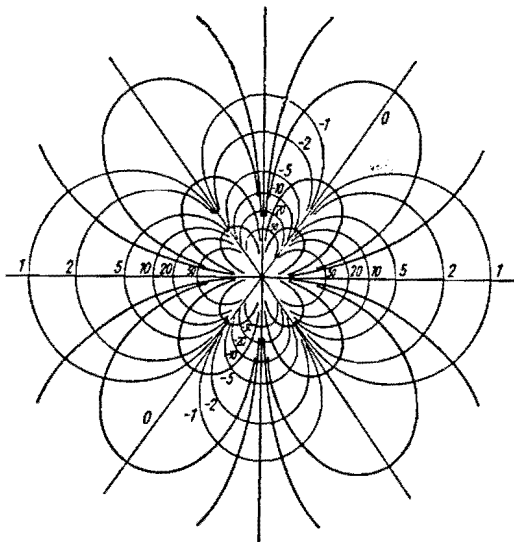
$$\Xi(x) = \frac{3\hat{x}(p\cdot\hat{x}) - p}{|x|^3}, \quad (9.14)$$

wie man aus (9.11) sieht.

Feldlinien und Äquipotentiallinien in einer Ebene durch die z-Achse sind für $l=1, 2$ und $m=0$ in den beiden folgenden Figuren dargestellt.



Feldlinien (stark ausgezogen) und Äquipotentiallinien (schwach ausgezogen) für einen horizontal liegenden Dipol



Feldlinien (stark ausgezogen) und Äquipotentiallinien (schwach ausgezogen) für einen horizontal liegenden gestreckten Quadrupol

§ 10. Elektrostatik von makroskopischen Medien. Dielektrika

Die elektrische Ladungsverteilung in einem makroskopischen Körper ist — mikroskopisch gesehen — sehr kompliziert. Dieser enthält $10^{23 \pm 5}$ Elektronen und Kerne, welche (auch bei $T=0$) in ständiger Bewegung begriffen sind. Vom makroskopischen Standpunkt ist die genaue mikroskopische Ladungs- und Feldverteilung uninteressant. Relevant sind lediglich Mittelwerte über makroskopisch kleine Volumina, welche aber immer noch viele Atome und Moleküle enthalten. Durch solche Mittelung wollen wir jetzt die makroskopische Elektrostatik aus der mikroskopischen Theorie herleiten. (Wir sehen dabei von der Bewegung der Elektronen und Kerne ab. Diese wird später in der zeitabhängigen Theorie berücksichtigt.)

Eigentlich müsste man für die mikroskopische Theorie eine quantenmechanische Formulierung verwenden. Wir führen die Diskussion aber im klassischen Rahmen durch. (In einer konsequenten quantenmechanischen Diskussion müsste man lediglich die klassischen Größen durch quantenmechanische Erwartungswerte ersetzen.)

Für Dimensionen, welche gross sind verglichen mit 10^{-12} cm gelten die mikroskopischen Gleichungen

$$\operatorname{rot} \underline{e} = 0, \quad \operatorname{div} \underline{e} = 4\pi \eta, \quad (10.1)$$

Hier ist \underline{e} das mikroskopische elektrische Feld und η ist die mikroskopische Ladungsverteilung, d.h.

$$\eta = \sum_k \rho^{(k)}, \quad (10.2)$$

wobei $\rho^{(k)}$ der Beitrag des k^{ten} "Atoms" (Ions, Moleküls, freien Elektrons) ist; $\rho^{(k)}$ ist nur in einer Umgebung atomarer Dimension von Null verschieden.

Den Mittelwert einer Funktion $F(\underline{x})$ definieren wir durch

$$\langle F \rangle(\underline{x}) = \int g(\underline{x} - \underline{x}') F(\underline{x}') d^3x' \quad (10.3)$$

(Faltung von F mit g), wobei g eine ^{positive} $\wedge C^\infty$ -Funktion mit kompaktem Träger ist, welcher makroskopisch kleine Ausmasse hat, aber immer noch viele "Atome" enthält ($L > 10^2 \text{ \AA}$). Ausserdem sei g normiert:

$$\int g(\underline{x}) d^3x = 1. \quad \begin{array}{c} \uparrow g \\ \text{---} \\ \downarrow \rho^{(k)} \end{array} x \quad (10.4)$$

Im übrigen wird es auf die Form von g nicht ankommen.

Mit einer partiellen Integration folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \langle F \rangle(\underline{x}) &= \int \frac{\partial}{\partial x_i} g(\underline{x} - \underline{x}') F(\underline{x}') d^3x' \\ &= - \int \frac{\partial}{\partial x_i'} g(\underline{x} - \underline{x}') F(\underline{x}') d^3x' = \int g(\underline{x} - \underline{x}') \frac{\partial}{\partial x_i'} F(\underline{x}') d^3x', \end{aligned}$$

d.h.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \langle F \rangle = \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\rangle. \quad (10.5)$$

Sehen wir also

$$\underline{E}(\underline{x}) = \langle \underline{e} \rangle(\underline{x}) : \begin{array}{l} \text{makroskopisches} \\ \text{elektrisches Feld,} \end{array} \quad (10.6)$$

so folgt aus (10.1)

$$\text{rot } \underline{E} = 0, \quad \text{div } \underline{E} = 4\pi \langle \eta \rangle. \quad (10.7)$$

Nun untersuchen wir die wittlere Ladungsverteilung $\langle \eta \rangle$.

Aus (10.2) folgt

$$\langle \eta \rangle = \sum_{\underline{k}} \langle \rho^{(\underline{k})} \rangle. \quad (10.8)$$

Bei der Berechnung von $\langle \rho^{(\underline{k})} \rangle$ benutzen wir, dass $\rho^{(\underline{k})}$

und in einem kleinen Gebiet von atomarer Dimension um den "Mittelpunkt" (Schwerpunkt) \underline{x}_k des "Atoms" nicht verschwindet.

Wir setzen in

$$\langle \rho^{(k)} \rangle(\underline{x}) = \int g(\underline{x}-\underline{x}') \rho^{(k)}(\underline{x}') d^3x'$$

$\underline{x}' - \underline{x}_k = \underline{\xi}$ und entwickeln nach Taylor

$$\begin{aligned} \langle \rho^{(k)} \rangle(\underline{x}) &= \int g(\underline{x}-\underline{x}_k-\underline{\xi}) \rho^{(k)}(\underline{x}_k+\underline{\xi}) d^3\xi \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n g(\underline{x}-\underline{x}_k)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}} \int \xi_{i_1} \dots \xi_{i_n} \rho^{(k)}(\underline{x}_k+\underline{\xi}) d^3\xi. \end{aligned} \quad (10.9)$$

Da g und seine Ableitungen über atomare Abstände wenig variieren sollen, genügt es in (10.9) die Terme mit $n=0,1$ mitzunehmen. (Man nehme, als Übung, in folgenden auch die Quadrupolterme mit.) Dies gibt

$$\langle \rho^{(k)} \rangle(\underline{x}) = e^{(k)} g(\underline{x}-\underline{x}_k) - \underline{p}^{(k)} \cdot \nabla g(\underline{x}-\underline{x}_k) + \dots, \quad (10.10)$$

wobei

$$e^{(k)} = \int \rho^{(k)}(\underline{x}_k+\underline{\xi}) d^3\xi = \text{Ladung des } k^{\text{ten}} \text{ "Atoms"}$$

$$\underline{p}^{(k)} = \int \underline{\xi} \rho^{(k)}(\underline{x}_k+\underline{\xi}) d^3\xi = \text{Dipolmoment des } k^{\text{ten}} \text{ Atoms, relativ zur Position } \underline{x}^{(k)}.$$

Also ist

$$\langle \eta \rangle = \rho_e - \nabla \cdot \underline{P} + \dots, \quad (10.11)$$

wobei

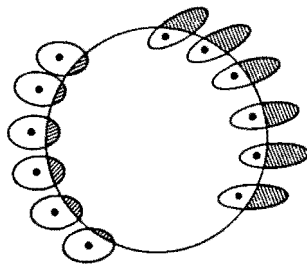
$$\rho_e = \sum_k g(\underline{x}-\underline{x}_k) e^{(k)}, \quad (10.12)$$

$$\underline{P} = \sum_k g(\underline{x}-\underline{x}_k) \underline{p}^{(k)}. \quad (10.13)$$

Jetzt darf man sich wieder kurze Wände vorstellen.

Die "Leitungsladungsdichte" ρ_L ist offensichtlich der Mittelwert eines Systems von Punktladungen $e^{(k)}$ in den Positionen x_k . Ebenso ist die elektrische Dipoldichte (oder Elektrisierung) P der Mittelwert eines Systems von Punktdipolen $p^{(k)}$ in den Positionen x_k . (Wie lautet der Zusatz in (10.11), der von den Quadrupoltermen herrührt?)

Die Interpretation von (10.11) ist die folgende. Betrachten wir ein kleines Volumen im Medium. Darin wird ein Teil der Ladung von den Nettoladungen der "Atome" (Ionen, Elektronen) herrühren. Diese ist durch den ersten Term in (10.11) (mit (10.12)) gegeben. Der zweite Term rührt von der Polarisation der Ladungswolken der Atome und Moleküle her. Falls die Atome permanente Dipolmomente haben, sind diese ohne Feld willkürlich ausgerichtet und mitteln sich zu Null. Ein elektrisches Feld führt zu einer Ausrichtung der Dipolmomente. Aber auch ohne permanente Dipolmomente werden die Atome und Moleküle in einem Feld polarisiert und erhalten ein mittleres Dipolmoment, welches in 1. Näherung (für nicht zu starke Felder) proportional zum angelegten Feld ist. Damit können Moleküle, deren Ladung ursprünglich ganz im betrachteten Volumen lag, jetzt einen Teil aussenhalb des Volumens haben (s. Fig.).



Natürlich ergibt sich damit nur eine Nettoladung im betrachteten Volumen, wenn die Polarisation inhomogen ist. Entsprechend tritt in (10.11) die Divergenz von P auf, was auch zeigt, dass die gesamte Polarisationsladung des

Körpers verschwindet.

Aus (10.7) und (10.11) erhalten wir für die inhomogene Feldgleichung des makroskopischen Feldes \underline{E}

$$\operatorname{div} \underline{E} = 4\pi(\rho_e - \operatorname{div} \underline{P}). \quad (10.14)$$

Diese Gleichung legt es nahe das folgende Hilfsfeld

$$\underline{D} := \underline{E} + 4\pi \underline{P}, \quad (10.15)$$

die sog. elektrische Verschiebung, einzuführen. Damit lauten die Feldgleichungen der makroskopischen Elektrostatik

$$\operatorname{rot} \underline{E} = 0, \quad \operatorname{div} \underline{D} = 4\pi \rho_e. \quad (10.16)$$

Gegenüber der mikroskopischen Theorie haben wir in \underline{D} (oder \underline{P}) ein weiteres Vektorfeld und deshalb benötigen wir noch eine Beziehung zwischen \underline{D} und \underline{E} (oder zwischen \underline{P} und \underline{E}). Eine solche kann nur eine mikroskopische Theorie (Quantenmechanik der Atomhülle plus statistische Mechanik) liefern. Wir müssen uns hier mit phänomenologischen Gesetzen begnügen.

Bei normalen Temperaturen und elektrischen Feldern besteht in guter Näherung häufig eine lineare Beziehung zwischen \underline{P} und \underline{E} . Wir beschränken uns im folgenden auf den isotropen Fall:

$$\underline{P} = \chi_e \underline{E}. \quad (10.17)$$

Die Materialgröße χ_e ist die elektrische Suszeptibilität; sie muss aus dem Experiment entnommen werden.

Dann ist

$$\underline{D} = \epsilon \underline{E}, \quad (10.18)$$

mit

$$\epsilon = 1 + 4\pi \chi_e; \quad (10.19)$$

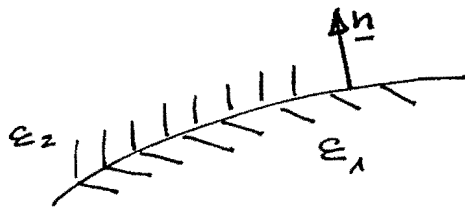
ϵ ist die Dielektrizitätskonstante (DK).

Im homogenen Fall (ϵ ortsunabhängig) ist damit

$$\operatorname{div} \underline{E} = 4\pi \frac{\rho_e}{\epsilon}. \quad (10.20)$$

Dies zeigt, dass bei gegebener Dichte ρ_e , das elektrische Feld gegenüber der mikroskopischen Theorie um ϵ reduziert wird (Abschwächung).

Für die Randbedingungen an Unstetigkeitsflächen (s. Fig.) bekommt man wie in § 5:

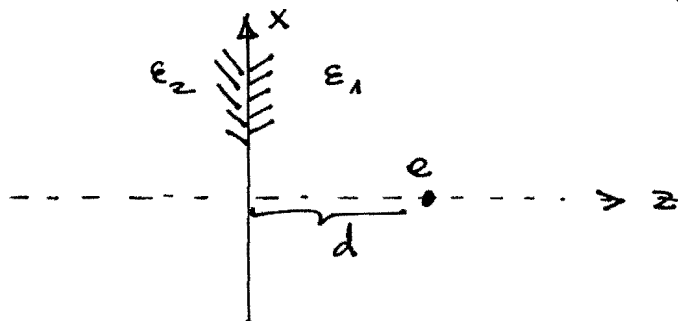


$$\begin{cases} (\underline{D}_2 - \underline{D}_1) \cdot \underline{n} = 4\pi \rho_e^* \\ \underline{E}_{\text{tang.}} \text{ stetig.} \end{cases} \quad (10.21)$$

§ 11. Randwertprobleme für Dielektrika

a) Punktladung in einem dielektrischen Halbraum

Gegeben seien zwei ^{dielektrische} Halbräume mit DK ϵ_1 und ϵ_2 . Im Halbraum 1 ($z > 0$) befinde sich eine Punktladung e (s. Fig.).



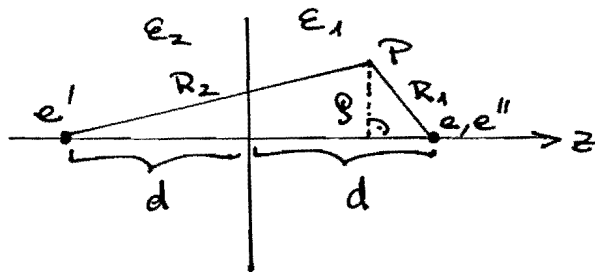
Die Feldgleichungen lauten

$$\operatorname{rot} \underline{E} = 0 \quad \text{außer bei } e, \quad \operatorname{div} \underline{E} = 0 \quad \text{außer bei } e.$$

Aus der ersten Gleichung folgt $\underline{E} = -\text{grad } \varphi$. Wegen (10.20) "wirkt" e nur wie e/e_1 . Die Randbedingungen lauten ($\rho_e = \rho_e^* = 0$):

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ e_1 E_z \end{pmatrix} = \lim_{z \rightarrow 0^-} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ e_2 E_z \end{pmatrix}. \quad (11.1)$$

Im gespiegelten Punkt ($z = e$) legen wir wieder eine virtuelle Ladung e' hin (s. Fig.).



Wir setzen (e'' : virtuelle Ladung bei e):

$$\varphi = \begin{cases} \frac{1}{e_1} \left(\frac{e}{R_1} + \frac{e'}{R_2} \right), & z > 0, \\ \frac{1}{e_2} \frac{e''}{R_1}, & z < 0. \end{cases} \quad (11.2)$$

Da

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R_1} \right) \Big|_{z=0} = - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R_2} \right) \Big|_{z=0} = \frac{d}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{R_1} \right) \Big|_{z=0} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{R_2} \right) \Big|_{z=0} = - \frac{\rho}{(\rho^2 + d^2)^{3/2}}$$

führen die Randbedingungen (11.1) auf

$$e - e' = e'' \quad , \quad \frac{1}{e_1} (e + e') = \frac{1}{e_2} e'' \quad ,$$

mit der Lösung

$$e' = - \frac{(e_2 - e_1)}{e_2 + e_1} e \quad , \quad e'' = \frac{2e_2}{e_1 + e_2} e. \quad (11.3)$$

Die Feldgleichungen sind ebenfalls erfüllt.

Die Polarisationsladungsdichte ist nach (10.11) gleich $-\nabla \cdot \underline{P}$. Innerhalb der beiden Halbräume ist $\underline{P} = \chi_e \underline{E}$, $\chi_e = \text{const.}$, also ist $\nabla \cdot \underline{P} = 0$, ausser an der Stelle der Punktladung e . An der Unstetigkeitsfläche macht aber χ_e einen Sprung $\Delta \chi_e = (\epsilon_1 - \epsilon_2) / 4\pi$. Deshalb gibt es dort eine Polarisations-Oberflächenladungsdichte ρ_{Pol}^* . Diese ist (man mache sich das durch einen Grenzübergang mit stetigem \underline{P} , welches stark an der Oberfläche konzentriert ist, klar):

$$\left[\rho_{\text{Pol}}^* = -\underline{n} \cdot (\underline{P}_1 - \underline{P}_2) \right. \quad \left. \begin{array}{c} \textcircled{2} \quad | \quad \textcircled{1} \\ \hline \end{array} \right. \quad (11.4)$$

Da $\underline{P}_i = \frac{\epsilon_i - 1}{4\pi} \underline{E} = -\left(\frac{\epsilon_i - 1}{4\pi}\right) \nabla \varphi$, $i=1,2$, findet man leicht

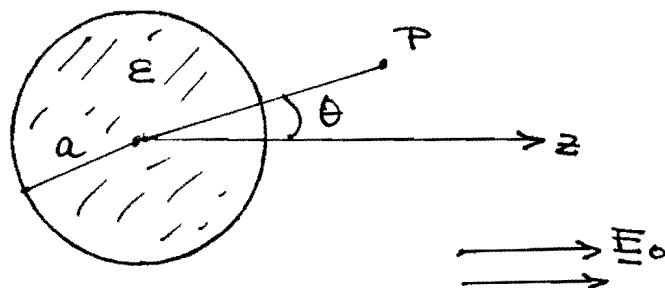
$$\rho_{\text{Pol}}^* = -\frac{e}{2\pi} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{d}{(d^2 + \rho^2)^{3/2}} \quad (11.5)$$

b) Dielektrische Kugel in einem homogenen elektrischen Feld

Sei anfänglich ein homogenes Feld \underline{E}_0 in der z -Richtung vorgegeben. In dieses Feld setzen wir eine dielektrische Kugel K mit $\text{DK} \epsilon$. Es sei überall $\rho_l = 0$, also gilt überall $\underline{E} = -\nabla \varphi$, $\Delta \varphi = 0$. Mit den Bezeichnungen in der nachstehenden Fig. machen wir folgenden Ansatz (das Problem hat azimutale Symmetrie):

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} \varphi_i(\underline{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta), & \underline{x} \in K; \\ \varphi_a(\underline{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} (B_l r^l + C_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta), & \underline{x} \notin K \end{cases} \quad (11.6)$$

(siehe KMP).



Im "Unendlichen" ist $\varphi \approx -E_0 z = -E_0 r \cos \theta$. Da $P_0 = 1, P_1(x) = x, \dots$, ist von den B_l nur $B_1 \neq 0$ und zwar $B_1 = -E_0$. Die anderen Koeffizienten bestimmt man aus den Randbedingungen an der Kugeloberfläche:

(i) stetiges tangentes $\underline{E}_{\text{tang}}$: $-\frac{1}{a} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \theta} \Big|_{r=a} = -\frac{1}{a} \frac{\partial \varphi_a}{\partial \theta} \Big|_{r=a}$;

(ii) stetiges normales \underline{D}_n ($\rho_{el}^* = 0$): $-\epsilon \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} \Big|_{r=a} = -\frac{\partial \varphi_a}{\partial r} \Big|_{r=a}$.

Aus (i) folgt

$$A_1 = -E_0 + C_1/a^3, \quad A_l = C_l/a^{2l+1} \quad \text{für } l \neq 1,$$

und aus (ii) ergibt sich

$$\epsilon A_1 = -E_0 - 2C_1/a^3, \quad \epsilon l A_l = -(l+1)C_l/a^{2l+1}, \quad l \neq 1,$$

Diese Gleichungen implizieren $A_l = C_l = 0$ für $l \neq 1$ und

$$A_1 = -\left(\frac{3}{2+\epsilon}\right)E_0, \quad C_1 = \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} a^3 E_0.$$

Das Potential ist deshalb nach (11.6)

$$\varphi = \begin{cases} -\frac{3}{\epsilon+2} E_0 r \cos \theta, & \underline{x} \in K; \\ -E_0 r \cos \theta + \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} E_0 \frac{a^3}{r^2} \cos \theta, & \underline{x} \notin K. \end{cases} \quad (11.7)$$

Im Inneren der Kugel herrscht deshalb ein homogenes Feld \underline{E}_i in der z -Richtung der Grösse

$$\underline{E}_i = \frac{3}{\epsilon+2} \underline{E}_0 < \underline{E}_0. \quad (11.8)$$

Ausserhalb der Kugel ist das Feld gleich dem angelegten Feld \underline{E}_0 plus einem Dipolfeld (siehe §9) mit dem Dipolmoment

$$p = \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} a^3 E_0, \quad (11.9)$$

welches in die z -Richtung zeigt. Der elektrische Polarisations-

vektor \underline{P} ist

$$\underline{P} = \frac{\epsilon-1}{4\pi} \underline{E} = \frac{3}{4\pi} \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} \underline{E}_0, \quad (11.10)$$

d.h.

$$\underline{P} = \int_K \underline{P} d^3x. \quad (11.11)$$

Die Oberflächendichte der Polarisationsladung ρ_{Pol}^* ist, wie oben,

$$\rho_{Pol}^* = \underline{P} \cdot \hat{x} = \frac{3}{4\pi} \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} E_0 \cos\theta. \quad (11.12)$$

Ausdrückliche Interpretation: Die Pol. Ladungsdichte ρ_{Pol}^* erzeugt ein inneres Feld, welches entgegengesetzt zum angelegten Feld gerichtet ist und das ursprüngliche Feld E_0 auf $\frac{3}{\epsilon+2} E_0$ abschwächt. Für weitere Beispiele s. die Übungen.

§ 12. Elektrostatische Energie in Anwesenheit von Dielektrika

In der "mikroskopischen" Elektrostatik war die Energie eines Systems von Ladungen mit Ladungsdichte ρ und elektrostatischem Potential φ gleich

$$W = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV. \quad (12.1)$$

Dieser Ausdruck ist gleich der Arbeit die benötigt wird, um die Ladungen aus dem Unendlichen in die vorgegebene Konfiguration zu bringen. Da für dielektrische Medien auch der Polarisationszustand verändert wird, kann (12.1) nicht ohne Weiteres für die makroskopische Theorie übernommen werden.

Die folgende Diskussion gilt zunächst allgemein, ohne eine Beziehung zwischen \underline{D} und \underline{E} vorauszusetzen.

Wir betrachten die Arbeit δW , die nötig ist, um eine infinitesimale Änderung $\delta \rho$ der Leitungsladungsverteilung zu bewirken. Diese ist (wenn die dielektrischen Eigenschaften nicht geändert werden):

$$\delta W = \int \delta \rho_e(\underline{x}) \varphi(\underline{x}) d^3x.$$

Darin ist φ das bereits vorhandene Potential: $\underline{E} = -\nabla \varphi$.
 Aus $\nabla \cdot \underline{D} = 4\pi \rho_e$ folgt $\delta \rho_e = \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot (\delta \underline{D})$. Nach einer
 partiellen Integration erhalten wir deshalb

$$\boxed{\delta W = \frac{1}{4\pi} \int \underline{E} \cdot \delta \underline{D} d^3x.} \quad (12.2)$$

Diese Grösse ist im allgemeinen kein exaktes Differential
 (d.h. nicht gleich der Änderung eines Funktionals W
 der Felder), analog zur Arbeit oder Wärme in der
 Thermodynamik. Die gesamte am System geleistete Ar-
 beit wird deshalb im allgemeinen vom Prozess abhängen

Falls aber zwischen \underline{E} und \underline{D} ein lineares Zusammen-
 hang besteht ist $\underline{E} \cdot \delta \underline{D} = \frac{1}{2} \delta(\underline{E} \cdot \underline{D})$, und dann ist
 (12.2) ein exaktes Differential, nämlich die Variation
 der Zustandsgrösse

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \underline{E} \cdot \underline{D} dV. \quad (12.3)$$

In diesem Fall ist es unbedenklich, die Energiedichte

$$w = \frac{1}{8\pi} \underline{E} \cdot \underline{D} \quad (12.4)$$

einzuführen.

Das Ergebnis (12.3) können wir mit $\underline{E} = -\nabla \varphi$ und
 $\nabla \cdot \underline{D} = 4\pi \rho_e$ in die Form (12.1) (mit $\rho \rightarrow \rho_e$) bringen.
 Dieser Ausdruck ist also nur für eine lineare Beziehung
 zwischen \underline{E} und \underline{D} in der makroskopischen Theorie gültig.

Hinweis: Im Buch von Jackson, §4.7, wird die Energie-
 änderung δW für verschiedene äussere Bedingungen be-
 rechnet. Daraus ergeben sich die zugehörigen Kräfte, welche
 auf einen dielektrischen Körper wirken. (Siehe auch Beispiel, Kap. 3).
 NS: Thermodyn.

§ 13. Molekulare Polarisierbarkeit und elektrische Suszeptibilität (Formel von Clausius-Mossotti)

In diesem Abschnitt leiten wir eine (approximative) Beziehung zwischen der DK ϵ und der atomaren (molekularen) Polarisierbarkeit α her. Letztere ist definiert durch

$$\underline{p} = \alpha \underline{E}'. \quad (13.1)$$

In dieser Gleichung ist \underline{p} das Dipolmoment eines Atoms (Moleküls) und \underline{E}' ist das lokale auf das Atom wirkende elektrische Feld. \underline{E}' ist nicht mit \underline{E} gleichzusetzen, denn \underline{E} ist ein mittleres Feld (siehe § 10). Wir zeigen unten, dass häufig in guter Näherung die folgende Beziehung zwischen \underline{E}' und \underline{E} besteht:

$$\underline{E}' = \underline{E} + \frac{4\pi}{3} \underline{P}. \quad (13.2)$$

Nun ist nach (13.1) $\underline{P} = \alpha N \underline{E}'$ (N : Dichte der Moleküle). Setzen wir darin (13.2) ein, so ergibt sich

$$\underline{P} = \frac{\alpha N}{1 - \frac{4\pi}{3} \alpha N} \underline{E}, \quad \text{d.h.} \quad \chi_e = \frac{\alpha N}{1 - \frac{4\pi}{3} \alpha N}, \quad (13.3)$$

oder

$$\epsilon = \frac{1 + \frac{8\pi}{3} \alpha N}{1 - \frac{4\pi}{3} \alpha N} \Rightarrow \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} \alpha N. \quad (13.4)$$

Durch diese Beziehung von Clausius-Mossotti wird die Abhängigkeit von ϵ von der Teilchendichte N erstaunlich gut beschrieben. Für $\epsilon \approx 1$ (etwa für Gase) verschwindet der Unterschied zwischen \underline{E}' und \underline{E} und aus (13.4) wird

$$\epsilon - 1 \approx 4\pi N \alpha. \quad (13.5)$$

Für α ist grundsätzlich die Quantenmechanik zuständig; wir kommen bei der Behandlung der Dispersion darauf zurück.

Begründung von Gl. (13.2):

Wir betrachten ein Dielektrikum in einem statischen äusseren Feld \underline{E}_0 . Für das makroskopische Feld \underline{E} gilt nach (10.14) für $\rho_e = 0$:

$$\nabla \cdot \underline{E} = 4\pi \rho_{Pol} \quad , \quad \rho_{Pol} = -\nabla \cdot \underline{P} \quad (13.6)$$

Deshalb ist $\underline{E} = -\nabla \varphi$, mit

$$\varphi = \varphi_0 - \int \frac{\nabla \cdot \underline{P}(\underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|} d^3x' \quad (13.7)$$

wobei φ_0 das Potential zum äusseren Feld \underline{E}_0 ist. Das lokale Feld \underline{E}' an der Stelle eines Dipols ist andererseits gleich \underline{E}_0 plus der Summe der Dipolfelder aller Dipole, ausgenommen des Dipols an der betrachteten Stelle. Diese Summe approximieren wir in folgender Weise. Wir denken uns um die betrachtete Stelle eine Kugel K , welche makroskopisch klein ist, aber immer noch viele Atome enthält. Die Dipole ausserhalb der Kugel sind dann weit weg (verglichen mit ihren Abständen von nächsten Nachbarn) und ihr Beitrag zum lokalen Feld in der Mitte der fiktiven Kugel — wir nennen ihn \underline{E}_1 — kann in Kontinuumslimes berechnet werden. Deshalb ist (beachte auch (11.4)):

$$\underline{E}_1 = -\nabla \varphi_1, \quad \varphi_1 = - \int_{\mathbb{R}^3 \setminus K} \frac{\nabla \cdot \underline{P}(\underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|} d^3x' - \int_{\partial K} \frac{\underline{P} \cdot \underline{n}}{|\underline{x} - \underline{x}'|} d\sigma(\underline{x}')$$

(\underline{n} zeigt aus K heraus).

Vergleichen wir φ_1 mit (13.7), so ergibt sich

$$\varphi_1 = \varphi - \varphi_0 + \int_K \frac{\nabla \cdot \underline{P}(\underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|} d^3x' - \int_{\partial K} \frac{\underline{P} \cdot \underline{n}}{|\underline{x} - \underline{x}'|} d\sigma(\underline{x}')$$

Innerhalb K können wir \underline{P} als konstant ansehen. Deshalb fällt das Volumenintegral rechts weg und wir erhalten

$$\underline{E}_1 = \underline{E} - \underline{E}_0 - \left(\text{Feld der Oberflächenladungsdichte } \underline{P} \cdot \underline{n} \text{ auf } \partial K \right). \quad (13.8)$$

Das Feld in der Klammer ist gleich $(\underline{P} \equiv \underline{P} \hat{\underline{P}})$

$$\hat{\underline{P}} \int_{\partial K} d\Omega r^2 \cdot \frac{(\underline{P} \cos \theta) (-\cos \theta)}{r^2} = -\frac{4\pi}{3} \underline{P}. \quad (13.9)$$

Also

$$\underline{E}_1 = \underline{E} - \underline{E}_0 + \frac{4\pi}{3} \underline{P}. \quad (13.10)$$

Schliesslich betrachten wir noch den Beitrag \underline{E}_2 der Dipole innerhalb der Kugel K . Als Beispiel nehmen wir an, innerhalb K befände sich ein Gitter von Dipolen mit kubischer Symmetrie. Die Gitterkonstante sei a . Die Position eines Dipols dieses Gitters ist bezüglich den Gitterachsen durch drei ganze Zahlen (i, j, k) charakterisiert. Wir bezeichnen den Ortsvektor mit $\underline{x}_{ijk} = (ia, ja, ka)$. Nun ist (siehe (9.14)):

$$\underline{E}_2 = \sum_{ijk} \frac{3(\underline{P} \cdot \underline{x}_{ijk}) \underline{x}_{ijk} - |\underline{x}_{ijk}|^2 \underline{P}}{|\underline{x}_{ijk}|^5}.$$

Die x -Komponente kann wie folgt geschrieben werden

$$E_{2x} = \sum_{ijk} \frac{3(i^2 p_x + ij p_y + ik p_z) - (i^2 + j^2 + k^2) p_x}{a^3 (i^2 + j^2 + k^2)^{5/2}}.$$

Aus Symmetriegründen verschwinden die Kreuzterme, während die Diagonalterme alle gleich gross sind. Deshalb ist $E_{2x} = 0$ und analog $\underline{E}_2 = 0$. Dieses Argument hängt von der kubischen Symmetrie ab. Offensichtlich verschwindet \underline{E}_2 auch für eine vollständig ungeordnete Verteilung. Allgemein wird \underline{E}_2 sehr klein sein.

Das lokale Feld ist damit und (13.10)

$$\underline{E}' = \underline{E}_0 + \underline{E}_1 + \underline{E}_2 \simeq \underline{E}_0 + (\underline{E} - \underline{E}_0 + \frac{4\pi}{3} \underline{P}),$$

womit (13.2) begründet ist.

Oberer Grenze für die Polarisierbarkeit

Die Polarisierbarkeit wird offensichtlich maximal, wenn wir die Dipole durch ideal leitende Kugeln ersetzen. Für eine leitende Kugel vom Radius a in einem homogenen elektrischen Feld ist (siehe Bsp. b) auf S. 34) das Dipolmoment $p = a^3 E = \frac{3}{4\pi} V E$ ($V =$ Volumen der Kugel). Die Polarisierbarkeit ist also $\alpha = \frac{3}{4\pi} V$. Da $0 < NV < 1$ ist folgt

$$0 < \frac{4\pi}{3} N \alpha < 1. \quad (13.11)$$

Dies entspricht nach (13.4): $1 < \epsilon < \infty$.

* * *