Kapitel II. Die Maxwell'schen Feldgleichungen

"Höchste Aufgabe der Physiker ist das Aufsuchen jener allgemeinsten elementaren Gesetze, aus denen durch reine Deduktion das Weltbild zu gewinnen ist. Zu diesen elementaren Gesetzen führt kein logischer Weg, sondern nur die auf Einfühlung in die Erfahrung sich stützende Intuition....."

(A. Einstein, aus der Rede zum 60. Geburtstag von Max Planck)

Maxwell erkannte, dass die bildhaften Vorstellungen Faradays einer strengen mathematischen Theorie zur Grundlage dienen können. Diese Einsicht hat er in seiner berühmten Arbeit "On Faraday's Lines of Force" von 1855 – er war damals 24 Jahre alt – ausführlich dargestellt. Darin bietet er eine einheitliche, übersichtliche Darstellung aller damals bekannten elektromagnetischen Gesetze, die frei ist von künstlichen Zusatzhypothesen, wie sie in den Fernwirkungstheorien (etwa von W. Weber) vorkamen. Er erkannte aber auch eine wesentliche Beschränkung seiner Theorie: sie gilt nur, wenn alle elektrischen Ströme geschlossene Stromkreise bilden. In seiner Arbeit "On Physical Lines of Force" von 1861 konnte er sich von dieser Einschränkung befreien. In ihr ist im wesentlichen die Maxwell'sche Theorie zum ersten Male vollständig und richtig dargestellt. Maxwell gelangte aber auf eine merkwürdige Art zu seinen Gleichungen. Er legte nämlich seinen Überlegungen ein kompliziertes Aether-Modell zugrunde. Dieses führte ihn zur Vorstellung, dass überall, wo elektrische Kräfte im Aether wirken, elektrische Ladungen "verschoben" werden. Ändern sich die Kräfte, so ändert sich die "Verschiebung", und diese Änderung entspricht einem Strom, dem

Verschiebungsstrom, der überall zum gewöhnlichen Leitungsstrom hinzuaddiert werden muss.

Diese uns heute fremd gewordenen Vorstellungen, waren für Maxwell offenbar eine notwendige Stütze seiner physikalischen Phantasie. Bei der Auffindung von elementaren Naturgesetzen ist immer eine geheimnisvolle Kunst im Spiel, die man nicht erlernen kann.

In der Arbeit "A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field" hat Maxwell seine Theorie nochmals dargestellt, diesmal befreit von allen Hypothesen über den Äther. Er glaubt allerdings immer noch, dass ein irgendwie beschaffener Aether der Träger des Feldes sei, während man seit Einstein den Raum selber als diesen Träger betrachtet.

Wie bereits in der Einleitung angekündigt, werden wir in dieser Vorlesung einen unhistorischen Zugang zu den Maxwell-Gleichungen verfolgen. Dabei setze ich die Kenntnis der Grundlagen der Speziellen Relativitätstheorie (SRT) voraus*).

---

*) Siehe, z.B., die ersten 80 Seiten meines Skripts über SRT, insbesondere die Abschnitte II.4, II.5 und II.8. Vielleicht bevorzugen Sie stattdessen die Darstellung in den Kapiteln 6, 7 des Buches:

H.C. Ohanian, Classical Electrodynamics, Allyn & Bacon, Inc. (1988).

Alles Wesentliche ist aber bereits in anderen Vorlesungen (Mechanik, MMP, etc.) vorgekommen.

II.1 Grundgesetze des elektromagnetischen Feldes

"Immer wieder machen wir in der Physik die Erfahrung, dass, wenn wir erst einmal dazu gelangt sind, die Gesetzmässigkeit eines bestimmten Erscheinungsgebietes völlig zu durchdringen, sie sich in Formeln von vollendeter mathematischer Harmonie ausspricht."

(H. Weyl, in Raum. Zeit. Materie, p. 59)

Es stellt sich nun die Aufgabe, eine Lorentz-invariante Erweiterung der Elektrostatik zu finden. Wir werden sehen, dass dies auf "fast" eindeutige Weise gelingt, wenn der grundlegende Erhaltungssatz der elektrischen Ladung durch die Theorie garantiert wird.

A. Erhaltung der elektrischen Ladung

Wir wollen diesen vielleicht wichtigsten und allgemeinsten Erhaltungssatz der Physik in differentieller Weise formulieren.

Für zeitabhängige Vorgänge gibt es neben der Ladungsdichte $\rho(\underline{x},t)$ auch eine elektrische Stromdichte $\underline{J}(\underline{x},t)$ mit folgender Bedeutung: Sei S ein glattes orientiertes 2-dimensionales Flächenstück, dann ist der elektrische Strom $J(S)$ durch S (d.h. die durchfliessende Ladung pro Zeiteinheit) gegeben durch

$$J(S) = \int_S \underline{J} \cdot d\underline{S} . \qquad (1.1)$$

Bezeichnet ferner $\mathcal{D}$ ein glatt berandetes 3-dim. Gebiet mit orientiertem Rand $\partial\mathcal{D}$, so ist die elektrische Ladung in diesem Gebiet

$$Q(\mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}} \rho \, dV . \qquad (1.2)$$

Der Erhaltungssatz der elektrischen Ladung besagt nun

$$\frac{d}{dt} Q(\mathcal{D}) + J(\partial\mathcal{D}) = 0 . \qquad (1.3)$$

Mit dem Satz von Gauss bedeutet dies

$$\int_{\mathcal{D}} (\partial_t \rho + \operatorname{div} \underline{J}) \, dV = 0 ,$$

für alle $\mathcal{D}$. Daraus ergibt sich das gesuchte differentielle Gesetz

$$\boxed{\partial_t \rho + \operatorname{div} \underline{J} = 0 .} \qquad (1.4)$$

Diese Kontinuitätsgleichung schreiben wir jetzt in lorentzinvarianter Form. Es sei j^μ das folgende 4-komponentige Objekt

$$(j^\mu) = (c\rho, \underline{J}) \qquad (\mu = 0,1,2,3) , \qquad (1.5)$$

dann kann mit $x^\mu = (ct, \underline{x})$ die Gl. (1.4) auch so geschrieben werden

$$\partial_\mu j^\mu = 0 . \qquad (1.6)$$

Diese Gleichung muss in allen Lorentzsystemen erfüllt sein. Nun ist die linke Seite lorentzinvariant, wenn sich j^μ wie ein Vektorfeld transformiert, was wir annehmen wollen.

B. Der elektromagnetische Feldtensor, Feldgleichungen

Im elektrostatischen Fall ist ρ zeitunabhängig und $\underline{J}$ verschwindet. Die Feldgleichungen lauten dann nach Kap. I

$$\mathrm{rot}\, \underline{E} = 0 \quad , \quad \mathrm{div}\, \underline{E} = 4\pi\rho . \qquad (1.7)$$

Diese Gleichungen müssen wir nun im Sinne der SRT verallgemeinern. Als Quelle des elektromagnetischen Feldes wird jetzt nicht bloss ρ, sondern die volle Viererstromdichte j^μ fungieren. An Stelle der inhomogenen Gleichung in (1.7) drängt sich eine Gleichung vom Typ

$$(\partial \cdot F)^\mu = - \frac{4\pi}{c} j^\mu$$

auf*). Dabei steht $\partial \cdot F$ für die Divergenz eines noch näher zu spezifizierenden Tensorfeldes F. Zunächst muss natürlich F ein Tensorfeld 2. Stufe sein und wir werden also zwingend zur folgenden Form der inhomogenen Feldgleichung geführt

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = - \frac{4\pi}{c} j^\mu . \qquad (1.8)$$

---

*) Der Faktor $-\frac{4\pi}{c}$ ist hier eine belanglose Normierung, die von verschiedenen Konventionen und der Wahl der Einheiten abhängt.

Diese Gleichung zieht automatisch die Stromerhaltung nach sich, wenn $\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu}$ identisch verschwindet und darum sehen wir uns zur Annahme gedrängt, dass $F^{\mu\nu}$ ein antisymmetrisches Tensorfeld ist. Damit haben wir den Feldtyp festgelegt. ($F^{\mu\nu}$ transformiert sich bezüglich der homogenen Lorentzgruppe irreduzibel.)

Ein antisymmetrisches Tensorfeld über dem Minkowski-Raum hat 6 unabhängige Komponenten. Mathematisch können wir $F^{\mu\nu}$ so darstellen

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (1.9)$$

Die Komponente $\mu = 0$ in (1.8) gibt

$$-\partial_i F^{0i} = \operatorname{div} \underline{E} = \frac{4\pi}{c} j^0 = 4\pi\rho .$$

Diese Gleichung muss sich in der Elektrostatik auf die zweite Gleichung von (1.7) reduzieren und deshalb identifizieren wir $\underline{E}$ in (1.9) mit dem elektrischen Feld. Daneben sagt die Theorie für nichtstatische Situationen die Existenz eines weiteren Feldes voraus. $\underline{B} = (B_1, B_2, B_3)$ nennt man die <u>magnetische Induktion</u> (<u>Magnetfeld</u>).

Nun müssen wir auch die lorentzinvariante Verallgemeinerung der ersten (homogenen) Gl. in (1.7) finden. Dazu schreiben wir zuerst den dualen Tensor $*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$ auf. Aus (1.9) ergibt sich sofort

$$(*F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ -B_1 & 0 & -E_3 & E_2 \\ -B_2 & E_3 & 0 & E_1 \\ -B_3 & -E_2 & E_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (1.10)$$

$(\underline{E} \to -\underline{B}, \underline{B} \to \underline{E})$. Es ist danach $(*F)^{ij} = -E_k$, i,j,k zyklisch. Die statische Gleichung $\mathrm{rot}\,\underline{E} = 0$ ist also äquivalent zu $\partial_j (*F^{ij}) = 0$. Die lorentzinvariante Verallgemeinerung dieser Gleichung liegt auf der Hand:

$$\partial_\nu *F^{\mu\nu} = 0. \qquad (1.11)$$

Damit sind wir bereits fertig. Die relativistisch invarianten Feldgleichungen der Elektrodynamik lauten:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{homogene Gleichungen:} & \partial_\nu *F^{\mu\nu} = 0\,, \\ \text{inhomogene Gl.} \quad : & \partial_\nu F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu\,. \end{array}} \quad \begin{array}{l}(1.12)\\(1.13)\end{array}$$

Die Gl. (1.12) können wir auch in dualer Form schreiben: Zunächst lautet Gl. (1.12) explizit:

$\eta^{\mu\nu\alpha\beta}\,\partial_\nu F_{\alpha\beta} = 0$, oder $\eta^{\mu\nu\alpha\beta}\, F_{[\alpha\beta,\nu]} = 0$. Dies besagt, dass das Hodge-duale von $F_{[\alpha\beta,\nu]}$ verschwindet. Da die Sternoperation im wesentlichen involutiv ist (s. SRT-Skript), folgt daraus $F_{[\alpha\beta,\nu]} = 0$, d.h.

$$F_{\alpha\beta,\nu} + F_{\beta\nu,\alpha} + F_{\nu\alpha,\beta} = 0 \,. \qquad (1.12')$$

Nach dem Poincaré-Lemma (SRT, § II.8) ist dies (im $\mathbb{R}^4$) gerade die Bedingung für die Existenz eines kovarianten Vektorfeldes A_μ, mit

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \,. \qquad (1.14)$$

Setzen wir diese Darstellung in (1.13) ein, so ergibt sich die Feldgleichung für das <u>Eichpotential</u> A^μ:

$$\Box A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\mu \,. \qquad (1.15)$$

Dabei ist $\Box$ der Wellenoperator: $\Box = \partial_\mu \partial^\mu$.

<u>Eichtransformationen</u>: Die Darstellung (1.14) ist nicht eindeutig. Der Feldtensor $F_{\mu\nu}$ ändert sich nicht, wenn wir die folgenden <u>Eichtransformationen</u> ausführen:

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda \,. \qquad (1.16)$$

Deshalb kann man z.B. erreichen, dass A^μ die ~~sog.~~ <u>Lorentz'sche Eichbedingung</u>

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \qquad (1.17)$$

erfüllt. Unter (1.16) ändert sich nämlich die Divergenz von A^μ gemäss

$$\partial_\mu A^\mu \longrightarrow \partial_\mu A^\mu + \Box\Lambda ,$$

und deshalb kann (1.17) erfüllt werden (nach eventueller Lösung einer inhomogenen Wellengleichung).

Die Lorentzbedingung bleibt erhalten, wenn bei Umeichungen (1.16) die Eichfunktion Λ durch $\Box\Lambda = 0$ eingeschränkt wird. In dieser Eichklasse vereinfacht sich (1.15) zu

$$\boxed{\Box A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu .} \tag{1.18}$$

C. Alternativer Zugang zu den Feldgleichungen

Statt mit den Feldstärken hätten wir auch mit den Potentialen argumentieren können. Ausgangspunkt sind dann die elektrostatischen Formeln

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi \quad , \quad \Delta\varphi = -4\pi\rho . \tag{1.19}$$

Da ρ die 0-Komponente eines Vektorfeldes ist, erwarten wir nach der 2. Gleichung in (1.19), dass wir φ als 0-Komponente eines Vektorfeldes A^μ auffassen sollten. Die speziell-relativistische inhomogene Feldgleichung müsste dann die folgende Form haben

$$\Box A^\mu + \dots = \frac{4\pi}{c} j^\mu ,$$

wobei die nicht hingeschriebenen Terme zunächst noch nicht näher bestimmt sind. Nun wird man aber wieder fordern, dass die Feldgleichung automatisch die Stromerhaltung impliziert. Wir verlangen deshalb, dass

$$\partial_\mu (\Box A^\mu + \dots) = 0$$

als Identität erfüllt ist. Beschränken wir uns auf lineare Zusatzterme, so muss die inhomogene Feldgleichung folgendermassen lauten:

$$\Box A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\mu . \tag{1.20}$$

Die linke Seite ist gleich $-\partial_\nu F^{\mu\nu}$, wenn $F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Also haben wir auch

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu , \tag{1.21}$$

mit

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu . \tag{1.22}$$

Die letzte Gleichung werden wir als Verallgemeinerung der ersten Gl. in (1.19) auffassen. Im statischen Fall ergibt sich aus (1.22) $F_{i0} = \partial_i A_0 = \partial_i \varphi$ und deshalb interpretieren wir F_{0i} als die Komponente E_i des elektrischen Feldes. Die homogenen Feldgleichungen (1.12') ergeben sich jetzt als Identitäten aus (1.22).

Wellengleichung für $F_{\mu\nu}$ im Vakuum ($j^\mu = 0$)

Im Vakuum ($j^\mu = 0$) folgt aus (1.18) $\Box A^\mu = 0$ und folglich

$$\Box F_{\mu\nu} = \Box(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = \partial_\mu \Box A_\nu - \partial_\nu \Box A_\mu = 0 .$$

Ohne die Hilfe von Potentialen erhalten wir aus den Feldgleichungen (1.12') und (1.13) (für $j^\mu = 0$)

$$0 = \partial^\lambda(\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu}) = \Box F_{\mu\nu} + \partial_\mu \underbrace{\partial^\lambda F_{\nu\lambda}}_{0} + \partial_\nu \underbrace{\partial^\lambda F_{\lambda\mu}}_{0}$$

$$= \Box F_{\mu\nu} .$$

Wir wollen dieses wichtige Resultat festhalten

$$\boxed{\Box F_{\mu\nu} = 0 \quad \text{für } j^\mu = 0 .} \tag{1.23}$$

Elektromagnetische Felder breiten sich also mit Lichtgeschwindigkeit aus (mehr dazu später).

D. Zerspaltung der Feldgleichungen in Raum und Zeit

Für die "3+1 Zerlegung" der Feldgleichungen notieren wir die Beziehungen (benutze (1.9) und (1.10))

$$(\partial_\nu F^{\mu\nu}) = \left(-\underline{\nabla}\cdot\underline{E}, \frac{1}{c}\partial_t\underline{E} - \underline{\nabla}\wedge\underline{B}\right) , \tag{1.24}$$

$$(\partial_\nu {}^*F^{\mu\nu}) = \left(\underline{\nabla}\cdot\underline{B}, -\frac{1}{c}\partial_t\underline{B} - \underline{\nabla}\wedge\underline{E}\right) . \tag{1.25}$$

Die Zerspaltung der Feldgl. (1.12) und (1.13) in Raum und Zeit lautet deshalb

homogene Gl.: $\underline{\nabla}\cdot\underline{B} = 0 , \quad \underline{\nabla}\wedge\underline{E} + \frac{1}{c}\partial_t\underline{B} = 0 ,$ (1.26)

inhom. Gl.: $\underline{\nabla}\cdot\underline{E} = 4\pi\rho , \quad \underline{\nabla}\wedge\underline{B} = \frac{4\pi}{c}\underline{J} + \frac{1}{c}\partial_t\underline{E} .$ (1.27)

Dies sind die <u>Maxwell'schen Gleichungen</u> in ihrer traditionellen Form. Mit Recht sagt aber H. Weyl: "Es ist kein Zweifel, dass in der vierdimensionalen Tensorformulierung ihre wahre mathematische Harmonie, die nicht vollkommener sein könnte, zutage tritt." In der raum-zeitlichen Zerlegung (1.26), (1.27) ist die hohe 4-dimensionale Symmetrie sehr versteckt. (Schliesslich entdeckten erst Einstein und Poincaré deren 4-dim. Symmetrie, nach wichtigen Vorarbeiten von Lorentz.)

Als Übung leite man auch aus (1.26) und (1.27) die Wellengleichungen für $\underline{E}$ und $\underline{B}$ im Vakuum her.

Wir zerlegen auch die Darstellung (1.14) der Feldstärken durch Potentiale in Raum und Zeit. Sei $(A^\mu) = (\varphi, \underline{A})$, so ergibt sich

$$\underline{E} = -\underline{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\partial_t \underline{A}, \quad \underline{B} = \underline{\nabla}\wedge\underline{A}. \qquad (1.28)$$

E. Transformationsgesetz der elektromagnetischen Felder

So wie in der SRT Raum und Zeit zur Raumzeit vereinigt werden, erweisen sich auch elektrische und magnetische Felder als verschiedene Komponenten eines einzigen 4-dimensionalen Feldes, des Feldtensors $F_{\mu\nu}$. Beim Übergang von einem Lorentzsystem zu einem anderen werden deshalb elektrische und magnetische Felder durcheinander gemischt. Wir wollen dies für spezielle Lorentztransformationen ausschreiben.

Ausgangspunkt ist das Tensortransformationsgesetz für $F^{\mu\nu}$:

$$F'^{\mu\nu}(x') = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}(x), \quad \text{wo} \quad x' = \Lambda x + a. \qquad (1.29)$$

Für die spezielle Lorentztransf.

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma(x^0 - \beta x^1), \\ x'^1 &= \gamma(x^1 - \beta x^0), \quad \beta = \frac{v}{c}, \ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned} \qquad (1.30)$$

finden wir mit (1.9) leicht

$$\begin{aligned} E_1' &= E_1, \quad E_2' = \gamma(E_2 - \beta B_3), \quad E_3' = \gamma(E_3 + \beta B_2), \\ B_1' &= B_1, \quad B_2' = \gamma(B_2 + \beta E_3), \quad B_3' = \gamma(B_3 - \beta E_2). \end{aligned} \qquad (1.31)$$

(Es genügt, die erste Zeile herzuleiten, da sich $F^{\mu\nu}$ und ${}^*F^{\mu\nu}$ gleich transformieren.) Wir schreiben (1.31) noch etwas kompakter:

$$\underline{E}'_{\parallel} = \underline{E}_{\parallel} \quad , \quad \underline{B}'_{\parallel} = \underline{B}_{\parallel} \quad ,$$

$$\underline{E}'_{\perp} = \gamma(\underline{E}_{\perp} + \underline{\beta} \wedge \underline{B}) , \quad \underline{B}'_{\perp} = \gamma(\underline{B}_{\perp} - \underline{\beta} \wedge \underline{E}) . \tag{1.32}$$

Hier bedeuten $\parallel$ und $\perp$ die parallelen und senkrechten Komponenten bezüglich der relativen Geschwindigkeit $\underline{v}$ und $\underline{\beta} := \underline{v}/c$. In dieser Form sind die Gleichungen (1.32) gültig, wenn die spezielle LT in einer beliebigen Richtung ausgeübt wird. Man kann diese Gleichungen auch folgendermassen zusammenfassen

$$\underline{E}' = \gamma(\underline{E} + \underline{\beta} \wedge \underline{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \underline{\beta} (\underline{\beta} \cdot \underline{E}) ,$$
$$\underline{B}' = \gamma(\underline{B} - \underline{\beta} \wedge \underline{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \underline{\beta} (\underline{\beta} \cdot \underline{B}) . \tag{1.33}$$

Daraus sieht man, dass ein reines elektrisches oder magnetisches Feld in einem Lorentzsystem als eine Mischung von solchen Feldern in einem anderen Bezugssystem erscheint. $\underline{E}$ und $\underline{B}$ haben eben separat keine invariante Bedeutung (entsprechen keinen geometrischen Objekten im Minkowski-Raum), genau so wenig wie die x^1-Koordinate eines Ereignisses.

<u>Beispiel</u>: <u>Feld einer geladenen Punktladung</u>

Eine Punktladung e ruhe im System K. In diesem erzeugt sie ein Coulombfeld

$$\underline{B} = 0 , \quad \underline{E} = \frac{e \underline{x}}{|\underline{x}|^3} . \tag{1.34}$$

Relativ zum Inertialsystem K' ist ein elektrisches und ein magnetisches Feld vorhanden. Wir untersuchen zunächst das transformierte elektrische Feld. Aus (1.31) folgt

$$E_1'(x') = E_1(x) = e\, x/r^3 .$$

Setzen wir $b^2 = y^2+z^2 = y'^2+z'^2$ (b = Abstand von der x-Achse), so wird

$$E_1' = \frac{e\gamma(x'+vt')}{[\gamma^2(x'+vt')^2+b^2]^{3/2}} . \qquad (1.35)$$

Ebenso folgt aus (1.31)

$$E_2' = \gamma\,\frac{ey}{r^3} = \frac{e\gamma y'}{[\gamma^2(x'+vt')^2+b^2]^{3/2}} \quad (\text{und } 2 \to 3). \qquad (1.36)$$

Die γ-Faktoren in Zähler und Nenner von (1.35), (1.36) "verzerren" das Feld. Um dies zu veranschaulichen, betrachten wir die momentane Verteilung der Feldlinien zur Zeit $t'=0$:

$$\underline{E}'(\underline{x}') = \frac{e(1-\beta^2)}{[r'^2-\beta^2 b^2]^{3/2}}\,\underline{x}' \qquad (r' = |\underline{x}'|) . \qquad (1.37)$$

Die Feldlinien sind Geraden, wie bei einer ruhenden Ladung. Der Betrag von $\underline{E}'$ ist

$$|\underline{E}'| = \frac{e(1-\beta^2)}{r'^2(1-\beta^2\sin^2\vartheta')^{3/2}} , \quad \sin\vartheta' := b/r' . \qquad (1.38)$$

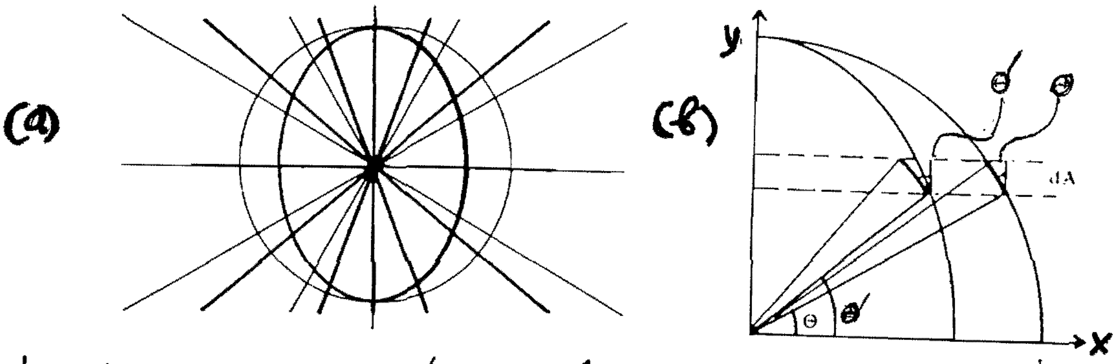
Dieser ist – für festes r' – am grössten in der Ebene senkrecht zur Bewegungsrichtung des geladenen Teilchens,

$$|\underline{E}'| = \frac{e}{r'^2\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{für } \vartheta' = \pi/2 , \qquad (1.39)$$

und am kleinsten in der Bahn des Teilchens (x-Achse):

$$|\underline{E}'| = \frac{e(1-\beta^2)}{r'^2} \quad \text{für } \vartheta' = 0 . \qquad (1.40)$$

Das Coulombfeld ist senkrecht zur Bewegungsrichtung dilatiert, in Bahnrichtung kontrahiert (s. Fig.).



Das <u>Feldlinienbild</u> (die Zahl der Feldlinien pro Flächeneinheit gibt den Betrag $|E'|$ an) können wir aus dem Feldlinienbild einer ruhenden Ladung so gewinnen, dass wir dieses Bild in der x-Richtung mit dem Faktor $\sqrt{1-\beta^2}$ stauchen. Zum Beweis dieser Behauptung betrachten wir eine Kugel und das daraus durch Stauchung in der x-Richtung hervorgehende Ellipsoid. Eine Fläche dA senkrecht zur x-Achse (Fig. (b)) erscheint vom Ursprung des Koordinatensystems betrachtet unter dem Raumwinkel $d\Omega = dA \cos\theta / r^2$. Alle durch diesen Raumwinkel hindurchtretenden Feldlinien für die ruhende Ladung gehen bei der Stauchung in den Raumwinkel $d\Omega' = dA \cos\theta' / r'^2$, da dA unverändert bleibt. Es ist folglich

$$\frac{d\Omega'}{d\Omega} = \frac{\cos\theta' \, r^2}{\cos\theta \, r'^2} = \frac{x'}{r'^3}\,\frac{r^3}{x} = \frac{1}{\gamma}\,\frac{r^3}{r'^3} .$$

Da die Zahl der Feldlinien die $r^2 d\Omega$, bzw. $r'^2 d\Omega'$ durchsetzen gleich ist, ergibt sich für die Feldstärken: $|E'| \, r'^2 d\Omega' = |E| \, r^2 d\Omega = e \, d\Omega$, d.h.

$$|E'| = \frac{e}{r'^2}\,\frac{d\Omega}{d\Omega'} = \frac{e}{r'^2}\,\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2 \sin^2\theta')^{3/2}} ,$$

was mit (1.38) in der Tat übereinstimmt.

Für das Magnetfeld der bewegten Ladung erhält man aus (1.31)

$$B_1' = 0\,,\quad B_2' = \beta E_3'\,,\quad B_3' = -\beta E_2'\,,$$

d.h.

$$\boxed{\underline{B}' = -\underline{\beta} \wedge \underline{E}'}\,. \qquad (1.41)$$

Eine bewegte Ladung erzeugt also ein magnetisches Feld proportional zu v/c.

F. Integrale Form der Maxwell-Gleichungen

Es ist instruktiv und gelegentlich auch nützlich, die Maxwell'schen Gleichungen (1.26), (1.27) in äquivalenter integraler Form zu schreiben.

Bezeichnet S eine glatte orientierte 2-dimensionale Fläche ohne Rand (geschlossene Fläche), so haben wir nach dem Gauss'schen Satz die Äquivalenz

$$\operatorname{div} \underline{B} = 0 \iff \int_S \underline{B}\cdot d\underline{\sigma} = 0 \quad \text{für alle } S. \qquad (1.42)$$

Ähnlich haben wir

$$\operatorname{div} \underline{E} = 4\pi\rho \iff \frac{1}{4\pi}\int_{\partial V} \underline{E}\cdot d\underline{\sigma} = \int_V \rho\, dV \qquad (1.43)$$

für alle glatt berandeten 3-dim. Gebiete V mit orientiertem Rand ∂V (Gesetz von Gauss).

Ist jetzt S ein glattes orientiertes 2-dim. Flächenstück mit orientiertem Rand ∂S, so lauten die lokale und die integrale Form des <u>Faraday'schen Induktionsgesetzes</u>

$$\mathrm{rot}\,\underline{E} + \frac{1}{c}\partial_t \underline{B} = 0 \iff \underbrace{\int_{\partial S} \underline{E}\cdot d\underline{s}}_{\text{elektrische Ringspannung}} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\underbrace{\int_S \underline{B}\cdot d\underline{\sigma}}_{\text{magnetischer Fluss durch } S} \,. \qquad (1.44)$$

Entsprechend haben wir das verallgemeinerte <u>Ampère'sche Gesetz</u>

$$\mathrm{rot}\,\underline{B} = \frac{4\pi}{c}\underline{J} + \frac{1}{c}\partial_t \underline{E} \iff$$

$$\underbrace{\int_{\partial S} \underline{B}\cdot d\underline{s}}_{\text{magnetische Ringspannung}} = \frac{4\pi}{c}\underbrace{\int_S \underline{J}\cdot d\underline{\sigma}}_{\text{elektrischer Strom durch } S} + \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\underbrace{\int_S \underline{E}\cdot d\underline{\sigma}}_{\text{elektrischer Fluss durch } S} \qquad (1.45)$$

$$= \frac{4\pi}{c} I(S) \,, \qquad (1.45')$$

wo

$$I(S) = \int_S \left(\underline{J} + \frac{1}{4\pi}\partial_t \underline{E}\right)\cdot d\underline{\sigma} \qquad (1.46)$$

die <u>elektrische Durchströmung</u> bezeichnet. (Notiere, dass $\mathrm{div}\left(\underline{J} + \frac{1}{4\pi}\partial_t \underline{E}\right) = 0$ ist.) Nach (1.45) und (1.45') gilt also

$$\int_{\partial S} \underline{B}\cdot d\underline{s} = \frac{4\pi}{c} I(S) \,. \qquad (1.47)$$

Für stationäre Situationen ist $I(S)$ der elektrische Strom durch S.

6.* Variationsprinzip für die Feldgleichungen

Die Erfahrung zeigt, dass sich die Grundgleichungen der Physik aus Wirkungsprinzipien gewinnen lassen. Dies gilt auch für die Maxwell'schen Gleichungen.

Betrachten wir zunächst allgemein eine Wirkung der Form

$$S[\phi] = \int_D \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a)\, d^4x \,, \qquad (1.48)$$

wo ϕ_a eine Anzahl von Materiefeldern bezeichnet (z.B. A^μ im Maxwell'schen Fall). Nun untersuchen wir Variationen von $S(\phi)$: $I(\varepsilon) = S[\phi + \varepsilon \chi]$, ε = reeller Parameter. Wir bilden

$$\frac{d}{d\varepsilon} I(\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} = \int_D \sum_a \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} \chi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{a,\mu}} \chi_{a,\mu} \right] d^4x \,.$$

Für den 2. Term in der eckigen Klammer benutzen wir die Identität

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{a,\mu}} \chi_{a,\mu} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{a,\mu}} \chi_a \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{a,\mu}} \right) \chi_a \,.$$

Benutzen wir ferner den Gauss'schen Satz (in 4 Dimensionen), so kommt

$$\frac{d}{d\varepsilon} I(\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} \equiv \delta S = \int_D \sum_a \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{a,\mu}} \right] \chi_a \, d^4x + \int_{\partial D} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{a,\mu}} \chi_a \, d\sigma_\mu \,. \qquad (1.49)$$

---

* Abschnitte mit Sternchen sind "nur für Theoretiker".

Daraus folgt: Die Wirkung ist für das Feld ϕ genau dann stationär bezüglich Variationen, welche am Rand verschwinden, wenn die Eulerschen Gleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{a,\mu}} = 0 \qquad (1.50)$$

gelten ($\mathcal{D}$ sei beliebig).

<u>Anwendung</u>. Stellen wir die elektromagnetischen Feldstärken durch ein Potential dar, $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$, so führt die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \frac{1}{c} j^\alpha A_\alpha \qquad (1.51)$$

zu den Maxwell'schen Gleichungen. Um dies zu sehen, drücken wir $\mathcal{L}$ explizite durch A^α und seine Ableitungen aus

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) - \frac{1}{c} j_\alpha A^\alpha .$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\alpha} = -\frac{1}{c} j_\alpha ,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\beta A^\alpha)} = -\frac{1}{16\pi} \cdot 2 \cdot (-2) F_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} F_{\alpha\beta} .$$

Die Euler-Lagrange Gleichungen lauten also

$$\partial_\beta F^{\alpha\beta} = -\frac{4\pi}{c} j^\alpha ,$$

und stimmen also mit den Maxwellschen Gleichungen überein.

H*. Formulierung der Maxwellschen Gleichungen mit Differentialformen

Zum Feldtensor $F_{\mu\nu}$ gehört die 2-Form

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu \quad . \tag{1.52}$$

Nun ist ja

$$dF = \frac{1}{2} F_{\mu\nu,\lambda}\, dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2} F_{[\mu\nu,\lambda]}\, dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu ,$$

und somit lassen sich die homogenen Maxwell-Gleichungen (1.12') so schreiben

$$\boxed{dF = 0} . \tag{1.53}$$

Die duale 2-Form $*F$ ist (siehe SRT-Skript, p. 74)

$$*F = \frac{1}{2} {*F}_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu , \quad {*F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} . \tag{1.54}$$

Wir bilden

$$d{*F} = \frac{1}{2} {*F}_{\mu\nu,\lambda}\, dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda$$

sowie

$$*d{*F} = \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu\lambda\sigma}\, {*F}^{\mu\nu,\lambda}\, dx^\sigma$$

$$= \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu\lambda\sigma}\, \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}{}^{,\lambda}\, dx^\sigma$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 2 \left(-\delta^\alpha_\lambda \delta^\beta_\sigma + \delta^\alpha_\sigma \delta^\beta_\lambda \right) F_{\alpha\beta}{}^{,\lambda}\, dx^\sigma$$

$$= F_{\alpha\beta}{}^{,\beta}\, dx^\alpha \quad .$$

Wir halten dieses Ergebnis fest

$$*d{*F} = \partial^\beta F_{\alpha\beta}\, dx^\alpha . \tag{1.55}$$

Die <u>Stromform</u> J ist definiert durch

$$J = j_\mu dx^\mu = \rho\, dt - \underline{J} \cdot d\underline{x} \; . \tag{1.56}$$

Da (SRT-Skript, p. 74) $*(*\omega) = -(-1)^{p(4-p)}\omega$ für eine p-Form ω, lassen sich nach (1.55) die inhomogenen Maxwell-Gleichungen wie folgt schreiben

$$\underline{d * F = -\frac{4\pi}{c} * J \, .} \tag{1.57}$$

Das <u>Codifferential</u> ist definiert durch

$$\delta := (-1)(-1)^{n(p+1)} * d * \qquad (n = 4 \text{ in 4 Dimensionen}). \tag{1.58}$$

Diese verallgemeinert die Divergenz (vgl. mit (1.55)). Mit ihr lassen sich die inhomogenen Maxwell-Gl. wie folgt schreiben

$$\boxed{\delta F = \frac{4\pi}{c} J \, .} \tag{1.59}$$

Aufgrund von $d \circ d = 0$ hat das Codifferential die Eigenschaft $\delta \circ \delta = 0$. Deshalb folgt aus (1.59) $\delta J = 0$. Dies ist die Kontinuitätsgleichung, denn $\delta J = j^\mu{}_{,\mu}$ (Übungsaufgabe).

Die Maxwellschen Gl. (1.53) und (1.59) könnten nicht einfacher sein. In dieser Form bleiben die Gleichungen auch in der Allgemeinen Relativitätstheorie bestehen!

* * *

II.2 Bewegungsgleichung für ein geladenes Teilchen

Wir beginnen mit ein paar kinematischen Vorbemerkungen. Die Bewegung eines Massenpunktes beschreibt eine Weltlinie im Minkowski-Raum, die bezüglich eines LS durch Funktionen $x^\mu(\lambda)$ beschrieben wird, wobei λ ein beliebiger "Kurvenparameter" ist. Das Bogenelement ist definiert durch (s. SRT-Skript, p. 50)

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\,d\lambda^2 \qquad (2.1)$$

und ist invariant unter Poincaré-Transformationen. Es ist $d\tau = ds/c$ das Differential der <u>Eigenzeit</u>.

Offensichtlich ist

$$u^\mu := \frac{dx^\mu}{d\tau} \equiv \dot{x}^\mu \qquad (2.2)$$

ein 4er-Vektor. Man nennt ihn auch die <u>4er-Geschwindigkeit</u>. Der Zusammenhang mit der gewöhnlichen Geschwindigkeit $\underline{v} = d\underline{x}/dt$ ergibt sich durch die Wahl $\lambda = t$; dann ist $x^\mu(t) = (ct, \underline{x}(t))$ und nach (2.1)

$$ds^2 = (c^2 - \underline{v}^2)\,dt^2 = c^2 d\tau^2 \,,$$

d.h.

$$d\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2}\,dt \,. \qquad (2.3)$$

Es ist demnach

$$\underline{u^\mu} = \gamma\frac{dx^\mu}{dt} = \underline{\gamma(c, \underline{v})}\,, \quad \gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,. \qquad (2.4)$$

Ferner gilt für das Minkowski'sche Skalarprodukt

$$\underline{(u,u) = u^\mu u_\mu = c^2}\,. \qquad (2.5)$$

Als <u>4er-Impuls</u> definiert man den Vektor

$$\boxed{p^\mu = m u^\mu = (\gamma m c, \gamma m \underline{v})} \, . \qquad (2.6)$$

Dies zeigt ($\beta = v/c$)

$$p^0/mc = \gamma \, , \quad |\underline{p}|/p^0 = \beta \, . \qquad (2.7)$$

Nach (2.5) ist

$$\boxed{(p,p) = p^\mu p_\mu = m^2 c^2 \, .} \qquad (2.8)$$

Durch Differentiation nach τ erhalten wir daraus (mit einem Punkt bezeichnen wir immer die Ableitung nach der Eigenzeit)

$$(\dot{p}, p) = \dot{p}^\mu p_\mu = p^\mu \dot{p}_\mu = 0 \, . \qquad (2.9)$$

Nach diesen kinematischen Begriffsbildungen können wir nun daran gehen, die Bewegungsgleichung für einen geladenen Massenpunkt in einem elektromagnetischen Feld aufzustellen. Letztere folgt aus der Annahme (welche experimentell bestätigt ist), dass im momentanen Ruhesystem gilt

$$\frac{d}{dt} m \underline{v} = e \underline{E} \qquad (\underline{v} = 0) \, . \qquad (2.10)$$

In diesem System ist nach (2.9) $\dot{p}^0 = 0$ und nach (2.7) $p^0 = mc$. Somit ist im momentanen Ruhesystem (benutze auch (1.9))

$$\boxed{\dot{p}^\mu = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_\nu \, .} \qquad (2.11)$$

Diese lorentzkovariante Gleichung gilt natürlich in jedem Lorentzsystem. Ihre 3+1 – Zerlegung lautet (Übung)

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \underline{v}) = e\left(\underline{E} + \frac{1}{c} \underline{v} \wedge \underline{B}\right) , \qquad (2.12)$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma m c^2) = e \, \underline{E} \cdot \underline{v} \, . \qquad (2.13)$$

Rechts in (2.12) steht die <u>Lorentzkraft</u> und rechts in (2.13) die <u>Leistung des Feldes am Massenpunkt</u>. Wir interpretieren daher

$$E := \gamma m c^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{2.14}$$

als die <u>Energie</u> des Massenpunktes. Man nennt deshalb

$$\boxed{p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \underline{p}\right)} \tag{2.15}$$

auch den <u>Energie-Impuls-Vektor</u> des Teilchens.
Wir notieren (vgl. (2.7))

$$\gamma = \frac{E}{mc^2}, \quad c^2|\underline{p}|/E = \underline{v}. \tag{2.16}$$

Aus (2.15) und (2.8) folgt auch

$$E = c\sqrt{\underline{p}^2 + m^2c^2} \tag{2.17}$$

Für kleine v/c erhalten wir aus (2.14)

$$E = \underbrace{mc^2}_{\text{Ruheenergie}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}mv^2}_{\text{nichtrel. kin. Energie}} + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} + \dots \tag{2.18}$$

Die eigentliche Rechtfertigung der Interpretation (2.14) folgt aus dem Erhaltungssatz für das gekoppelte System (Ladungen + Feld), welchen wir später besprechen werden. (Der Energie-Impuls-Erhaltungssatz gilt ganz allgemein für ein TSO-freies System als Folge der Translationsinvarianz.) Dass man die gesamte Ruheenergie eines Teilchens in Strahlung verwandeln kann ist von zahlreichen Elementarteilchenprozessen bekannt; z.B. $e^- + e^+ \to 2\gamma$.

Variationsprinzip

Wir zeigen nun, dass das Hamiltonsche Variationsprinzip

$$\delta \int L \, d\lambda = 0 \tag{2.19}$$

für die folgende Lagrangefunktion

$$L\left(x^\mu(\lambda), \frac{dx^\mu}{d\lambda}\right) = -mc\sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}} - \frac{e}{c}A_\mu(x(\lambda))\frac{dx^\mu}{d\lambda} \tag{2.20}$$

die richtigen Bewegungsgleichungen (2.11) gibt.

Beachte zunächst, dass dieses Variationsprinzip unabhängig von der Parameterwahl λ ist. Wichtig ist auch, dass sich L bei einer Umeichung lediglich um eine totale Ableitung ändert:

$$L \to L - \frac{e}{c}\partial_\mu \Lambda(x(\lambda))\frac{dx^\mu}{d\lambda} = L - \frac{e}{c}\frac{d\Lambda(x(\lambda))}{d\lambda}. \tag{2.21}$$

Deshalb bleiben die Bewegungsgleichungen unangetastet.

Nun schreiben wir die Euler-Lagrangeschen Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{dx^\mu}{d\lambda}\right)}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0 \tag{2.22}$$

explizite aus. Zunächst ist

$$\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{dx^\mu}{d\lambda}\right)} = -\frac{1}{2}\frac{mc}{\left(\frac{dx}{d\lambda}, \frac{dx}{d\lambda}\right)^{1/2}} \, 2\frac{dx_\mu}{d\lambda} - \frac{e}{c}A_\mu$$

$$= -mu_\mu - \frac{e}{c}A_\mu \qquad \text{für } \lambda = \tau : \text{Eigenzeit}$$

Ferner haben wir

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = -\frac{e}{c}\, u^\nu A_{\nu,\mu}.$$

Aus (2.22) wird damit

$$\frac{d}{d\tau} m u_\mu = \frac{e}{c} A_{\nu,\mu} u^\nu - \frac{e}{c}\frac{d}{d\tau} A_\mu(x(\tau))$$

$$= \frac{e}{c} u^\nu (A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}) = \frac{e}{c} F_{\mu\nu} u^\nu,$$

oder

$$\dot p_\mu = \frac{e}{c} F_{\mu\nu} u^\nu = \frac{e}{mc} F_{\mu\nu} p^\nu,$$

was mit (2.11) übereinstimmt.

Hamilton'scher Formalismus

Der Vollständigkeit halber diskutieren wir auch noch den Übergang zur Hamilton'schen (kanonischen) Formulierung.

Dazu wählen wir für den Parameter λ die Zeit t. Nach Multiplikation mit c lautet dann die Lagrangefunktion

$$L = -mc^2\sqrt{1-v^2/c^2} - e\left(\varphi - \frac{1}{c}\underline{v}\cdot\underline{A}\right). \qquad (2.23)$$

Der kanonisch konjugierte Impuls zu $\underline{x}$ ist

$$\underline{\pi} = \frac{\partial L}{\partial \underline{\dot x}} = \frac{m\underline{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{e}{c}\underline{A},$$

d.h.

$$\underline{\pi} = \underline{p} + \frac{e}{c}\underline{A}, \qquad (2.24)$$

wo $\underline{p}$ der mechanische (eichinvariante) Impuls ist.

Die Hamiltonfunktion ist

$$H = (\underline{\pi}\cdot\underline{\dot x} - L)(\underline{\pi}, \underline{x}).$$

Nun haben wir

$$\underline{\Pi}\cdot\underline{\dot{x}} - L = \gamma m \underline{v}^2 + \frac{e}{c}\underline{A}\cdot\underline{v} + mc^2\sqrt{1-v^2/c^2} + e\varphi - \frac{e}{c}\underline{v}\cdot\underline{A}$$

$$= \gamma m c^2 + e\varphi .$$

Bemerken wir ferner

$$\left(\underline{\Pi} - \frac{e}{c}\underline{A}\right)^2 = \frac{m^2 v^2}{1-v^2/c^2} = m^2c^2\left(-1 + \frac{1}{1-v^2/c^2}\right),$$

also

$$\gamma = \frac{1}{mc}\sqrt{m^2c^2 + \left(\underline{\Pi} - \frac{e}{c}\underline{A}\right)^2},$$

so finden wir

$$\boxed{H = c\sqrt{m^2c^2 + \left(\underline{\Pi} - \frac{e}{c}\underline{A}\right)^2} + e\varphi .} \qquad (2.25)$$

II.3 Der Energie-Impuls-Tensor des elm. Feldes

Wir besprechen nun die Energie- und Impulserhaltungssätze in der ED.

Zunächst benötigen wir einen Ausdruck für die 4er-Kraftdichte eines elektromagnetischen Feldes $F_{\mu\nu}$ auf eine Stromdichte j^μ. Nach der Bewegungsgleichung (2.11) für ein geladenes Teilchen gilt

$$m\dot{u}^\mu = K^\mu, \quad K^\mu = \frac{1}{c} F^\mu{}_\nu e u^\nu . \tag{3.1}$$

Die Kraftdichte k^μ für eine kontinuierliche Stromverteilung ist demnach

$$\underline{k^\mu = \frac{1}{c} F^\mu{}_\nu j^\nu} . \tag{3.2}$$

Wie in der Elektrostatik (§ I.7) drücken wir diese mit Hilfe der Feldgleichungen durch die Felder allein aus. Mit (1.13) haben wir zunächst

$$\begin{aligned} k^\mu &= -\frac{1}{4\pi} F^\mu{}_\nu \partial_\alpha F^{\nu\alpha} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \partial_\alpha (F^\mu{}_\nu F^{\nu\alpha}) + \frac{1}{4\pi} \underbrace{\partial^\alpha F^{\mu\nu} F_{\nu\alpha}}_{F_{\nu\alpha} \frac{1}{2}(\partial^\alpha F^{\mu\nu} - \partial^\nu F^{\mu\alpha})} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \partial_\alpha (F^\mu{}_\nu F^{\nu\alpha}) + \frac{1}{8\pi} F_{\nu\alpha} (\partial^\alpha F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\alpha\mu}) .$$

Nach den homogenen Gl. (1.12') können wir den letzten Term vereinfachen:

$$k^\mu = -\frac{1}{4\pi} \partial_\alpha (F^\mu{}_\nu F^{\nu\alpha}) - \underbrace{\frac{1}{8\pi} F_{\nu\alpha} \partial^\mu F^{\nu\alpha}}_{\frac{1}{16\pi} \partial^\mu (F_{\nu\alpha} F^{\nu\alpha})} .$$

Damit haben wir das wichtige Resultat

$$\boxed{k^\mu = -\partial_\alpha T^{\mu\alpha}}\ , \tag{3.3}$$

wo

$$\boxed{T^{\mu\alpha} = \frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu\nu} F_\nu{}^\alpha + \frac{1}{4} g^{\alpha\mu} F_{\nu\beta} F^{\nu\beta}\right)}\ . \tag{3.4}$$

Dies soll man als Verallgemeinerungen von (I.7.3) und (I.7.2) ansehen. Wir zeigen jetzt, dass (3.3) in kompakter Weise Energie- und Impulserhaltung beschreibt.

Dazu zerlegen wir die verschiedenen Grössen wieder in Raum und Zeit. Für k^μ haben wir wie in (2.12) und (2.13)

$$k^\mu = \left(\frac{1}{c}\,\underline{J}\cdot\underline{E}\ ,\ \rho\,\underline{E} + \frac{1}{c}\,\underline{J}\wedge\underline{B}\right). \tag{3.5}$$

Analog wie im Anschluss an (2.13) müssen wir $\underline{J}\cdot\underline{E}$ (d.h. $c k^0$) als <u>Leistungsdichte</u> des elektromagnetischen Feldes an den Strömen interpretieren. Der <u>Energie-Impuls-Tensor</u> $T^{\mu\nu}$ zerfällt wie folgt

$$\left(T^{\mu\nu}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{8\pi}\left(\underline{E}^2 + \underline{B}^2\right) & \frac{1}{4\pi}\,\underline{E}\wedge\underline{B} \\ \hline \frac{1}{4\pi}\,\underline{E}\wedge\underline{B} & \begin{array}{l} \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{2}\underline{E}^2\delta_{ik} - E_i E_k \right. \\ \left. \quad + \frac{1}{2}\underline{B}^2\delta_{ik} - B_i B_k\right) \end{array} \end{array}\right). \tag{3.6}$$

Damit wird aus (3.3) für <u>$\mu = 0$</u> :

$$\boxed{\partial_t u + \operatorname{div}\underline{S} + \underline{J}\cdot\underline{E} = 0}\ , \tag{3.7}$$

wobei

$$u = \frac{1}{8\pi}\left(\underline{E}^2 + \underline{B}^2\right),\quad \underline{S} = \frac{c}{4\pi}\,\underline{E}\wedge\underline{B}\ \ \text{(\underline{Poynting Vektor})}. \tag{3.8}$$

Dies ist der <u>Satz von Poynting</u>. Zur Interpretation integrieren wir (3.7) über ein Gebiet G mit glattem Rand ∂G:

$$\frac{d}{dt}\int_G u\,dV = -\int_{\partial G} \underline{S}\cdot d\underline{\sigma} - \int_G \underline{J}\cdot\underline{E}\,dV\,. \qquad (3.9)$$

Änderung der Feldenergie in G

Feldenergie, welche pro Zeiteinheit durch ∂G strömt

Leistung der Felder an den Ladungen in G

Die angedeutete Interpretation drängt sich auf. Es ist also

$$\begin{aligned} u &= \text{Energiedichte des elm. Feldes}\,, \\ \underline{S} &= \text{Energiestromdichte des elm. Feldes}\,, \end{aligned} \qquad (3.10)$$

und (3.9) besagt: Die zeitliche Änderung der elektromagn. Energie in einem Gebiet G ist gleich der elektromagnetischen Energie, welche pro Zeiteinheit in G hineinströmt, vermindert um die Arbeit, welche die Felder pro Zeiteinheit an den Quellen in G leisten (<u>Energiesatz</u>).

Für <u>$\mu = i$</u> wird aus (3.3)

$$k^i = -T^{i\alpha}{}_{,\alpha} = -T^{i0}{}_{,0} - T^{ik}{}_{,k}\,,$$

oder mit (3.6)

$$\boxed{k^i + \partial_t \Pi^i = -\partial_k T^{ik}}\,, \qquad (3.11)$$

wobei

$$\underline{\Pi} = \frac{1}{c^2}\underline{S}\,, \qquad (3.12)$$

und

$$T_{ik} = -\frac{1}{4\pi}\left[E_iE_k + B_iB_k - \frac{1}{2}\delta_{ik}(\underline{E}^2+\underline{B}^2)\right] . \qquad (3.13)$$

Gl. (3.11) stellt den <u>Impulssatz</u> dar. Zur Interpretation integrieren wir wieder über ein Gebiet G und erhalten

$$\frac{d}{dt}\left(P_i^{mech} + P_i^{Feld}\right) = -\int_{\partial G} T_{ik}\, d\sigma_k . \qquad (3.14)$$

Darin ist

$$\frac{d}{dt}\underline{P}^{mech} = \int_G \underline{k}\, dV \qquad (3.15)$$

die zeitliche Änderung des mechanischen Impulses $\underline{P}^{mech}$ in G und

$$\underline{P}^{Feld} = \int_G \underline{\Pi}\, dV \qquad (3.16)$$

ist der Impuls des Feldes in G. Die rechte Seite in (3.14) ist gleich dem Impuls der durch ∂G hineinfliesst ($-T_{ik}n_k$ ist die Kraft pro Oberflächeneinheit. T_{ik} verallgemeinert den Ausdruck (I.7.2) der Elektrostatik und stellt die <u>Maxwellschen Spannungen</u> des elektromagnetischen Feldes dar*). Besonders wichtig ist, dass

$$\frac{1}{c^2}\underline{S} \text{ die \underline{Impulsstromdichte}} \qquad (3.17)$$

darstellt.

* * *

---

*) Gegenüber Kap. I haben wir in der Def. von T_{ik} das Vorzeichen geändert.

II.4 Das freie elektromagnetische Feld

Die Vakuumfeldgleichungen $\partial_\nu F^{\mu\nu}=0$, $\partial_\nu {}^*F^{\mu\nu}=0$ implizieren nach (1.23) die Wellengleichung $\Box F_{\mu\nu}=0$. Wir betrachten zunächst <u>ebene Wellen</u>, d.h. Felder $F_{\mu\nu}(x)$ die nur von einer Raumkoordinate abhängen. Der Anschaulichkeit halber führen wir die Diskussion in der 3+1 Zerlegung der Felder durch. Ausgangspunkt sind die Maxwellschen Gleichungen

$$\partial_t \underline{E} = c \operatorname{rot} \underline{B}, \quad \partial_t \underline{B} = -c \operatorname{rot} \underline{E}, \tag{4.1}$$

$$\operatorname{div} \underline{E} = 0 \quad , \quad \operatorname{div} \underline{B} = 0 . \tag{4.2}$$

A. Ebene Wellen

Die eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \tag{4.3}$$

hat bekanntlich die allgemeine Lösung

$$\phi(x,t) = u(x-ct) + v(x+ct) ,$$

wo u und v beliebige C^2-Funktionen über $\mathbb{R}$ sind. Diese sind z.B. durch die Anfangswerte $\phi(x,0)$ und $\partial_t\phi(x,0)$ bestimmt (siehe HMP).

Das $\underline{E}$-Feld der allgemeinsten, in Richtung $\underline{n}$ ($|\underline{n}|=1$) fortschreitenden ebenen Welle ist somit von der Form

$$\underline{E}(\underline{x},t) = \underline{F}(\underline{n}\cdot\underline{x}-ct) . \tag{4.4}$$

Für jede vektorwertige Funktion $\underline{F}$ auf $\mathbb{R}$ ist dies eine Lösung der Wellengleichung. Die Feldgleichungen schränken aber $\underline{F}$ weiter ein:

$$\operatorname{div} \underline{E} = \underline{n}\cdot \underline{F}'(\underline{n}\cdot\underline{x}-ct) = 0$$

($\underline{F}'$ = Ableitung von $\underline{F}$), d.h. $\underline{F}'$ steht senkrecht auf $\underline{n}$. Dies bedeutet $\underline{F}(u) - \underline{F}(0) \perp \underline{n}$. Wir setzen die Konstante $\underline{F}(0)$ gleich null, denn sie gibt lediglich Anlass zu einem stationären homogenen $\underline{E}$-Feld; ein solches können wir natürlich jeder Lösung überlagern.

Damit ist $\underline{F}(u) \perp \underline{n}$ und folglich

$$\underline{n} \cdot \underline{E}(\underline{x}, t) = 0 . \tag{4.5}$$

Das $\underline{E}$-Feld ist also <u>transversal</u>.

Aus dem Induktionsgesetz folgt weiter

$$\partial_t \underline{B} = -c\, \underline{\nabla} \wedge \underline{E} = -c\, \underline{n} \wedge \underline{F}'(\underline{n} \cdot \underline{x} - ct) = \partial_t\, \underline{n} \wedge \underline{E} .$$

Bis auf ein uninteressantes konstantes $\underline{B}$-Feld ist also

$$\underline{B} = \underline{n} \wedge \underline{E} \qquad (\Longrightarrow \underline{n} \cdot \underline{B} = 0) , \tag{4.6}$$

und damit $|\underline{E}| = |\underline{B}|$.

Das $\underline{E}$-Feld (4.4), mit einem transversalen $\underline{F}$, und das Magnetfeld (4.6) erfüllen auch alle übrigen Feldgleichungen (4.1) und (4.2).

Nun betrachten wir insbesondere eine periodische Welle:

$$\underline{F}(u) = \operatorname{Re}\left[\underline{A}\, e^{\frac{i\omega}{c} \cdot u}\right] , \quad \underline{A} = \underline{A}_1 + i \underline{A}_2 ,$$

mit

$$\underline{A} \cdot \underline{n} = 0 , \quad \underline{A}_1, \underline{A}_2 \in \mathbb{R}^3 .$$

Damit ist

$$\boxed{\underline{E}(\underline{x}, t) = \operatorname{Re}\left[\underline{A}\, e^{i(\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega t)}\right]} , \tag{4.7}$$

wobei

$$\boxed{\underline{k} = k\, \underline{n} , \quad k = \omega / c .} \tag{4.8}$$

Es gilt auch

$$\underline{E}(\underline{x},t) = \underline{A}_1 \cos(\underline{k}\cdot\underline{x}-\omega t) - \underline{A}_2 \sin(\underline{k}\cdot\underline{x}-\omega t)\,. \tag{4.9}$$

Nun diskutieren wir $\underline{E}$ für festes $\underline{x}$ als Funktion von t. Bei $\underline{x}=0$ ist

$$\underline{E}(t) = \underline{A}_1 \cos\omega t + \underline{A}_2 \sin\omega t\,. \tag{4.10}$$

a) Lineare Polarisation: $\underline{A}_1 \parallel \underline{A}_2$. In diesem Fall ändert sich nur der Betrag, aber nicht die Richtung von $\underline{E}$.

b) Zirkulare Polarisation: $\underline{A}_1 \perp \underline{A}_2$, $|\underline{A}_1| = |\underline{A}_2|$.
Wählen wir ein Koordinatensystem mit $\underline{A}_1$ in der x-Richtung und $\underline{A}_2$ in der y-Richtung, dann zeigt $\pm\underline{n}$ in der z-Richtung und es ist

$$E_x = A\cos\omega t\,, \quad E_y = A\sin\omega t\,,$$

d.h. $\underline{E}(t)$ beschreibt einen Kreis in der (x,y)-Ebene. Bilden $(\underline{A}_1, \underline{A}_2, \underline{n})$ ein rechtshändiges System, so rotiert $\underline{E}(t)$ in der $(\underline{A}_1, \underline{A}_2)$-Ebene im Gegenuhrzeigersinn. Man sagt dann die Welle sei linkszirkular polarisiert, oder sie habe positive Helizität. Im andern Fall (linkshändiges System) ist die Welle rechtszirkular polarisiert, sie hat negative Helizität.

c) Allgemeiner Fall. Sind $\underline{\varepsilon}_1$ und $\underline{\varepsilon}_2$ Einheitsvektoren derart, dass $\underline{\varepsilon}_1$, $\underline{\varepsilon}_2$ und $\underline{n}$ ein rechtshändiges System bilden, so können wir (4.7) in folgender Form schreiben:

$$\underline{E}(\underline{x},t) = \mathrm{Re}\left[(E_1 \underline{\varepsilon}_1 + E_2 \underline{\varepsilon}_2)\, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{x}-\omega t)} \right] \tag{4.11}$$

$$= \mathrm{Re}\left[(E_+ \underline{\varepsilon}_+ + E_- \underline{\varepsilon}_-)\, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{x}-\omega t)} \right], \tag{4.12}$$

wobei

$$\underline{\varepsilon}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{\varepsilon}_1 \pm i\underline{\varepsilon}_2). \qquad (4.13)$$

Gl. (4.11) drückt den allgemeinen Fall als Superposition von zwei linear polarisierten Wellen aus, deren Polarisationsrichtungen zueinander orthogonal sind. Entsprechend beschreibt (4.12) den allgemeinen Fall als Superposition von links- und rechtszirkular polarisierten Wellen.

Wir zeigen nun, dass $\underline{E}(t)$ im allgemeinen Fall eine <u>Ellipse</u> beschreibt und bestimmen die Richtungen und Grössen der Halbachsen. Nach (4.11) sind die cartesischen Komponenten X, Y von $\underline{E}(t)$:

$$X = \frac{1}{2}(E_1 e^{-i\omega t} + E_1^* e^{i\omega t}),$$
$$Y = \frac{1}{2}(E_2 e^{-i\omega t} + E_2^* e^{i\omega t});$$

d.h.

$$X \pm iY = \frac{1}{2}(E_\pm e^{-i\omega t} + E_\mp^* e^{i\omega t}),$$

wobei

$$E_\pm = E_1 \pm i E_2 .$$

Nun drehen wir das Koordinatensystem: $(X,Y) \longrightarrow (\xi,\eta)$,

$$\xi \pm i\eta = (X \pm iY)e^{\pm i\alpha} = \frac{1}{2}(E'_\pm e^{-i\omega t} + E'^*_\mp e^{i\omega t}),$$

mit

$$E'_\pm = E_\pm e^{\pm i\alpha} .$$

Den Drehwinkel α bestimmen wir so, dass $E'_- / E'_+ =: \rho$ reell und positiv wird, weshalb

$$\underline{E_- / E_+ = \rho\, e^{2i\alpha}} . \qquad (4.14)$$

Dann ist

$$\xi + i\eta = \frac{1}{2}(E'_+ e^{-i\omega t} + \rho\, E'^*_+ e^{i\omega t}),$$
$$\xi - i\eta = \frac{1}{2}(\rho E'_+ e^{-i\omega t} + E'^*_+ e^{-i\omega t}).$$

Sei $E_+' = 2B e^{i\delta}$, $B, \delta \in \mathbb{R}$, $B \geq 0$; dann ist

$$\xi = B(1+\rho)\cos(\omega t - \delta),$$
$$\eta = B(1-\rho)\sin(\omega t - \delta).$$

Daraus folgt

$$\frac{\xi^2}{[B(1+\rho)]^2} + \frac{\eta^2}{[B(1-\rho)]^2} = 1.$$

Also beschreibt $\underline{E}(t)$ eine Ellipse, deren Halbachsen gegenüber $\underline{\varepsilon}_1$, $\underline{\varepsilon}_2$ um α gedreht sind und die Grössen $B(1 \pm \rho) = \frac{|E_+|}{2} \cdot \left(1 \pm \frac{|E_-|}{|E_+|}\right)$ haben.

Resultat: Der Drehwinkel auf die Hauptachsen ist durch (4.14) bestimmt und die Halbachsen haben die Längen

$$\frac{|E_+|}{2}\left(1 \pm \frac{|E_-|}{|E_+|}\right). \tag{4.15}$$

Der Energiefluss für eine ebene Welle ist nach (4.4) und (4.6)

$$\underline{S} = \frac{c}{4\pi}\underline{E} \wedge \underline{B} = \frac{c}{4\pi}|\underline{E}|^2 \underline{n} = \frac{c}{4\pi}|\underline{B}|^2 \underline{n} = \frac{c}{4\pi}|\underline{F}(\underline{n}\cdot\underline{x} - ct)|^2 \underline{n}. \tag{4.16}$$

Die Energiedichte ist

$$u = \frac{1}{4\pi}|\underline{E}|^2 = \frac{1}{4\pi}|\underline{B}|^2. \tag{4.17}$$

Also gilt

$$\underline{S} = c u \underline{n}, \quad \underline{\Pi} = \frac{u}{c}\underline{n}, \tag{4.18}$$

was man intuitiv erwartet.

B. Die Stokes Parameter einer ebenen Welle

Diese spielen in der Optik (und der Astronomie) eine wichtige Rolle.

Man kann diese am elegantesten in folgender Weise einführen. Es sei

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.19}$$

(σ_k: <u>Paulimatrizen</u>, $k=1,2,3$). Ferner definieren wir den zwei-komponentigen Vektor

$$\psi = \begin{pmatrix} \underline{\varepsilon}_+^* \cdot \underline{E} \\ \underline{\varepsilon}_-^* \cdot \underline{E} \end{pmatrix}. \tag{4.20}$$

Die 4 Stokes'schen Parameter sind

$$s_\mu = \psi^* \sigma_\mu \psi \qquad (\mu = 0,1,2,3). \tag{4.21}$$

(Schreibe die rechte Seite explizite aus.). Wir setzen auch

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{s} &= \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^{3} s_\mu \sigma_\mu = (s_{\alpha\beta}) \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} s_0 + s_3 & s_1 - i s_2 \\ s_1 + i s_2 & s_0 - s_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Offensichtlich ist

$$\operatorname{Det} \underset{\sim}{s} = \frac{1}{4}\left(s_0^2 - s_1^2 - s_2^2 - s_3^2\right). \tag{4.23}$$

Andererseits überzeugt man sich leicht von (Übung)

$$s_{\alpha\beta} = \psi_\beta^* \psi_\alpha . \tag{4.24}$$

Demzufolge ist $\operatorname{Det} \underset{\sim}{s} = 0$ und also gilt

$$\boxed{s_0^2 = \sum_{k=1}^{3} s_k^2 .} \tag{4.25}$$

C. Kugelwellen

In Polarkoordinaten (r,ϑ,φ) ist der Laplace-Operator (siehe HMP, Kap. IV)

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r) + \frac{1}{r^2}\Lambda_{\vartheta,\varphi}\,, \tag{4.26}$$

wo $\Lambda_{\vartheta,\varphi}$ ein Differentialoperator auf der 2-Sphäre ist.

Für eine Kugelwelle machen wir den Ansatz $f(r,t)=\frac{1}{r}g(r,t)$. Dann ist

$$(\Delta - \frac{1}{c^2}\partial_t^2)f(r,t) = \frac{1}{r}(\partial_r^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2)g = 0.$$

Die allgemeine Lösung für g ist $g = u(r-ct)+v(r+ct)$. Damit $f=g/r$ für $r=0$ endlich bleibt, muss aber

$$g(0,t) = u(-ct)+v(ct) = 0$$

für alle t gelten. Also ist

$$f(r,t) = \frac{1}{r}\left[u(r-ct) - u(-r-ct)\right] \tag{4.27}$$

die allgemeine (in $r=0$ reguläre) Kugelwelle.

D. Distributionslösung

Im folgenden setze ich Kenntnisse der Distributionstheorie voraus. (Alles Nötige findet man in meinem HMP-Skript, Kap. VI, VII.)

Wir lassen in (4.27) u – als Distribution aufgefasst – gegen die δ-Distribution streben. Dann konvergiert $f(r,t)/4\pi$ gegen die Distributionslösung (Pauli-Jordan-Distribution)

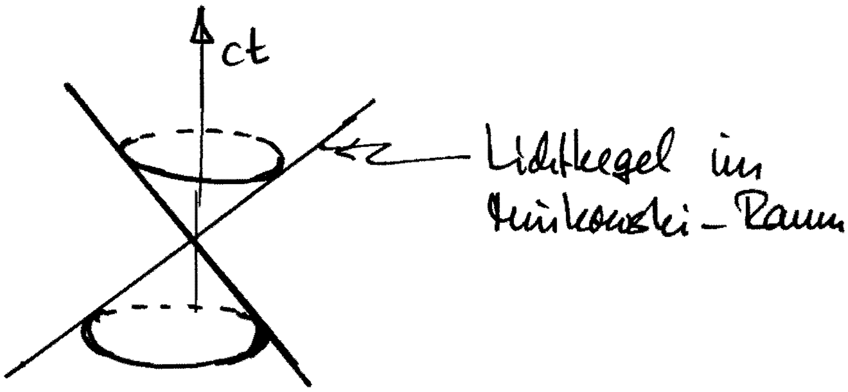
$$D(\underline{x},t) = \frac{1}{4\pi|\underline{x}|}\left[\delta(|\underline{x}|-ct) - \delta(|\underline{x}|+ct)\right] \tag{4.28}$$

der Wellengleichung.

Der Träger der Distribution D ist der Lichtkegel

$$\{ x = (\underline{x}, t) \mid \underline{x}^2 - c^2 t^2 = 0 \}$$

(vgl. Fig.).



Wir diskutieren nun $D(\underline{x}, t)$ für festes $t > 0$ als Distribution in $\underline{x}$. (Dies ist eine Wiederholung von MMP, p. VII.16.) Für jede Testfunktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ gilt (S^2_t = 2-Sphäre mit Radius t):

$$D(f, t) = \frac{1}{4\pi t c} \int_{S^2_{ct}} f(\underline{x})\, d\sigma(\underline{x}) = \frac{ct}{4\pi} \int_{S^2} f(ct\hat{\underline{x}})\, d\Omega_{\hat{\underline{x}}} \tag{4.29}$$

($\hat{\underline{x}} := \underline{x}/|\underline{x}|$). Die rechte Seite ist für $t \geq 0$ bezüglich t beliebig oft differenzierbar. Ferner ergibt sich für $t \downarrow 0$

$$D(\underline{x}, t) \longrightarrow 0 \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3). \tag{4.30}$$

Durch ableiten nach t finden wir (für Präzisierungen siehe MMP, p. VII.15)

$$\frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t}(f, t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{t}{4\pi} \int_{S^2} f(t\hat{\underline{x}})\, d\Omega_{\hat{\underline{x}}} \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} f(t\hat{\underline{x}})\, d\Omega_{\hat{\underline{x}}} + \frac{t}{4\pi} \frac{d}{dt} \int_{S^2} f(t\hat{\underline{x}})\, d\Omega_{\hat{\underline{x}}} \tag{4.31}$$

$$\longrightarrow f(0) = \delta^3(f) \qquad \text{für } t \downarrow 0 .$$

Es gilt also

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}D(\underline{x},t) \longrightarrow \delta^3(\underline{x}) \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3) \,. \qquad (4.32)$$

Da D die Wellengleichung erfüllt, gilt auch

$$\partial_t^2 D(\underline{x},t) \longrightarrow 0 \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3) \,. \qquad (4.33)$$

(Dies kann man auch mit Hilfe von (4.31) bekommen.)

Die Distributionslösung D der Wellengleichung erfüllt also die Anfangsbedingungen

$$D(\underline{x},0) = 0 \,, \quad \frac{1}{c}\partial_t D(\underline{x},0) = \delta^3(\underline{x}) \,. \qquad (4.34)$$

Ebenso ist $\frac{1}{c}\partial_t D$ eine Lösung der Wellengleichung, aber mit den Anfangswerten

$$\frac{1}{c}\partial_t D(\underline{x},0) = \delta^3(\underline{x}) \,, \quad \frac{1}{c^2}\partial_t^2 D(\underline{x},0) = 0 \,. \qquad (4.35)$$

E. Lösung des Cauchy-Problems der Wellengleichung

(Für eine etwas allgemeinere Diskussion, vgl. MMP-Skript, Abschnitt B von § VII.3.)

Gesucht ist eine Funktion $\psi(\underline{x},t)$ welche die Wellengleichung $\Box\psi = 0$ mit den Anfangsbedingungen

$$\left\{ \begin{aligned} &\psi(\underline{x},0) = u(\underline{x}) \,, \\ &\frac{1}{c}\partial_t\psi(\underline{x},0) = v(\underline{x}) \end{aligned} \right. \qquad (4.36)$$

erfüllt. Dabei sind u, v vorgegebene Funktionen von $\underline{x}$, welche zumindest stetig sind.

Aufgrund von (4.34), (4.35) ist die Lösung dieses Problems offensichtlich:

$$\psi = \frac{1}{c}\partial_t D * u + D * v \,, \tag{4.37}$$

wobei D als Distribution über $\mathbb{R}^3$, mit t als Parameter, aufgefasst wird. In dieser Auffassung ist D explizite durch (4.29) gegeben, weshalb

$$(D*v)(\underline{x},t) = D\big(v(\underline{x}-\cdot),t\big) = \frac{1}{c4\pi t}\int_{|\underline{x}-\underline{x}'|=ct} v(\underline{x}')\,d\sigma(\underline{x}') \,,$$

$$\left(\tfrac{1}{c}\partial_t D*u\right)(\underline{x},t) = \frac{1}{c}\partial_t\,\big(D(\underline{x},t)*u(\underline{x})\big) \tag{4.38}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\partial_t\left[\,\frac{1}{t}\int_{|\underline{x}-\underline{x}'|=ct} u(\underline{x}')\,d\sigma(\underline{x}')\,\right]. \tag{4.39}$$

Führen wir also für eine Funktion $h(\underline{x})$ die folgende Operation (sphärische Mittelbildung) ein

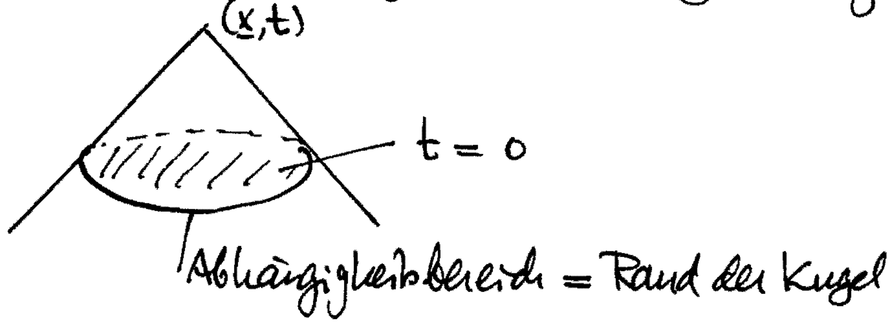
$$M_t(h)(\underline{x},t) := \frac{1}{4\pi}\int_{S^2} h(\underline{x}+ct\,\underline{n})\,d\Omega_{\underline{n}} \,, \tag{4.40}$$

so erhalten wir die Lösung (4.37) des Cauchy-Problems ($t \geq 0$) in der Form

$$\boxed{\psi = ct\,M_t(v) + \frac{1}{c}\partial_t\,[ct\,M_t(u)]\,.} \tag{4.41}$$

Man kann jetzt nachträglich relativ leicht verifizieren, dass (4.41) tatsächlich das Cauchyproblem (4.36) löst (mit gewissen Differenzierbarkeitsannahmen für v, u).

Aus (4.37) sieht man mit der Trägereigenschaft von D, dass ψ im Punkte $\underline{x}$ zur Zeit t nur von den Anfangswerten u und v in den Punkten $\{\underline{x}' \mid (\underline{x}-\underline{x}')^2 = c^2t^2\}$ (Sphäre mit Radius ct) abhängt (vgl. Fig.). Man sagt, die Wellengleichung habe



die huygenssche Eigenschaft. Im Zusammenhang mit der Cerenkov-Strahlung werden wir später sehen, dass dies in 2+1 Dimensionen nicht der Fall ist. Dann klingt zwar der Einfluss einer Störung für $t=0$ in einem beschränkten Gebiet im Punkte $(\underline{x},t)$ ab, aber sie ist noch beliebig lange zu spüren (siehe MMP, § VII.3C). (Dieser Unterschied setzt sich in höheren Dimensionen fort.)

Diese Eigenschaft zeigt, dass c nicht bloss eine Phasengeschwindigkeit, sondern auch die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer allgemeinen Welle ist.

F. Anfangswertproblem des freien elektromagnetischen Feldes

Das System der Feldgl. (4.1), (4.2) hat die folgende Besonderheit. Die Gleichungen (4.1) sind erster Ordnung in der Zeit und bestimmen die zukünftige Entwicklung des elektromagnetischen Feldes für gegebene Anfangsbedingungen $\underline{E}(\underline{x},0)$, $\underline{B}(\underline{x},0)$. Letztere kann man aber nicht beliebig vorgeben, denn diese müssen die "Zwangsgleichungen" (4.2) erfüllen. Wir zeigen nun, dass zu vorgegebenen Anfangsbedingungen, welche (4.2) erfüllen, eine eindeutige Lösung der Maxwell'schen Gl. existiert.

Aus (4.1) folgt für $t=0$

$$\partial_t \underline{E}(\underline{x},0) = c \operatorname{rot} \underline{B}(\underline{x},0)\ ,\quad \partial_t \underline{B}(\underline{x},0) = -c \operatorname{rot} \underline{E}(\underline{x},0)\ .$$

Damit sind nicht nur die Anfangswerte von $\underline{E}$ und $\underline{B}$, sondern auch deren 1. zeitliche Ableitungen zur Anfangszeit bekannt. Da $\underline{E}$ und $\underline{B}$ beide die Wellengleichung erfüllen, sind die elektromagn. Felder gemäss (4.37) auch für $t>0$ bekannt. Wir müssen aber sicher stellen, dass die so bestimmten Felder für alle Zeiten die Zwangbedingungen (4.2) erfüllen und auch die dynamischen Gl. (4.1) erfüllen. Wir zeigen dies hier für $\operatorname{div}\underline{E}=0$; ähnlich verifiziert man auch die anderen Maxwell-Gleichungen (Übung).

Zunächst erfüllt mit $\underline{E}$ natürlich auch $\operatorname{div}\underline{E}$ die Wellengleichung. Neben $\operatorname{div}\underline{E}(\underline{x},0)=0$ haben wir auch

$$(\partial_t \operatorname{div} E)(\underline{x},0) = c \operatorname{div}\operatorname{rot} B(\underline{x},0) = 0\ .$$

Deshalb verschwindet $\operatorname{div}\underline{E}$ für alle Zeiten.

<u>Eindeutigkeit</u>: Der Energiesatz besagt

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^3} (\underline{E}^2+\underline{B}^2)\,dV = 0\ .$$

Zu den Anfangswerten $\underline{E}(\underline{x},0)=0$, $\underline{B}(\underline{x},0)=0$ gibt es also nur die triviale Lösung.

<u>Hinweis</u>: Die Diskussion dieses Abschnittes kann sehr wohl an der Diplomprüfung zur Sprache kommen.

*   *   *

II.5 Integralform des Induktionsgesetzes für bewegte Medien

Zum Schluss dieses Kapitels, das den eigentlichen Grundlagen der ED gewidmet ist, besprechen wir noch eine Integralform des Faraday'schen Induktionsgesetzes, welche etwa in den Anwendungen auf bewegte Leiter nützlich ist. (Siehe, z.B., den Abschnitt III.5C über Unipolarinduktion.)

Es wurde bereits betont, dass das Induktionsgesetz in differentieller Form,

$$\mathrm{rot}\,\underline{E} + \frac{1}{c}\partial_t \underline{B} = 0\,, \tag{5.1}$$

äquivalent ist zum integralen Gesetz

$$\int_{\partial S} \underline{E}\cdot d\underline{s} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_S \underline{B}\cdot d\underline{S} \tag{5.2}$$

für jedes glatte orientierte 2-dim. Flächenstück S mit orientiertem Rand ∂S (siehe § II.1F). Das Linienintegral links in (5.2) ist die elektrische Ringspannung, oder <u>elektromotorische Kraft</u> (EMK).

In (5.2) ist S als <u>ruhendes</u> Flächenstück vorausgesetzt. Wir interessieren uns nun für die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses durch ein <u>bewegtes</u> (zeitabhängiges) Flächenstück S_t. Dazu beweisen wir zunächst den folgenden mathematischen Satz, der auch in der Hydrodynamik (Wirbelsätze) und insbesondere in der Magnetohydrodynamik (s. Kap. VIII) eine wichtige Rolle spielt.

<u>Satz</u>: Es sei $\underline{B}$ ein zeitabhängiges Vektorfeld und S_t ein orientiertes zeitabhängiges glattes Flächenstück, welches sich mit der Strömung (Fluss) zum Geschwindigkeitsfeld $\underline{v}(\underline{x},t)$ mitbewegt. Dann ändert sich der Fluss von $\underline{B}$ durch S_t zeitlich gemäss

$$\frac{d}{dt}\int_{S_t}\underline{B}\cdot d\underline{\sigma} = \int_{S_t}[\partial_t\underline{B} + (\operatorname{div}\underline{B})\underline{v} - \operatorname{rot}(\underline{v}\wedge\underline{B})]\cdot d\underline{\sigma}. \quad (5.3)$$

Bevor wir diesen Satz beweisen, wollen wir ihn zuerst anwenden. Sei jetzt $\underline{B}$ in (5.3) die magnetische Induktion. Dann ergibt sich mit $\operatorname{div}\underline{B}=0$, dem Induktionsgesetz (5.1) und dem Stokes'schen Satz

$$\boxed{-\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_{S_t}\underline{B}\cdot d\underline{\sigma} = \int_{\partial S_t}\underline{E}'\cdot d\underline{s}}\;, \quad (5.4)$$

wobei

$$\underline{E}' := \underline{E} + \frac{1}{c}\underline{v}\wedge\underline{B}\,. \quad (5.5)$$

Gl. (5.4) stellt die Verallgemeinerung von (5.2) auf bewegte Flächenstücke dar. An Stelle von $\underline{E}$ tritt hier das "effektive elektrische Feld" $\underline{E}'$ in (5.5) und man nennt das Linienintegral rechts in (5.4) wieder die EMK des bewegten Weges ∂S_t.

Das Feld $\underline{E}'$ hat die folgende anschauliche Bedeutung. Betrachten wir das momentane Ruhesystem eines infinitesimalen Segments von ∂S_t, dann ist bezüglich diesem das elektrische Feld nach den Transformationsformeln (1.33) bis auf $O(v^2/c^2)$ gerade gleich $\underline{E}'$. In der Praxis von Dynamos, etc. ist deshalb $\underline{E}'$ das elektrische Feld im momentanen Ruhesystem.

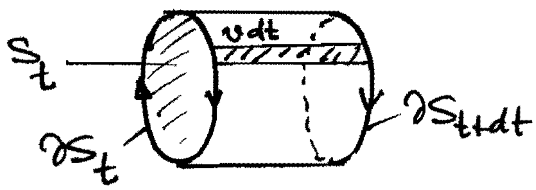
Anwendungen von (5.4) werden wir später besprechen.

Beweis des Satzes*): Ich gebe hier einen "Physikerbeweis" und verweise auf das Zitat in der Fussnote für eine mathematisch korrekte Beweisführung. Wir bilden (Ortsabhängigkeiten werden nicht hingeschrieben):

$$\int_{S_{t+dt}} \underline{B}(t+dt)\cdot d\underline{\sigma} - \int_{S_t} \underline{B}(t)\cdot d\underline{\sigma} = dt \int_{S_t} \partial_t \underline{B}(t)\cdot d\underline{\sigma}$$

$$+ \left(\int_{S_{t+dt}} \underline{B}(t)\cdot d\underline{\sigma} - \int_{S_t} \underline{B}(t)\cdot d\underline{\sigma} \right). \qquad (5.6)$$

Die Kurvenschar $\partial S_{t'}$, $t \leq t' \leq t+dt$, erzeugt einen kleinen "Zylinder" (s. Fig.). Auf diesen wenden wir den Gauss'schen



Satz an:

$$\int_{Zyl.} \operatorname{div} \underline{B}(t)\, dV = \int_{S_{t+dt}} \underline{B}(t)\cdot d\underline{\sigma} - \int_{S_t} \underline{B}(t)\cdot d\underline{\sigma} + \int_{Mantel} \underline{B}(t)\cdot d\underline{\sigma} \qquad (5.7)$$

($d\underline{\sigma}$ bildet mit der Orientierung von ∂S_t eine Rechtsschraube; auf dem Mantel zeigt $d\underline{\sigma}$ nach aussen). Auf dem Mantel ist $d\underline{\sigma} = d\underline{s} \wedge \underline{v}\, dt$, $d\underline{s}$ = Linienelement von ∂S_t, und $\underline{B}\cdot d\underline{\sigma} = dt\, (\underline{v} \wedge \underline{B})\cdot d\underline{s}$. Weiter ist $dV = d\underline{\sigma}_{S_t} \cdot \underline{v}\, dt$. Damit

---

*) Dieser ist ein Spezialfall eines allgemeinen Satzes in der Theorie der Differentialformen. Siehe z.B.: N. Straumann, "General Relativity and Relativistic Astrophysics", Springer-Verlag 1984; speziell § 6.10.1.

erhalten wir aus (5.7) für den 2. Term rechts in (5.6)

$$\left(\int_{S_{t+dt}} - \int_{S_t}\right) \underline{B}(t)\cdot d\underline{\sigma} = dt \int_{S_t} \operatorname{div} \underline{B}\ (\underline{v}\cdot d\underline{\sigma})$$

$$- dt \int_{\partial S_t} (\underline{v}\wedge\underline{B})\cdot \underline{ds}$$

$$= dt \int_{S_t} [(\operatorname{div}\underline{B})\underline{v} - \operatorname{rot}(\underline{v}\wedge\underline{B})]\cdot d\underline{\sigma}\,.$$

Setzen wir dies in (5.6) ein, so ergibt sich die Behauptung (5.3). □

* * *

Faradays Entdeckung des Induktionsgesetzes im Jahre 1831 zeigte erstmals, dass zeitabhängige elektrische und magnetische Felder verknüpft sind. Zu Faradays Experimentierkunst sagte Res Jost in einem Vortrag treffend:

"Faradays empfindlichstes elektromagnetisches Instrument bleibt eine Zeitlang ein an einer einzelnen Seidenfaser aufgehängtes astatisches Nadelpaar, bestehend aus den beiden Hälften einer gebrochenen magnetisierten Stahlnadel, die entgegengesetzt in einen hölzernen Grashalm gesteckt sind. Zum Schutz vor Zugluft wird das ganze in einer Flasche aufgehängt.... Fast zur selben Zeit verwendet Gauss zur absoluten Präzisionsmessung des erdmagnetischen Feldes die Spiegelablesung mit Fernrohr an einer 25 pfündigen Magnetnadel."

* * *

Zum Schluss dieses Kapitels zitiere ich eine Stelle eines Briefes von Faraday vom 13. Nov. 1857 – Faraday war damals 60 jährig – an J. Clerk Maxwell:

There is one thing I would be glad to ask you. When a mathematician engaged in investigating physical actions and results has arrived at his own conclusions, may they not be expressed in common language as fully, clearly, and definitely as in mathematical formulae? If so, would it not be a great boon to such as we to express them so – translating them out of their hieroglyphics that we also might work upon them by experiment. I think it must be so, because I have always found that you could convey to me a perfectly clear idea of your conclusions, which, though they may give me no full understanding of the steps of your process, gave me the results neither above nor below the truth, and so clear in character that I can think and work from them.

X. Maßeinheiten

1. Mechanische Größen

Hier leiten sich sämtliche Größen aus cm, g, s bzw. m, kg, s ab. Die entsprechenden Maßsysteme sind dann das cgs-System und das mks-System, das auch technisches Maßsystem genannt wird.

Die Definition der wichtigsten Größen mit den zugehörigen Einheiten sind in der folgenden Tabelle 1 angegeben.

Tabelle 1. Mechanische Größen im cgs- und mks-System

Größe	Symbol	cgs	Relation 1 cgs = x mks	mks
Länge	l	cm	$= 10^{-2}$ m	m
Masse	m	g	$= 10^{-3}$ kg	kg
Zeit	t	s		s
Kraft	K	dyn: $= \mathrm{g\,cm\,s^{-2}}$	$= 10^{-5}$ Newton (N)	Newton: $= \mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$
Impuls	P	dyn s $= \mathrm{g\,cm\,s^{-1}}$	$= 10^{-5}$ Newton s	Newton s $= \mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$
Arbeit (Energie)	W	erg: $=$ dyn cm $= \mathrm{g\,cm^2 s^{-2}}$	$= 10^{-7}$ Joule (J), Erg	Joule: $=$ Newton m $= \mathrm{kg\,m^2 s^{-2}}$
Leistung	N	erg $\mathrm{s^{-1}} = \mathrm{g\,cm^2 s^{-3}}$	$= 10^{-7}$ Watt (W)	Watt: $=$ Joule $\mathrm{s^{-1}}$ $= \mathrm{kg\,m^2 s^{-3}}$

Definition der Grundeinheiten:

Länge l: $1\,\mathrm{m} = 1{,}650\,763\,73 \cdot 10^6 \lambda(\mathrm{Kr})$
$\lambda(\mathrm{Kr}) = 0{,}605\,780\,2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}$
mit $\lambda(\mathrm{Kr})$ = orange-rote Spektrallinie von Kr_{86}

Masse m: 1 kg = träge Masse von 1 Liter $= 1{,}000\,027 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^3}$ H_2O bei 4 °C

Zeit t: astronomische Definition:
1 tropisches Jahr 1900 $= 3{,}155\,692\,597\,47 \cdot 10^7\,\mathrm{s}$.
Es wird versucht, diese umständliche Definition durch atomare Größen von hoher Konstanz und Periodizität auszumessen und zu einer besser zugänglichen und reproduzierbaren Definition zu kommen.

2. Elektromagnetische Einheiten und Gleichungen

Die neuen Größen der Maxwellgleichungen (3.14) im Vakuum sind die elektrische Ladungsdichte ρ und die Stromdichte j. Die elektromagnetischen Feldgrößen E und B sind dann dadurch bestimmt.

Die Verknüpfung zwischen Stromdichte j und Ladung q wird durch die Kontinuitätsgleichung (2.6) gegeben:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t}\rho = 0\,; \qquad (\mathrm{X.1a})$$

daraus folgt wegen $[\rho] = [q][l]^{-3}$ nach (1.9) die Dimensionsgleichung

$$[j] = [q][t]^{-1}[l]^{-2}\,. \qquad (\mathrm{X.1})$$

Die Definition der Einheiten von Ladung q oder Stromdichte j erfolgt dann über die Kraftwirkungen, die diese Größen bewirken. Diese sind

a) Das Coulomb-Gesetz (1.1),
das die Kraftwirkungen zweier Punktladungen q_1, q_2 im Abstand r_{12} angibt:

$$|K| = k_1 \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

und auf die Dimensionsgleichung

$$[k_1][q]^2 = [K]\,[l]^2 = [m][l]^3[t]^{-2} \qquad (\mathrm{X.2})$$

führt.

b) Das Ampère-Gesetz (2.13) bzw. (2.18),
das die Kraftwirkung zweier Linienströme L_1, L_2 aufeinander festlegt und das in differentiellen, symmetrischer Form lautet

$$|dK| = -k_2 J_1 J_2 \frac{(ds_1 \cdot ds_2)}{r_{12}^2}\,.$$

Wegen der Definition (2.3) mit (X.1) hat die elektrische Stromstärke J die Dimension

$$[J] = [j]\,[l]^2 = [q][t]^{-1}\,, \qquad (\mathrm{X.3})$$

womit dann aus dem Ampère-Gesetz die Dimensionsgleichung

$$[k_2][q]^2 = [K][t]^2 = [m][l] \qquad (\mathrm{X.4})$$

folgt. Der Vergleich der beiden Relationen (X.2) und (X.4) ergibt dann für die beiden Konstanten k_1 und k_2 die Beziehung

$$[k_1][k_2]^{-1} = [l]^2\,[t]^{-2} \equiv [\text{Geschwindigkeit}]^2\,.$$

Der experimentelle Vergleich der entstehenden Kräfte ergibt nach einem Versuch von Weber

$$\frac{k_1}{k_2} = c^2 \qquad (\mathrm{X.5})$$

mit der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit

$$c = 2{,}997\,930 \pm 0{,}000\,003 \cdot 10^{10}\,\mathrm{cm\,s^{-1}} \approx 3 \cdot 10^{10}\,\mathrm{cm\,s^{-1}}\,.$$

3. Abgeleitete Feldgrößen

a) Die elektrische Feldstärke E(r)
wird definitiorisch durch (1.4) gegeben als Kraft pro Einheitsladung, was auf die Dimension

$$[E] = [K][q]^{-1}$$

oder mit (X.2) auf

$$[E] = [k_1][q][l]^{-2} \tag{X.6}$$

führt.

b) Die magnetische Feldstärke $\mathbf{B}(\mathbf{r})$
ist durch (2.16) mit einem allgemeinen Faktor αk_2 statt $1/c$ definiert; in differentieller Form lautet die Gleichung

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \alpha k_2 J \frac{d\mathbf{s}_1 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} \quad , \tag{X.7}$$

woraus sich mit (X.3) die Dimensionsgleichung

$$[B] = [\alpha][k_2][J][l]^{-1} = [\alpha][k_2][q][l]^{-1}[t]^{-1}$$

ergibt. Der Vergleich von (X.6) mit (X.7) führt mit (X.5) auf

$$[E][B]^{-1} = [l][t]^{-1}[\alpha]^{-1} \; . \tag{X.8}$$

Eine weitere Verknüpfungsrelation zwischen $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ wird durch das Faraday-Gesetz (3.4) bestimmt:

$$\nabla \times \mathbf{E} + k_3 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = 0 \, ,$$

woraus man die Dimensionsgleichung

$$[E][B]^{-1} = [k_3][l][t]^{-1} \tag{X.9}$$

erhält. Der Vergleich von (X.8) mit (X.9) führt dann auf die Beziehung für die beiden Konstanten k_3 und α

$$[k_3][\alpha] = 1 \, . \tag{X.10}$$

Damit sind von den Konstanten wegen der Relationen (X.5) und (X.10) nur noch zwei Konstanten frei wählbar, beispielsweise k_1 und k_3.

Mit allen Konstanten lauten die Maxwellgleichungen (3.14) im Vakuum

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= k_1 4\pi\rho \\ \nabla \times \mathbf{B} - \frac{k_2 \alpha}{k_1} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} &= k_2 \alpha 4\pi \mathbf{j} \\ \nabla \times \mathbf{E} + k_3 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \, , \end{aligned} \tag{X.11}$$

woraus sich für $\mathbf{j} = 0$ die Wellengleichung

$$\left[\Delta - \frac{k_3 k_2 \alpha}{k_1} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] \mathbf{B} = 0 \tag{X.12}$$

ergibt. Da sich die elektromagnetischen Felder im Vakuum mit Lichtgeschwindigkeit c fortpflanzen, entsprechend dem Fundamentalexperiment der Relativitätstheorie, folgt aus (X.12)

$$\frac{k_3 k_2 \alpha}{k_1} = c^{-2} \, . \tag{X.13}$$

Dadurch gilt wegen des Ergebnisses (X.5) des Weberschen Experiments die Relation (X.10) sowohl für die Dimensionen als auch für die Beträge.

4. Maßsysteme elektromagnetischer Einheiten

Durch die Wahl der beiden freien Konstanten k_1 und k_3 sowohl dem Betrag als auch der Dimension nach ergeben sich die verschiedenen bekannten Einheitensysteme nach Tabelle 2.

Tabelle 2. Elektromagnetische Maßsysteme und zugehörige Konstanten k_1, k_2, k_3, α, wobei in Klammern die Dimension angegeben ist

System	k_1	k_2	α	k_3
Elektrostatisch (es)	1	$c^{-2}\,[t^2 l^{-2}]$	1	1
Elektromagnetisch (em)	$c^2\,[l^2 t^{-2}]$	1	1	1
Gauß	1	$c^{-2}\,[t^2 l^{-2}]$	$c\,[l\,t^{-1}]$	$c^{-1}\,[t\,l^{-1}]$
Heaviside-Lorentz	$\frac{1}{4\pi}$	$\frac{1}{4\pi c^2}\,[t^2 l^{-2}]$	$c\,[l\,t^{-1}]$	$c^{-1}\,[t\,l^{-1}]$
rational, mks (Giorgi, praktisch)	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 10^{-7} c^2$	$\frac{\mu_0}{4\pi} \equiv 10^{-7}$	1	1
Dimension bei mks	$[m\,l^3 t^{-2} q^{-2}]$	$[m\,l\,q^{-2}]$		

a) cgs-System
Hier werden alle Einheiten auf cgs-Einheiten zurückgeführt, d.h., es wird keine neue elektromagnetische Einheit eingeführt. Solche Systeme sind die ersten vier der Tabelle 2. Im Gauß- und es-System wird dann mit $k_1 = 1$ die elektromagnetische Ladungseinheit

$$1 \text{ Le} = 1 \sqrt{\text{dyn}} \text{ cm} \, , \tag{X.14}$$

d.h., zwei Punktladungen der Ladung 1 Le im Abstand 1 cm üben aufeinander die Kraft 1 dyn aus. Damit ergibt sich nach (X.6) und (X.7) mit (X.5)

$$\begin{aligned} [E] &= [q][l]^{-2} = \sqrt{\text{dyn}}\,\text{cm}^{-1} \\ [B] &= [\alpha][q][l]^{-3}[t] = \sqrt{\text{dyn}}\,\text{cm}^{-1}\,[t]\,\text{cm}^{-1}[\alpha] \, , \end{aligned} \tag{X.15}$$

und speziell im Gauß-System mit $\alpha = c$ folgt die Dimensionsgleichheit von $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$, also $[E] = [B]$.

b) Giorgi-System (praktisches, rationales, mks): $k_2 = 10^{-7}[m\,l\,q^{-2}]$
Hier wird zu den Grundgrößen mks eine neue Grundgröße hinzugenommen: die *Stromstärke*-Einheit Ampère (A).

Die Kraft/Länge zweier unendlicher paralleler Leiter mit Strömen J_1, J_2 im Abstand d ist nach Anhang IXe dann gegeben durch (in Newton/m)

$$\frac{d\,|K_{12}|}{ds} = 2 \cdot 10^{-7}\,\frac{J_1 J_2}{d} \quad . \tag{X.16}$$

Fließt also in beiden Drähten eine Stromstärke von 1 A, dann wirkt bei d = 1 m auf 1 m Länge des Leiters eine Kraft von $2 \cdot 10^{-7}$N(ewton). Dadurch kann die Ampère-Einheit festgelegt werden.

Damit erhält man wegen (X.3) und mit $[\rho] = [q]\,[l]^{-3}$ als Einheiten der Ladung q, Ladungsdichte ρ bzw. der Ladungsstromdichte j

$$\begin{aligned} q:&\quad 1\ \text{Coulomb (Coul)} = 1\ \text{A} \cdot \text{s} \\ \rho:&\quad 1\ \text{Coul/m}^3 = 1\ \text{A} \cdot \text{s/m}^3 \\ j:&\quad 1\ \text{Coul/m}^2\text{s} = 1\ \text{A/m}^2 . \end{aligned} \tag{X.17}$$

Verwendet man noch die neue Einheit der Spannung U,

$$1\ \text{Volt (V)} = 1\ \text{Joule/Coul} = 1\ \text{Watt/A}\ , \tag{X.18}$$

so ergibt sich für die Permeabilitätskonstante des Vakuums

$$\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}\,\text{V s/Am} = 1{,}256\,637 \cdot 10^{-6}\,\text{V s/Am}\ . \tag{X.19}$$

Aus $\mu_0 = 4\pi k_2 = 4\pi\,10^{-7}[m\,l\,q^{-2}]$ zusammen mit Tabelle 2 wegen

$$\epsilon_0\,\mu_0 = c^{-2} \tag{X.20}$$

nach (X.5) folgt weiter

$$\epsilon_0 = 10^7/4\pi c^2\ \text{As/Vm} = 8{,}854\,185 \cdot 10^{-12}\,\text{As/Vm} \tag{X.21}$$

als Dielektrizitätskonstante des Vakuums.

c) Zusammenhang der Ladungsdefinitionen
Wegen (X.2) und $k_1 = 1/4\pi\epsilon_0$ folgt $\epsilon_0 = 1/4\pi\ \text{Le}^2\text{erg}^{-1}\text{cm}^{-1}$. Benutzt man die Definition $\epsilon_0 = 1/4\pi\ c^{-2}\ 10^7\ [q^2 t^2 m^{-1} l^{-3}]$ in den mks-Einheiten, so ergibt sich

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi\,10^2 c^2}\,\frac{\text{Coul}^2}{\text{erg cm}} = \frac{1}{4\pi}\,\frac{\text{Le}^2}{\text{erg cm}}$$

und damit

$$\begin{aligned} 1\ \text{Le} &= 10\ c^{-1}\text{Coul} = 3{,}335\,64 \cdot 10^{-10}\text{Coul} \\ 1\ \text{Coul} &= c\ 10^{-1}\text{Le} = 2{,}997\,925 \cdot 10^9\,\text{Le}\ . \end{aligned} \tag{X.22}$$

Bei diesen Umformungen bedeutet c den Zahlenwert der Vakuumlichtgeschwindigkeit in cm s^{-1} ohne Dimension. In diesem Sinn ist (X.22) eine Zahlen- und keine Größengleichung.

d) Phänomenologische Größen **D** *und* **H**
Bis jetzt wurden nur die elektrodynamischen Größen im Vakuum besprochen, so daß infolgedessen nur **E** und **B** aufgetreten sind. Wir müssen also noch die makroskopischen Feldgrößen **D** und **H** behandeln. Da die gemittelten elektromagnetischen Eigenschaften der Materie durch die makroskopische Polarisation **P** und die Magnetisierung **M** beschrieben werden, lauten die allgemeinen Definitionsgleichungen für **D** und **H** nach (13.55), (14.69)

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon_0\,\mathbf{E} + \alpha\mathbf{P} \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_0}\,\mathbf{B} - \alpha'\mathbf{M}\ , \end{aligned} \tag{X.23}$$

wobei $\epsilon_0, \mu_0, \alpha, \alpha'$ Proportionalitätskonstanten sind. Da **D** und **P** sowie **H** und **M** entsprechende makroskopische Größen sind, gibt man ihnen sinnvollerweise dieselben Dimensionen. Dann sind α und α' dimensionslose Zahlen, wobei

$\alpha = \alpha' = 1$ im Giorgi-(mks)-System
$\alpha = \alpha' = 4\pi$ im Gauß-(cgs)-System bzw. den ersten drei Systemen der Tabelle 2

ist. Da bei dem Giorgi-System nirgends die Zahl 4π auftaucht, nennt man dieses System auch rationales System, während die anderen mit 4π als irrationale Systeme bezeichnet werden. Jedoch können **D** und **P** eine andere Dimension als **E** besitzen, und ebenso kann sich die Dimension von **H** und **M** von der für **B** unterscheiden. Die Wahl von ϵ_0 und μ_0 ist rein historisch bedingt, um den phänomenologischen Definitionsgleichungen (X.23) für den entsprechenden Gebrauch eine günstige Form zu verleihen. Bevor die verschiedenen ϵ_0 und μ_0 in Tabelle 3 angegeben werden, ist zu bemerken, daß für lineare, isotrope Medien stets die lokalen Polarisationsgesetze (13.58), (14.75)

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon\,\mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu\,\mathbf{H} \end{aligned} \tag{X.24}$$

gelten. Durch Vergleich mit (X.23) folgt, daß ϵ_0 und μ_0 die Vakuumwerte von ϵ und μ sind. Die sogenannte relative Dielektrizitätskonstante ϵ_r und Permeabilitätskonstante μ_r sind dann als dimensionslose Verhältniszahlen

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \epsilon/\epsilon_0 \\ \mu_r &= \mu/\mu_0 \end{aligned} \tag{X.25}$$

definiert. Diese Größen kennzeichnen damit das lineare Verhalten des Materials.

In Tabelle 3 sind nun die Werte von ϵ_0 und μ_0, die definierenden Gleichungen (X.23) für **D** und **H** sowie die makroskopischen Maxwellgleichungen und die Lorentzkraft für die gebräuchlichen in Tabelle 2 angegebenen Einheitensysteme aufgeführt. Dabei gilt für jedes Einheitensystem die Kontinuitätsgleichung (X.1a), wie man aus den inhomogenen Maxwellgleichungen der Tabelle 3 sieht. Entsprechend gilt in allen Einheitensystemen das Ohmsche Gesetz

$$\mathbf{j} = \sigma\,\mathbf{E}\ . \tag{X.26}$$

Tabelle 4. Umformungstabelle von Symbolen in den Gleichungen zwischen Gauß- und Giorgi(mks)-System.

Die mechanischen Größen nach Tabelle 1 bleiben unverändert. Um eine Gleichung in Gauß-Einheiten in die entsprechende Gleichung in Giorgi(mks)-Einheiten umzuwandeln, sind die zutreffenden Symbole aus Spalte 2 durch die entsprechenden aus Spalte 3 zu ersetzen; genauso ist bei einer umgekehrten Transformation der Einheiten zu verfahren. Größen, die sich nur um mechanische Einheiten unterscheiden wie Länge und Zeit, sind in Gruppen zusammengefaßt.

Größe	Gauß	Giorgi (mks)
Lichtgeschwindigkeit	c	$(\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2}$
Elektrische Feldstärke, Potential, Spannung	E, φ, U	$\sqrt{4\pi\epsilon_0}\,(E, \varphi, U)$
Elektrische Verschiebung	D	$\sqrt{\frac{4\pi}{\epsilon_0}}\,D$
Ladungsdichte, Ladung, Stromdichte, Stromstärke, Polarisation	ρ, q, j, J, P	$\frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}(\rho, q, j, J, P)$
Magnetische Induktion	B	$\sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}}\,B$
Magnetische Feldstärke	H	$\sqrt{4\pi\mu_0}\,H$
Magnetisierung	M	$\sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}}\,M$
Leitfähigkeit	σ	$\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}$
Dielektrizitätskonstante	ϵ	$\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$
Permeabilitätskonstante	μ	$\frac{\mu}{\mu_0}$
Widerstand, Wechselstromwiderstand (Impedanz)	R, Z	$4\pi\epsilon_0\,(R, Z)$
Induktivität	L	$4\pi\epsilon_0\,L$
Kapazität	C	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,C$

Tabelle 5. Zusammenhang von Giorgi-Einheiten (mks) mit Gauß-Einheiten (cgs)

Physikalische Größe	Symbol	Giorgi (mks)-Einheiten =	Umrechnungs-Faktor ×	Gauß (cgs)-Einheiten
Ladung	q	$Coul = A \cdot s$	$3 \cdot 10^{9}$	$Le = \sqrt{dyn} \cdot cm$
Ladungsdichte	ρ	$Coul \cdot m^{-3}$	$3 \cdot 10^{3}$	$Le \cdot cm^{-3}$
Stromstärke	J	A	$3 \cdot 10^{9}$	$Le\, s^{-1}$
Stromdichte	j	$A\, m^{-2}$	$3 \cdot 10^{5}$	$Le\, s^{-1} cm^{-2}$
Elektrische Feldstärke	E	$V\, m^{-1}$	$\frac{1}{3} \cdot 10^{-4}$	$dyn\, Le^{-1} = G$
Potential/Spannung	φ, U	$V = Joule\, Coul^{-1}$	$\frac{1}{3} \cdot 10^{-2}$	$erg\, Le^{-1}$
Polarisation	P	$Coul\, m^{-2}$	$3 \cdot 10^{5}$	$Le\, cm^{-2}$
Elektrische Verschiebung	D	$Coul\, m^{-2}$	$12\pi \cdot 10^{5}$	$Le\, cm^{-2}$
Widerstand	R	$Ohm\, (\Omega) = V\, A^{-1}$	$\frac{1}{9} \cdot 10^{-11}$	$erg \cdot s\, Le^{-2} = s\, cm^{-1}$
Leitfähigkeit	σ	$\Omega^{-1} m^{-1}$	$9 \cdot 10^{9}$	$Le^{2} erg^{-1} s^{-1} cm^{-1} = s^{-}$
Kapazität	C	$Farad\, (F) = A\, s\, V^{-1}$	$9 \cdot 10^{11}$	$Le^{2} erg^{-1} = cm$
Magn. Fluß	ϕm	$Weber = V\, s$	10^{8}	$Maxwell = Gauß\, cm^{2}$
Magn. Induktion	B	$Weber\, m^{-2}$	10^{4}	$Gauß\, (G) = dyn\, Le^{-1} = \sqrt{dyn}\, cm^{-}$
Magn. Feldstärke	H	$A\, m^{-1}$	$4\pi \cdot 10^{-3}$	$Oersted\, (Oe) = Le\, cm^{-} = \sqrt{dyn}\, cm^{-1}$
Magnetisierung	M	$A\, m^{-1}$	$\frac{1}{4\pi} \cdot 10^{-3}$	Oe
Induktivität	L	$Henry = V\, s\, A^{-1}$	$\frac{1}{9} \cdot 10^{-11}$	$erg\, s^{2}\, Le^{-2} = s^{2}\, cm^{-1}$