III. Stationäre Felder

Für stationäre Situationen vereinfachen sich die Grundgleichungen ganz wesentlich, da nach Voraussetzung alle Zeitableitungen wegfallen. Elektrische und magnetische Felder entkoppeln sich dann weitgehend und es liegt meistens entweder eine elektrostatische oder eine magnetostatische Aufgabenstellung vor. Dies ist aber nicht immer der Fall, wie wir etwa bei der Erscheinung der Unipolarinduktion sehen werden. Beispielsweise erzeugt eine rotierende leitende magnetisierte Kugel auch ein elektrisches Feld.

III.1 Grundgleichungen

Für stationäre Felder reduzieren sich die Maxwellschen Gl. (II.1.26, 27) auf die folgenden beiden Paare, die nur das elektrische oder das magnetische Feld enthalten:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{E} = 4\pi\rho \quad , \qquad \underline{\nabla} \wedge \underline{E} = 0 \quad , \tag{1.1}$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{B} = 0 \quad , \qquad \underline{\nabla} \wedge \underline{B} = \frac{4\pi}{c} \underline{J} \; . \tag{1.2}$$

Aus der Kontinuitätsgleichung wird

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{J} = 0 \quad , \tag{1.3}$$

welche natürlich aus der 2. Gleichung in (1.2) folgt.

Eine allfällige Kopplung zwischen elektrischen und magnetischen Feldern kann dadurch zustande kommen, dass die Stromdichte $\underline{J}$ von $\underline{E}$ und $\underline{B}$ abhängt. (Siehe dazu § III. 5.)

Wir sprechen von einer statischen Situation, wenn auch keine Ströme fliessen. Dann gibt es – von homogenen

Magnetfeldern abgesehen – nur noch elektrische Felder und elektrische Ladungsverteilungen, d.h. wir landen bei der Elektrostatik welche uns in Kap. I hinreichend bekannt geworden ist.

Die Kraftdichte auf Ladungen und Ströme ist nach (II.3.5)

$$\underline{k} = \rho \underline{E} + \frac{1}{c} \underline{J} \wedge \underline{B} \qquad (1.4)$$

Von § II.3 wissen wir, dass sich diese als Divergenz der Maxwell'schen Spannungen darstellen lässt (siehe p. II.30):

$$k_i = -\partial_k T_{ik} \; , \qquad (1.5)$$

$$T_{ik} = -\frac{1}{4\pi}\left[E_i E_k + B_i B_k - \frac{1}{2}\delta_{ik}(\underline{E}^2 + \underline{B}^2)\right] . \qquad (1.6)$$

III.2 Magnetostatik

Wir studieren nun magnetostatische Probleme und schreiben die zugehörigen Grundgleichungen (1.2) nochmals auf:

$$\operatorname{div} \underline{B} = 0 \quad , \qquad \operatorname{rot} \underline{B} = \frac{4\pi}{c} \underline{J} . \qquad (2.1)$$

Die dazu äquivalenten integralen Gesetze lauten nach (II.1.42) und (II.1.45)

$$\int_S \underline{B} \cdot d\underline{s} = 0 \quad \text{für alle geschlossenen orientierten Flächen } S \qquad (2.3)$$

$$\int_{\partial S} \underline{B} \cdot d\underline{s} = \frac{4\pi}{c} I(S) \; , \qquad (2.3)$$

wo

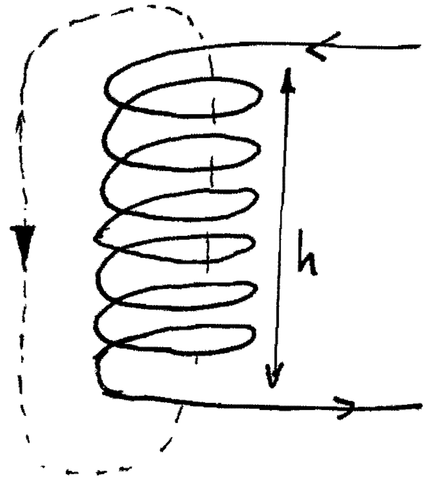
$$I(S) = \int_S \underline{J} \cdot d\underline{s} \qquad (2.4)$$

den Strom durch das orientierte Flächenstück S mit orientiertem Rand ∂S bezeichnet. Gl. (2.3) ist das Ampère'sche Gesetz, dessen Nützlichkeit wir gleich an einem Beispiel illustrieren.

<u>Das Feld einer Magnetspule</u>. Der Abstand zwischen den einzelnen Windungen sei klein gegen den Spulendurchmesser und die Spulenlänge h. In diesem Fall ist das $\underline{B}$-Feld im Inneren praktisch homogen und verschwindet aussen. Für den gestrichelten Integrationsweg in der Fig. gilt dann

$$\int \underline{J}\cdot\underline{n}\, d\sigma = N I,$$

$$\oint \underline{B}\cdot\underline{ds} = h\cdot B.$$



Dabei ist I die Stromstärke im Draht und N ist die Zahl der Windungen. Aus (2.3) ergibt sich deshalb

$$B = \frac{4\pi N}{h}\,\frac{I}{c}. \qquad (2.5)$$

Dieses Resultat lässt sich natürlich auch durch Integration der Grundgl. (2.1) (s. den nächsten Abschnitt) gewinnen, aber die hier verwendete Methode führt viel rascher zum Ziel.

2.1 <u>Integration der Grundgleichungen für eine gegebene Stromverteilung</u>

Aus $\operatorname{div}\underline{B} = 0$ in $\mathbb{R}^3$ folgt nach dem Lemma von Poincaré, dass ein Vektorfeld $\underline{A}$ existiert, so dass

$$\underline{B} = \operatorname{rot}\underline{A}. \qquad (2.6)$$

(Dies ergibt sich natürlich auch als Spezialfall von (II.1.28).)
Das Vektorpotential $\underline{A}$ können wir noch umeichen

$$\underline{A} \to \underline{A} + \operatorname{grad}\Lambda \quad , \quad \Lambda\in C^2(\mathbb{R}^3). \qquad (2.7)$$

Dabei ändert sich die Divergenz von $\underline{A}$ gemäss

$$\operatorname{div} \underline{A} \to \operatorname{div} \underline{A} + \Delta \Lambda .$$

Wir können offensichtlich erreichen, dass $\operatorname{div} \underline{A}$ einen vorgeschriebenen Wert hat (nach eventueller Lösung der Poisson-Gl.).

Setzen wir (2.6) in die inhomogene Gl. von (2.1) ein, so ergibt sich

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \underline{A}) = \frac{4\pi}{c} \underline{J} , \tag{2.8}$$

oder

$$\operatorname{grad}\operatorname{div} \underline{A} - \Delta \underline{A} = \frac{4\pi}{c} \underline{J} . \tag{2.9}$$

Nun wählen wir die <u>Coulomb-Eichung</u>

$$\operatorname{div} \underline{A} = 0 . \tag{2.10}$$

In dieser gilt

$$\boxed{\Delta \underline{A} = -\frac{4\pi}{c} \underline{J} .} \tag{2.11}$$

Die einzige, im Unendlichen verschwindende Lösung ist

$$\underline{A}(\underline{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\underline{J}(\underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|} d^3x' . \tag{2.12}$$

Durch Rotationsbildung ergibt sich daraus

$$\underline{B}(\underline{x}) = \frac{1}{c} \int \underline{J}(\underline{x}') \wedge \frac{\underline{x} - \underline{x}'}{|\underline{x} - \underline{x}'|^3} d^3x' . \tag{2.13}$$

2.2 B-Feld in grossen Abständen

Wir interessieren uns jetzt – bei gegebener Stromverteilung – für das zugehörige $\underline{B}$-Feld in grossen Abständen, verglichen zur Dimension des Stromsystems. Von einer systematischen

Multipolentwicklung, wie in der Elektrostatik, wollen wir hier absehen. Wir beschränken uns auf die zwei tiefsten Terme der Entwicklung.

Mit Hilfe von

$$\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|} = \frac{1}{|\underline{x}|} + \frac{\underline{x}\cdot\underline{x}'}{|\underline{x}|^3} + \dots \qquad (2.14)$$

folgt aus (2.12)

$$A_i(\underline{x}) = \frac{1}{c|\underline{x}|} \int J_i(\underline{x}')\, d^3x' + \frac{\underline{x}}{c|\underline{x}|^3} \cdot \int J_i(\underline{x}')\, \underline{x}'\, d^3x' + \dots . \qquad (2.15)$$

Der erste Term in (2.15) (Monopol) verschwindet für eine stationäre Stromverteilung, denn aus

$$\underline{\nabla}\cdot(x_i \underline{J}) = \partial_k (x_i J_k) = J_i + x_i \underbrace{\underline{\nabla}\cdot\underline{J}}_{0}$$

folgt durch Integration mit dem Gauss'schen Satz

$$\int J_i\, d^3x = \int \underline{\nabla}\cdot(x_i \underline{J})\, d^3x = 0. \qquad (2.16)$$

Um den 2. Term in (2.15) umzuformen, benutzen wir die Beziehung

$$\partial_k (x_i x_j J_k) = x_j J_i + x_i J_j + \underbrace{\partial_k J_k}_{0}\, x_i x_j \quad ,$$

welche

$$\int (x_i J_j + x_i J_j)\, dV = 0 \qquad (2.17)$$

impliziert. Multiplizieren wir die letzte Gl. mit einem ortsunabhängigen Vektor a_i, so ergibt sich

$$\int \left[(\underline{a}\cdot\underline{x}')\, \underline{J}(\underline{x}') + \underline{x}' (\underline{a}\cdot\underline{J}(\underline{x}')) \right] d^3x' = 0 . \qquad (2.18)$$

Da aber

$$\underline{a}\wedge(\underline{x}'\wedge\underline{J}) = \underline{x}'(\underline{a}\cdot\underline{J}) - (\underline{a},\underline{x}')\,\underline{J}\;,$$

können wir (2.18) auch so schreiben:

$$\int (\underline{a}\cdot\underline{x}')\,\underline{J}(\underline{x}')\,d^3x' = -\frac{1}{2}\int \underline{a}\wedge(\underline{x}'\wedge\underline{J}(\underline{x}'))\,d^3x' . \qquad (2.19)$$

Speziell für $\underline{a}=\underline{x}$ führt diese Gleichung zu folgenden Umformung von (2.15)

$$\underline{A}(\underline{x}) = -\frac{1}{2c}\,\frac{1}{|\underline{x}|^3}\int \underline{x}\wedge(\underline{x}'\wedge\underline{J}(\underline{x}'))\,d^3x' + \cdots \quad . \qquad (2.20)$$

Wir nennen

$$\boxed{\underline{\mu} = \frac{1}{2c}\int \underline{x}\wedge\underline{J}(\underline{x})\,d^3x} \qquad (2.21)$$

das <u>magnetische Moment</u> der Stromverteilung. Gl. (2.20) lautet

$$\underline{A}(\underline{x}) = \frac{\underline{\mu}\wedge\underline{x}}{|\underline{x}|^3} + \cdots \quad , \qquad (2.22)$$

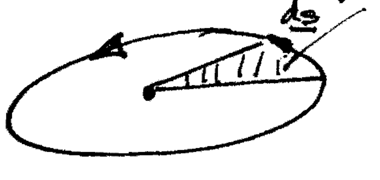
mit dem zugehörigen $\underline{B}$-Feld

$$\boxed{\underline{B}(\underline{x}) = \operatorname{rot}\underline{A}(\underline{x})} = \frac{3\hat{\underline{x}}(\hat{\underline{x}}\cdot\underline{\mu}) - \underline{\mu}}{|\underline{x}|^3} + \cdots \quad . \qquad (2.23)$$

Der ausgeschriebene Term ist ein <u>magnetisches Dipolfeld</u>. (Vergleiche dies mit (I.9.14).)

<u>Beispiele</u>.

<u>a) geschlossener ebener linearer Leiter</u>: Dafür ist das magnetische Moment



$$\underline{\mu} = \frac{I}{2c}\int \underline{x}\wedge d\underline{s} \;.$$

$\underline{\mu}$ steht senkrecht auf der Ebene des Stromes. Da ferner $\frac{1}{2}|\underline{x}\wedge d\underline{s}| = d\sigma$ (Flächenelement), ist der Betrag von $\underline{\mu}$

$$|\underline{\mu}| = \frac{I}{c}\, F \qquad (2.24)$$

F Fläche, welche den Leiter umschliesst.

<u>b) magnetisches Moment einer translatorisch bewegten kleinen Ladung</u>

Ein Kügelchen mit der Ladungsverteilung ρ_0 relativ zum Schwerpunkt bewege sich längs des Weges $\underline{z}(t)$. Dieses habe keinen inneren Drehimpuls (Spin). Die zeitabhängige Ladungsverteilung ist dann

$$\rho(\underline{x},t) = \rho_0(\underline{x}-\underline{z}(t)) \qquad (2.25)$$

und die Stromdichte ist

$$\underline{J}(\underline{x},t) = \rho(\underline{x},t)\,\dot{\underline{z}} = \rho_0(\underline{x}-\underline{z}(t))\,\underline{v}\,, \quad \underline{v} = \dot{\underline{z}}\,. \qquad (2.26)$$

Das magnetische Moment (2.21) ist deshalb für ein sehr kleines Kügelchen

$$\underline{\mu} = \frac{1}{2c}\int \rho_0(\underline{x}-\underline{z}(t))\,\underline{x}\wedge\underline{v}\,d^3x \simeq \frac{1}{2c}\,\underline{x}\wedge\underline{v}\underbrace{\int \rho_0(\underline{x}-\underline{z}(t))\,d^3x}_{e},$$

d.h.

$$\boxed{\underline{\mu} = \frac{e}{2mc}\,\underline{L}}\,, \qquad (2.27)$$

wobei e die Ladung, m die Masse und $\underline{L} = m\,\underline{x}\wedge\underline{v}$ der Bahndrehimpuls des Kügelchens ist. (Man sagt auch, der g-Faktor sei gleich 1.)

<u>2.3 Kräfte von Magnetfeldern auf Ströme</u>

Nach (1.4) ist die Gesamtkraft auf eine Stromverteilung

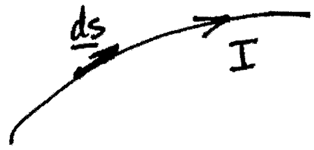
$$\underline{K} = \frac{1}{c}\int \underline{J}(\underline{x})\wedge \underline{B}(\underline{x})\,d^3x, \qquad (2.28)$$

wobei $\underline{B}$ das äussere Magnetfeld ist. Dazu gehört das Drehmoment

$$\underline{N} = \frac{1}{c}\int \underline{x}\wedge\left(\underline{J}(\underline{x})\wedge\underline{B}(\underline{x})\right) d^3x. \tag{2.29}$$

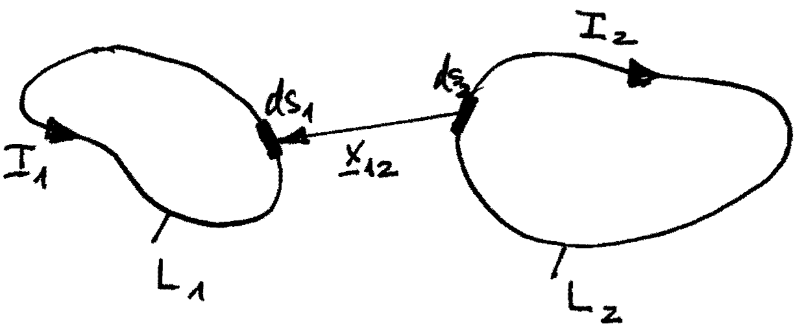
Für einen linearen Strom I erfährt das Leiterelement $\underline{ds}$ die Kraft (wie man durch einen Grenzübergang aus (2.28) sieht):

$$d\underline{K} = \frac{I}{c}\,\underline{ds}\wedge\underline{B}. \tag{2.30}$$



Beispiele.

a) Kraft zwischen zwei geschlossenen linearen Leitern



Die Kraft, die der Leiter L_2 auf den Leiter L_1 ausübt, ist nach (2.30)

$$\underline{K}_{12} = \frac{1}{c} I_1 \oint_{L_1} \underline{ds}_1\wedge\underline{B}_2 ,$$

wenn $\underline{B}_2$ das Feld ist, das vom Leiter L_2 erzeugt wird. Dieses ist nach (2.13) – im Grenzfall linearer Leiter – (s. Fig.):

$$\underline{B}_2 = \frac{1}{c} I_2 \oint_{L_2} \frac{\underline{ds}_2\wedge\underline{x}_{12}}{|\underline{x}_{12}|^3}.$$

Also haben wir

$$\underline{K}_{12} = \frac{1}{c^2} I_1 I_2 \oint_{L_1}\oint_{L_2} \frac{\underline{ds}_1\wedge(\underline{ds}_2\wedge\underline{x}_{12})}{|\underline{x}_{12}|^3}. \tag{2.31}$$

Dies können wir noch etwas symmetrischer schreiben: Wegen

$$\underline{ds}_1\wedge(\underline{ds}_2\wedge\underline{x}_{12}) = -(\underline{ds}_1\cdot\underline{ds}_2)\,\underline{x}_{12} + \underline{ds}_2\,(\underline{ds}_1\cdot\underline{x}_{12})$$

und

$$\oint_{L_1} \frac{d\underline{s}_1 \cdot \underline{x}_{12}}{|\underline{x}_{12}|^3} = \oint d\underline{s}_1 \cdot \underline{\nabla}_1 \left(\frac{1}{|\underline{x}_{12}|} \right) = 0$$

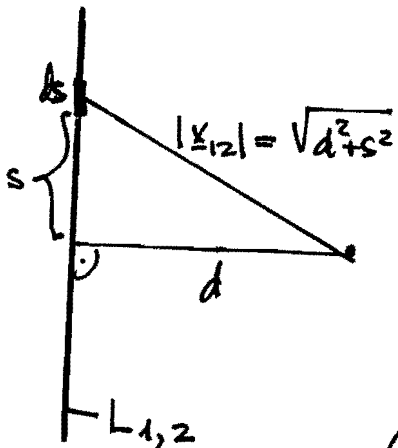
gilt auch

$$\underline{K}_{12} = -\frac{1}{c^2} I_1 I_2 \oint_{L_1} \oint_{L_2} (d\underline{s}_1 \cdot d\underline{s}_2) \frac{\underline{x}_{12}}{|\underline{x}_{12}|^3} . \qquad (2.32)$$

In dieser Form sieht man die Gültigkeit von "actio = reactio". Speziell für zwei lange parallele und gerade Drähte im Abstand d erhält man eine Kraft pro Längeneinheit vom Betrag (s. Fig.):

$$K = \frac{1}{c^2} I_1 I_2 \int_{L_{1,2}} ds \frac{d}{|\underline{x}_{12}|^3}$$

$$= \frac{1}{c^2} I_1 I_2 \int_{-\infty}^{+\infty} ds \frac{d}{(d^2+s^2)^{3/2}} ,$$



d.h.

$$K = \frac{2 I_1 I_2}{c^2 d} . \qquad (2.33)$$

Die Kraft ist attraktiv (repulsiv) falls die Ströme in gleicher (entgegengesetzter) Richtung fliessen.

b) Kraft auf eine translatorisch bewegte kleine Ladung

Diese ist uns schon aus Kap. II bekannt. Wir können sie aber auch wieder aus (2.28) gewinnen. Mit den Bezeichnungen von Beispiel b) auf S. III.7 ist

$$\underline{K} = \frac{1}{c} \int \rho_0(\underline{x} - \underline{z}(t)) \, \underline{v} \wedge \underline{B} \, d^3x \simeq \frac{1}{c} \underline{v}(t) \wedge \underline{B}(\underline{z}(t)) \underbrace{\int \rho_0(\underline{\xi}) d^3\xi}_{e} .$$

Dabei haben wir angenommen, dass die Dimension der Kugel sehr klein ist, verglichen mit den Längen, auf denen das $\underline{B}$-Feld wesentlich variiert. Wir finden also wieder die Lorentzkraft

$$\underline{K} = \frac{e}{c} \underline{v} \wedge \underline{B} . \qquad (2.34)$$

c) Kraft und Drehmoment auf lokalisierte Stromverteilung

Wir betrachten nun die Kraft und das Drehmoment auf eine beliebige lokalisierte Stromverteilung. Die Ausdehnung der Stromverteilung sei so klein, dass das äussere $\underline{B}$-Feld darin nur wenig variiert. Dann können wir nach Taylor entwickeln (der Nullpunkt liege in der Stromverteilung):

$$B_i(\underline{x}) = B_i(\underline{0}) + (\underline{x}\cdot\underline{\nabla}) B_i(0) + \cdots \quad . \qquad (2.35)$$

Aus (2.28) folgt mit (2.16)

$$\underline{K} = -\frac{1}{c}\underline{B}(0)\wedge \underbrace{\int \underline{J}(\underline{x})\, d^3x}_{0\ (2.16)} + \frac{1}{c}\int \underline{J}(\underline{x}')\wedge\left[(\underline{x}'\cdot\underline{\nabla})\underline{B}(0)\right] d^3x' + \cdots . \qquad (2.36)$$

Die $i$te Komponente des Integranden im 2. Term rechts ist $\varepsilon_{ijk} J_j(\underline{x}') x'_\ell\, \partial_\ell B_k(0)$. Die Quellen des äusseren Feldes sind "weit weg"; deshalb ist $\mathrm{rot}\, \underline{B}(\underline{0}) = 0$, d.h. $\partial_\ell B_k = \partial_k B_\ell$. Damit ist der betrachtete Ausdruck gleich (∂_k wirkt nur auf $\underline{B}$):

$$\partial_k \varepsilon_{ijk} J_j(\underline{x}') x'_\ell B_\ell = -\left\{\underline{\nabla}\wedge\left[\underline{J}(\underline{x}')(\underline{x}'\cdot\underline{B})\right]\right\}_i ,$$

d.h.

$$\underline{K} = -\frac{1}{c}\underline{\nabla}\wedge\int \underline{J}(\underline{x}')(\underline{x}'\cdot\underline{B})\, d^3x' + \cdots . \qquad (2.37)$$

Setzen wir in (2.19) $\underline{a}$ gleich $\underline{B}$, so können wir (2.37) wie folgt umschreiben

$$\underline{K} = \mathrm{rot}\, \frac{1}{2c}\int \underline{B}(0)\wedge(\underline{x}'\wedge\underline{J}(\underline{x}'))\, d^3x' + \cdots$$

oder, mit dem magnetischen Moment (2.21)

$$\underline{K} = \mathrm{rot}\,(\underline{B}\wedge\underline{\mu}) + \cdots ,$$

d.h. $K_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j \varepsilon_{kmn} B_m \mu_n = (\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm})\partial_j B_m \mu_n =$

$$= \partial_j B_i \mu_j - \mu_i \underbrace{\partial_j B_j}_{0} = \mu_j \partial_j B_i = \mu_j \partial_i B_j = \partial_i (\underline{\mu} \cdot \underline{B}) .$$

Damit erhalten wir endgültig (bis auf höhere Ordnungen)

$$\underline{K} = -\underline{\nabla} U \quad , \quad U = -\underline{\mu} \cdot \underline{B} . \tag{2.38}$$

Das Drehmoment $\underline{N}$ erhalten wir durch einsetzen von (2.35) in (2.29)

$$\underline{N} = \frac{1}{c} \int \underbrace{\underline{x}' \wedge (\underline{J}(\underline{x}') \wedge \underline{B}(0))}_{(\underline{x}' \cdot \underline{B}) \underline{J}(\underline{x}') - (\underline{x}' \cdot \underline{J}(\underline{x}')) \underline{B}} d^3x' + \dots \quad .$$

(Da hier der erste Term von (2.35) einen nichtverschwindenden Beitrag gibt, lassen wir die höheren Terme weg.) Das erste Integral ist dasselbe wie in (2.37), also gleich $\underline{\mu} \wedge \underline{B}$. Das zweite Integral verschwindet für einen stationären Strom, was sich aus der folgenden Identität ergibt:

$$\underline{\nabla} \cdot (\underline{x}^2 \underline{J}) = \partial_k (x_\ell x_\ell J_k) = 2(\underline{x} \cdot \underline{J}) + \underline{x}^2 \underbrace{\underline{\nabla} \cdot \underline{J}}_{0} .$$

Damit erhalten wir

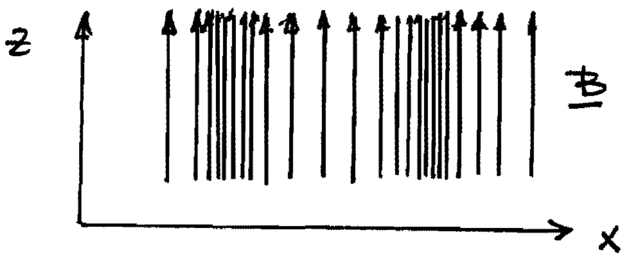
$$\underline{N} = \underline{\mu} \wedge \underline{B} . \tag{2.39}$$

d) Der magnetische Druck

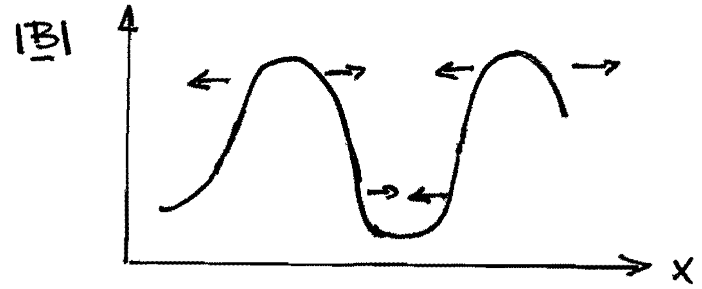
Wir betrachten ein magnetisches Feld der Form

$$\underline{B} = (0, 0, B(x)) , \tag{2.40}$$

welches also nur eine z-Komponente hat, die von x abhängen soll (siehe Fig.)



inhomogenes Parallelfeld



Die Kraftdichte ist durch den Spannungstensor gegeben (s. (1.5), (1.6)):

$$k_i = \frac{1}{4\pi} \partial_k \left[B_i B_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} \underline{B}^2 \right]. \tag{2.41}$$

Nur die x-Komponente verschwindet nicht,

$$k_x = -\frac{1}{8\pi} (\underline{B}^2)' \quad , \quad ' = \frac{d}{dx} . \tag{2.42}$$

Diese Kraft wirkt auf die Materie wie ein Druck. So wie z.B. ein isothermes Gas von Stellen hoher Teilchendichte in Gebiete niedriger Gebiete drückt, so drücken die Feldlinien von Gebieten hoher Feldstärke in Gebiete niedriger Dichte von Feldlinien. Die Feldlinien scheinen sich abzustossen, und es ist deshalb sinnvoll, von einem magnetischen Druck zu sprechen.

Die Kraftwirkungen eines Magnetfeldes sind aber viel komplizierter als der Gasdruck, wie wir noch verschiedentlich sehen werden. Interessante Beispiele werden im folgenden Abschnitt diskutiert.

III.3 Magnetohydrostatik

In der Magnetohydrostatik (Spezialfall der Magnetohydrodynamik, siehe Kap. VIII) befasst man sich mit Gleichgewichtskonfigurationen von Materie (Plasma) und Magnetfeld. Neben den Gleichungen (2.1) der Magnetostatik,

$$\operatorname{div} \underline{B} = 0 \quad , \quad \operatorname{rot} \underline{B} = \frac{4\pi}{c} \underline{J} \tag{3.1}$$

muss man hier noch die <u>hydrostatische Gleichung</u>

$$\operatorname{grad} P = \underline{k} + \rho_m \underline{g} \tag{3.2}$$

hinzunehmen. Hier ist P der Druck,

$$\underline{k} = \frac{1}{c} \underline{J} \wedge \underline{B} = \frac{1}{4\pi} (\operatorname{rot} \underline{B}) \wedge \underline{B} \quad , \tag{3.3}$$

und $\rho_m \underline{g}$ ist die Kraftdichte der Gravitation (ρ_m = Massendichte, $\underline{g}$ = Gravitationsbeschleunigung). Daneben benötigt man noch eine <u>Zustandsgleichung</u>

$$P = P(\rho_m, T) \quad , \text{ z.B. } \quad P = \frac{\mathcal{R}}{\mu} \rho_m T \tag{3.4}$$

($\mathcal{R}$ = Gaskonstante, μ = mittleres Molekulargewicht).

3.1 Der Gleichgewichts-Pinch

In einem zylindrischen Gefäss sei ein Plasma eingeschlossen. Schickt man einen starken Strom in Längsrichtung hindurch, so löst sich das Plasma von den Wänden ab und schnürt sich durch das eigene Feld ein (<u>Pinch-Effekt</u>). Wir wollen nun spezielle eingeschnürte Plasmaschläuche diskutieren. Dabei wird axiale Symmetrie vorausgesetzt (s. Fig.).

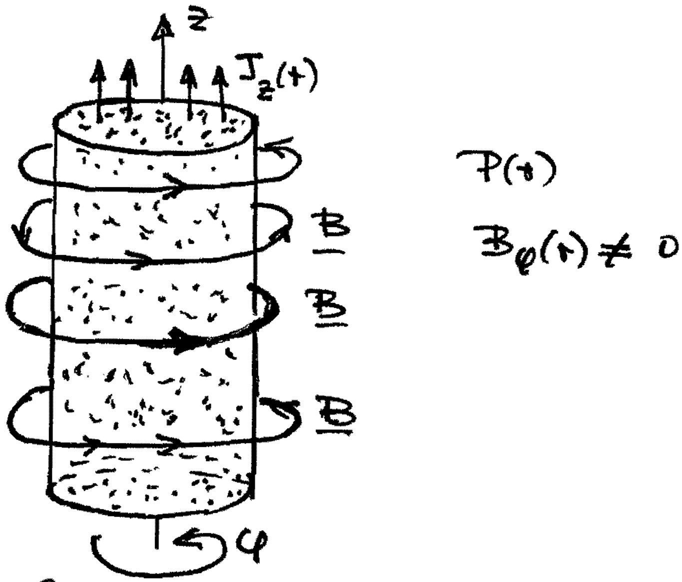


Fig. Eingeschnürter Plasmaschlauch (zylindrisch symmetrisch)

Die radiale Komponente von (3.2) lautet mit (3.3) in zylindrischen Koord. (r, φ, z):

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{1}{c} J_z B_\varphi . \qquad (3.5)$$

Darin (und anderswo) hängen alle Grössen nur von r ab. Der totale Strom innerhalb r ist

$$I_z(r) = \int_0^r J_z(r)\, 2\pi r\, dr . \qquad (3.6)$$

Nach dem Ampère'schen Gesetz gilt

$$2\pi r B_\varphi(r) = \frac{4\pi}{c} I_z(r) \qquad (3.7)$$

und folglich

$$\boxed{B_\varphi(r) = \frac{4\pi}{c}\frac{1}{r}\int_0^r J_z(r)\, r\, dr} , \quad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r B_\varphi(r)\right] = \frac{4\pi}{c} J_z(r). \qquad (3.8)$$

Davon setzen wir die 2. Gl. in (3.5) ein

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{1}{4\pi}\frac{dB_\varphi}{dr} B_\varphi - \frac{1}{4\pi}\frac{B_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{8\pi r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 B_\varphi^2\right). \qquad (3.9)$$

Durch Integration kommt

$$P(r) = P(0) - \frac{1}{8\pi} \int_0^r \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}\left(r^2 B_\varphi^2\right) dr .$$

Die Oberfläche des Pinch befindet sich beim Radius $r = R$: $P(R) = 0$. Somit gilt

$$P(0) = \frac{1}{8\pi} \int_0^R \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}\left(r^2 B_\varphi^2\right) dr$$

und also

$$P(r) = \frac{1}{8\pi} \int_r^R \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}\left(r^2 B_\varphi^2\right) dr . \tag{3.10}$$

Für $r > R$ ist nach Ampère

$$B(r) = \frac{2I}{cr} \quad , \quad I := I_z(R) = \text{Gesamtstrom durch Pinch}. \tag{3.11}$$

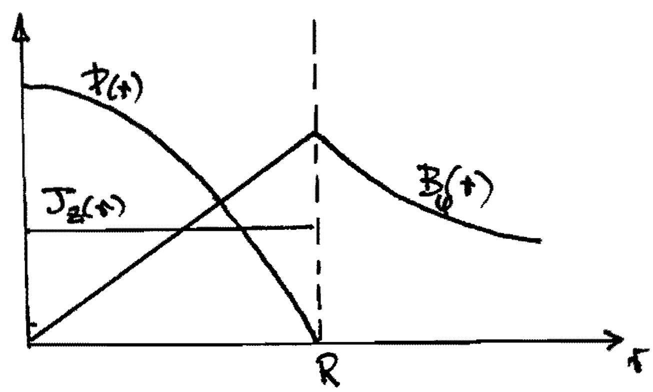
<u>Beispiel</u>: $J_z(r) = \text{const}$ für $r < R$, $J_z = \dfrac{I}{\pi R^2}$. (3.12)

Aus (3.8) folgt

$$B_\varphi(r) = \begin{cases} \dfrac{2Ir}{cR^2} & (r < R) , \\[2ex] \dfrac{2I}{cr} & (r > R) , \end{cases} \tag{3.13}$$

und (3.10) gibt damit

$$P(r) = \frac{I^2}{\pi c^2 R^2}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \qquad (r < R). \tag{3.14}$$



Diese Resultate sind in der obenstehenden Figur skizziert.
Ein ganz anderes Problem ist die Analyse der Instabilitäten dieser Konfigurationen. Darauf können wir hier nicht eingehen und ich muss auf Bücher über Plasma-Physik verweisen.*)

3.2 Die Grad-Shafranov-Gleichung

Wir betrachten nun allgemeinere axialsymmetrische magnetohydrostatische Konfigurationen. Zunächst benötigen wir eine zweckmässige Darstellung von axialsymmetrischen Magnetfeldern (welche auch für andere Zwecke nützlich ist).

Wir benutzen Zylinderkoordinaten (s, φ, z). In $\underline{B} = (B_s, B_\varphi, B_z)$ sind wegen der vorausgesetzten Axialsymmetrie alle drei Komponenten unabhängig von φ. Ist $B_\varphi = 0$, so heisst das Feld <u>poloidal</u> (oder <u>meridional</u>). Ist nur $B_\varphi \neq 0$, so spricht man von einem <u>toroidalen</u> Feld. Da man diese beiden Feldtypen immer superponieren kann, betrachten wir jetzt etwas genauer ein poloidales Feld $\underline{B} = (B_s, 0, B_z)$.

Dafür sei $\Psi(s,z)$ die <u>Flussfunktion</u> definiert durch

$$\Psi(s,z) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^s s'ds' \, B_z(s',z) = 2\pi \int_0^s B_z(s',z)\, s'ds' . \tag{3.15}$$

Es ist also $\Psi(s,z)$ der Fluss in z-Richtung durch eine Kreisscheibe vom Radius s, die senkrecht auf der durch ihren Mittelpunkt gehenden z-Achse ist.

---

*) Siehe z.B. R. Kippenhahn u. C. Möllenhoff, Elementare Plasmaphysik, B.I.-Wissenschaftsverlag 1975; siehe speziell § 24.

Aus (3.15) folgt durch Differentiation nach s

$$B_z = \frac{1}{2\pi s} \frac{\partial \Psi}{\partial s} . \tag{3.16}$$

Die Gl. $\operatorname{div} \underline{B} = 0$ gibt

$$\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s}(s B_s) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

oder mit (3.16)

$$\frac{\partial}{\partial s}(s B_s) = - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial s \partial z} .$$

Folglich haben wir

$$B_s = - \frac{1}{2\pi s} \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{1}{s} C(z) .$$

Da die Felder keine Singularitäten haben sollen, muss $C(z) = 0$ sein, weshalb

$$B_s = - \frac{1}{2\pi s} \frac{\partial \Psi}{\partial z} . \tag{3.17}$$

Wir können die beiden Gl. (3.16), (3,17), d.h.

$$\underline{B} = \frac{1}{2\pi s} \left(- \frac{\partial \Psi}{\partial z}, 0, \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right) \tag{3.18}$$

vektoriell schreiben:

$$\boxed{\underline{B} = \frac{\nabla \Psi \wedge \underline{e}_\varphi}{2\pi s}} . \tag{3.19}$$

Ein poloidales Magnetfeld wird also in einfacher Weise durch die Flussfunktion beschrieben.

Wir lassen in (3.2) die Gravitationskraft weg und haben also die hydrostatische Gleichung

$$\underline{\nabla} P = \frac{1}{c}\, \underline{J} \wedge \underline{B} \tag{3.20}$$

im Verein mit den Feldgleichungen

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{B} = 0 \quad , \quad \underline{\nabla} \wedge \underline{B} = \frac{4\pi}{c}\, \underline{J} \tag{3.21}$$

zu lösen.

Durch skalare Multiplikation erhalten wir aus (3.20)

$$\underline{J} \cdot \underline{\nabla} P = 0 , \quad \underline{B} \cdot \underline{\nabla} P = 0 \quad , \tag{3.22}$$

d.h. die Isobaren $P = \text{const}$ sind zugleich magnetische Flächen und Stromflächen. Daraus und aus (3.19) folgt $\underline{\nabla} P \parallel \underline{\nabla} \Psi$, und somit ist der Druck eine Funktion von Ψ, $P = P(\Psi)$.

Nun berechnen wir die rechte Seite von (3.20) mit Hilfe von (3.19)

$$\underline{J} \wedge \underline{B} = \frac{1}{2\pi s} \left[(\underline{J} \cdot \underline{e}_\varphi) \underline{\nabla} \Psi - (\underline{J} \cdot \underline{\nabla} \Psi) \underline{e}_\varphi \right] . \tag{3.22}$$

Nach (3.20) muss dieser Ausdruck poloidal sein, d.h. $\underline{J} \cdot \underline{\nabla} \Psi$ muss verschwinden, was auch aus (3.22) und $P = P(\Psi)$ folgt. Wir erhalten also

$$\underline{\nabla} P = \frac{dP}{d\Psi} \underline{\nabla} \Psi = \frac{1}{c}\, \underline{J} \wedge \underline{B} = \frac{1}{2\pi s c} (\underline{J} \cdot \underline{e}_\varphi) \underline{\nabla} \Psi ,$$

d.h.

$$\underline{J^T = 2\pi c s \frac{dP}{d\Psi}} \quad , \tag{3.23}$$

wo $J^T = \underline{J} \cdot \underline{e}_\varphi$ den toroidalen Anteil der Stromdichte bezeichnet.

Jetzt multiplizieren wir das Ampère'sche Gesetz (3.21) skalar mit $\underline{e}_\varphi$ und benutzen das Ergebnis (3.23) sowie die Darstellung (3.19):

$$\frac{4\pi}{c}\,2\pi s\,\frac{dP}{d\Psi} = \vec{e}_\varphi \cdot (\underline{\nabla} \wedge \underline{B}) = \mathrm{rot}_\varphi \underline{B} = \frac{\partial B_s}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial s}$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{1}{2\pi s}\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{2\pi s}\frac{\partial \Psi}{\partial s}\right).$$

Man zeigt leicht, dass der letzte Ausdruck auch gleich $-s\,\underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}\Psi/2\pi s^2)$ ist. Damit erhalten wir die Gleichung von <u>Grad – Shafranov</u>:

$$\boxed{\underline{\nabla}\cdot\left(\frac{\underline{\nabla}\Psi}{2\pi s^2}\right) = -8\pi^2\frac{dP}{d\Psi}} \qquad (3.24)$$

Axialsymmetrische Konfigurationen können nun für poloidale Magnetfelder folgendermassen bestimmt werden: Man gebe sich $P(\Psi)$ vor, löse dann (3.24), womit das Magnetfeld durch (3.19) gegeben ist. Die toroidale Komponente der Stromdichte ist durch (3.23) bestimmt und der poloidale Strom verschwindet als Folge des Ampère'schen Gesetzes*) (3.21):

$$\underline{J}^P = 0. \qquad (3.25)$$

* * *

---

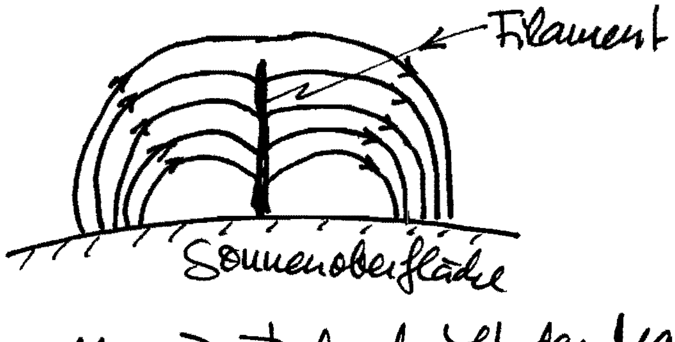
*) In Zylinderkoordinaten ist

$$\underline{\nabla}\wedge\underline{B} = \left(\frac{1}{s}\frac{\partial B_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z},\ \frac{\partial B_s}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial s},\ \frac{1}{s}\frac{\partial (sB_\varphi)}{\partial s} - \frac{1}{s}\frac{\partial B_s}{\partial \varphi}\right).$$

3.3 Sonnenfilamente im magnetohydrostatischen Gleichgewicht

Die Filamente der Sonne sind Ansammlungen von relativ kühler Materie oberhalb der Sonnenoberfläche. Gegen die heissere Sonnenscheibe erscheinen sie dunkler und stehen meist wie Blätter oder Kämme senkrecht auf der Sonnenoberfläche. Die kühle Materie der Filamente ist schwerer als die Umgebung; sie müssten daher auf die Sonne zurückfallen. Nun liegen aber die Filamente immer an den Trennungslinien der grossräumigen Magnetfeldgebiete (von 1–2 Gauss) verschiedener Polarität. Deshalb liegt die Vermutung nahe, dass sie durch Magnetfelder im Gleichgewicht gehalten werden. Dies wollen wir im folgenden untersuchen. (Ich folge dabei R. Kippenhahn, C. Möllenhoff, "Elementare Plasmaphysik", B.I. 1975, speziell §18.)

Zunächst machen wir eine grobe qualitative Betrachtung. Schematisch ist die Feldkonfiguration in der Nähe eines Filaments in der nächsten Fig. gezeigt. Die Feldlinien haben einen Knick an der Stelle des Filaments. (Diesen Knick

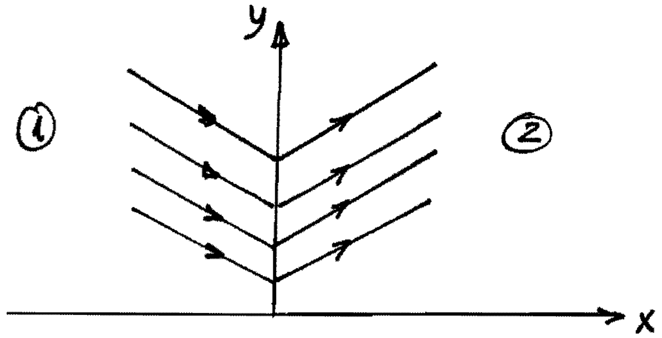


werden wir unten auflösen.) Dadurch übt das Magnetfeld eine Zugwirkung auf das Filament aus, die wir mit Hilfe des Spannungstensors angeben können.

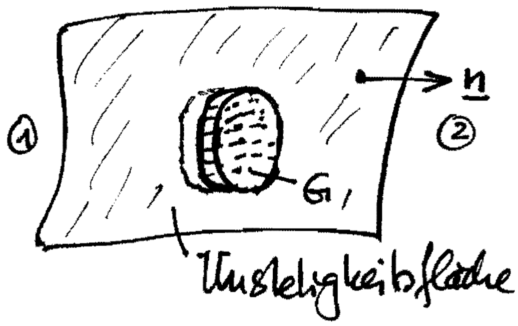
Betrachten wir das Magnetfeld der folgenden Figur, welches in der Ebene $x=0$ eine unstetige Tangentialkomponente hat,

$$B_x \text{ stetig}, \quad B_y^{(1)} = -B_y^{(2)}, \quad B_z = 0, \qquad (3.26)$$

so gibt dieses Anlass zu einer Flächenkraftdichte. Diese erhalten



wir für eine beliebige Unstetigkeitsfläche durch die folgende Betrachtung. Die gesamte Kraft auf ein Gebiet G der Art



ist nach (1.5), (1.6)

$$K_i = -\int T_{ik}\, d\sigma_k . \qquad (3.27)$$

Beim Grenzübergang Höhe der "Dose" $\to 0$ ergibt sich für die Flächenkraftdichte $\underline{k}^*$

$$k_i^* = -\underbrace{\left(T_{ik}^{(2)} - T_{ik}^{(1)}\right)}_{[\![T_{ik}]\!]} n_k = \frac{1}{4\pi}\,[\![B_i\,(\underline{B}\cdot\underline{n}) - \tfrac{1}{2} n_i \underline{B}^2]\!] \qquad (3.28)$$

($\underline{n}$ zeigt nach ②!). Wenn speziell die Unstetigkeitsfläche in der (y,z)-Ebene liegt, erhalten wir aus (3.28)

$$4\pi\, \underline{k}^* = \left(-\tfrac{1}{2}\,[\![B_y^2 + B_z^2]\!],\ [\![B_y]\!]\,B_x,\ [\![B_z]\!]\,B_x\right). \qquad (3.29)$$

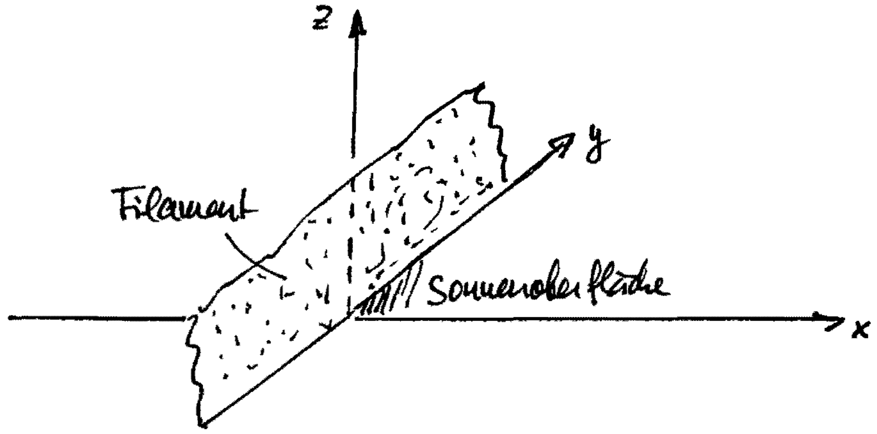
Speziell für das Feld (3.26) ergibt sich daraus

$$k_x^* = 0, \quad k_y^* = \frac{1}{4\pi}\,[\![B_y]\!]\,B_x > 0, \quad k_z^* = 0 . \qquad (3.30)$$

Das Feld versucht also, die Unstetigkeitsfläche nach oben zu ziehen. Dies zeigt, dass die Filamente in den Feldlinien "hängen" können.

Nun wollen wir aber ein Filament auflösen und untersuchen wie sich das Magnetfeld stetig ändert.

Wir betrachten ein sehr langes Filament senkrecht auf der als eben idealisierten Sonnenoberfläche. Letztere bilde die (x,y)-Ebene und das Filament sei in der (y,z)-Ebene (s. Fig.).



Wir müssen die Grundgleichungen (3.1–4) lösen.

Es interessiert uns nur die zweidimensionale Struktur der Filamente parallel zur (x,z)-Ebene und deshalb nehmen wir an, dass alle Grössen von y unabhängig sind. Ferner nehmen wir an, dass T räumlich konstant ist. Mit

$$\underline{B} = (B_x, 0, B_z) \quad , \quad \underline{g} = (0,0,-g) \tag{3.31}$$

und

$$(\mathrm{rot}\,\underline{B}) \wedge \underline{B} = (\partial_z B_x - \partial_x B_z)(B_z, 0, -B_x) \tag{3.32}$$

folgt aus (3.2–3.4)

$$\frac{R}{\mu} T \partial_x \rho_m = \frac{1}{4\pi} B_z (\partial_z B_x - \partial_x B_z) \,, \tag{3.33}$$

$$\frac{R}{\mu} T \partial_z \rho_m = -\frac{1}{4\pi} B_x (\partial_z B_x - \partial_x B_z) - \rho_m g \,. \tag{3.34}$$

Leiten wir (3.33) partiell nach z, (3.34) partiell nach x ab und subtrahieren die resultierenden Gleichungen, so erhalten wir

$$0 = \frac{1}{4\pi}\underbrace{(\partial_z B_z + \partial_x B_x)}_{0\ (\mathrm{div}\,B=0!)}(\partial_z B_x - \partial_x B_z)$$
$$+ \frac{1}{4\pi} B_z(\partial_z^2 B_x - \partial_x\partial_z B_z) + \frac{1}{4\pi} B_x(\partial_z\partial_x B_x - \partial_x^2 B_z)$$
$$+ \partial_x \rho_m g\,. \qquad (3.35)$$

Aus $\mathrm{div}\,\underline{B}=0$ folgt

$$\partial_x\partial_z B_z = -\partial_x^2 B_x\,, \quad \partial_x\partial_z B_x = -\partial_z^2 B_z\,. \qquad (3.36)$$

Damit vereinfacht sich (3.35) zu

$$B_z\Delta B_x - B_x\Delta B_z + 4\pi g\,\partial_x\rho_m = 0\,. \qquad (3.37)$$

Es ist nützlich die folgende Skalenhöhe

$$H_p = \frac{\mathcal{R}T}{g\mu} \qquad (3.38)$$

einzuführen; beachte $P(B=0)\propto e^{-z/H_p}$. Wenn wir in (3.37) die Grösse $\partial_x\rho_m$ aus (3.33) einsetzen, so erhalten wir

$$B_z\Delta B_x - B_x\Delta B_z + \frac{1}{H_p}B_z(\partial_z B_x - \partial_x B_z) = 0\,. \qquad (3.39)$$

Nun vereinfachen wir das Problem noch weiter. Die Variation in der x-Richtung (transversal zum Filament) ist natürlich viel rascher als in der z-Richtung. Deshalb vernachlässigen wir in (3.39) Ableitungen nach z. Wegen $\mathrm{div}\,\underline{B}=0$ ist dann $B_x = \mathrm{const}$, während $B_z = B_z(x)$ nur noch von x abhängt. Bezeichnet ein Strich die Ableitung nach x, so vereinfacht sich (3.39) zu

$$-B_x B_z'' + \frac{1}{H_p}B_z(-B_z') = 0\,. \qquad (3.40)$$

Sei

$$\alpha^{-1} := H_p B_x = \text{const}, \tag{3.41}$$

womit Gl. (3.40) wie folgt geschrieben werden kann

$$B_z'' + \alpha B_z B_z' = 0. \tag{3.42}$$

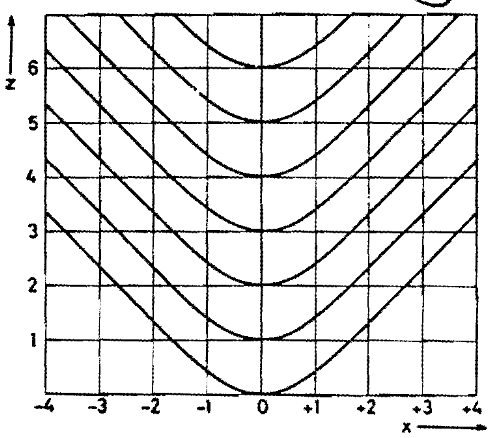
Integration dieser Gleichung gibt

$$B_z' + \frac{\alpha}{2} B_z^2 = \text{const}. \tag{3.43}$$

Für $x \to \infty$ nehme B_z den konstanten Wert B_z^∞ an. Die Lösung von (3.43) lautet dann

$$B_z = B_z^\infty \tanh \xi, \quad \xi = \frac{B_z^\infty x}{2 H_p B_x} = \frac{1}{2} \alpha B_z^\infty x. \tag{3.44}$$

Der Verlauf der Feldlinien ist in der folgenden Figur gezeigt.



Setzen wir die Lösung (3.44) in (3.33) ein, so ergibt sich auch die Dichteverteilung im Inneren des Filamentes:

$$\frac{RT}{\mu} \partial_x \rho_m = -\frac{1}{4\pi} B_z \partial_x B_z = -\frac{1}{8\pi} \partial_x B_z^2 .$$

Mit der Randbedingung $\rho_m \to 0$ für $x \to \infty$ ergibt sich die Lösung

$$\frac{4\pi RT}{\mu} \rho_m = -\frac{1}{2}\left(B_z^2 - (B_z^\infty)^2\right), \tag{3.45}$$

d.h.

$$\rho_m = -\frac{1}{8\pi} \frac{\mu}{RT} (B_z^\infty)^2 (\tanh^2 \xi - 1) = \frac{1}{8\pi} \frac{\mu}{RT} \left(\frac{B_z^\infty}{\cosh \xi}\right)^2 . \tag{3.46}$$

ρ_m hat im Zentrum ($x=0$) ein starkes Maximum ρ_c. Numerisch erhält man für $B_z^\infty = 1$ Gauss, $\mu = 1$, $T = 3700\,K$ den Wert $\rho_c \simeq 8 \times 10^{10}$ H-Atome pro cm³. Etwa diese Grössenordnung ergibt sich auch aus spektroskopischen Untersuchungen.

*   *   *

III.4 Makroskopische Magnetostatik

Nach dem Vorbild von § I.10 leiten wir jetzt auch die makroskopische Magnetostatik materieller Medien durch Mittelung aus der mikroskopischen Theorie her.

Die mikroskopischen Gleichungen lauten

$$\operatorname{div} \underline{b} = 0 \quad , \quad \operatorname{rot} \underline{b} = \frac{4\pi}{c} \underline{j} . \qquad (4.1)$$

Hier ist $\underline{b}$ die mikroskopische magnetische Induktion und $\underline{j}$ ist die mikroskopische Stromdichte. Letztere zerlegen wir in eine Leitungsstromdichte $\underline{J}_\ell$ und eine atomare Stromdichte $\underline{j}_a$, welche von den Strömen in den Atomen und Molekülen herrührt:

$$\underline{j}_a(\underline{x}) = \sum_k \underline{j}_a^{(k)}(\underline{x}) . \qquad (4.2)$$

Durch die Mittelwertbildung (I.10.3) erhalten wir aus (4.1) für die makroskopische magnetische Induktion

$$\underline{B} = \langle \underline{b} \rangle \qquad (4.3)$$

die Gleichungen

$$\operatorname{div} \underline{B} = 0 \quad , \quad \operatorname{rot} \underline{B} = \frac{4\pi}{c} \left(\underline{J}_\ell + \langle \underline{j}_a \rangle \right) . \qquad (4.4)$$

Bei der Berechnung von $\langle \underline{j}_a^{(k)} \rangle$ benutzen wir, dass $\underline{j}_a^{(k)}$ nur in einer kleinen Umgebung von atomarer Dimension um den "Mittelpunkt" $\underline{x}_k$ des "Atoms" k nicht verschwindet. Wir setzen deshalb in (der Index a wird unterdrückt)

$$\langle \underline{j}^{(k)} \rangle (\underline{x}) = \int g(\underline{x}-\underline{x}')\, \underline{j}^{(k)}(\underline{x}')\, d^3x'$$

$\underline{x}' - \underline{x}_k = \underline{\xi}$ und entwickeln nach Taylor:

$$\langle \underline{j}^{(k)} \rangle (\underline{x}) = \int g(\underline{x}-\underline{x}_k-\underline{\xi})\, \underline{j}^{(k)}(\underline{x}_k+\underline{\xi})\, d^3\xi$$

$$= g(\underline{x}-\underline{x}_k) \int \underline{j}^{(k)}(\underline{x}')\, d^3x' - \frac{\partial}{\partial x_i} g(\underline{x}-\underline{x}_k) \int \underline{j}^{(k)}(\underline{x}_k+\underline{\xi})\, \xi_i\, d^3\xi + \ldots .$$

Wegen $\operatorname{div} \underline{j}^{(k)} = 0$ verschwindet der erste Term nach dem letzten Gleichheitszeichen (vgl. mit (2.16)). Es bleibt

$$\langle \underline{j}_a \rangle (\underline{x}) = -\frac{\partial}{\partial x_i} \sum_k g(\underline{x}-\underline{x}_k) \int \underline{j}_a^{(k)}(\underline{x}_k+\underline{\xi})\, \xi_i\, d^3\xi + \cdots .$$

Im Integral rechts benutzen wir noch die Identität (2.19) für $\underline{a} = \underline{\nabla}$ und erhalten

$$\boxed{\langle \underline{j}_a \rangle = c \operatorname{rot} \underline{M}} \, , \tag{4.5}$$

mit

$$\underline{M}(\underline{x}) = \sum_k g(\underline{x}-\underline{x}_k)\, \underline{\mu}^{(k)} . \tag{4.6}$$

Darin ist $\underline{\mu}^{(k)}$ das magnetische Moment des k^{ten} "Atoms". Die <u>Magnetisierung</u> $\underline{M}$ ist der Mittelwert eines Systems von <u>Punktdipolen</u> $\underline{\mu}^{(k)}$ in den Positionen $\underline{x}_k$. (In (4.6) kann man bei der Mittelung wieder zu scharfen Rändern übergehen.)

Aus (4.4) und (4.5) erhalten wir für die inhomogene Feldgleichung des mittleren Feldes $\underline{B}$:

$$\mathrm{rot}\,\underline{B} = \frac{4\pi}{c}\left(\underline{J}_e + \underline{J}_{magn.}\right) \quad , \tag{4.7}$$

mit der Magnetisierungsstromdichte

$$\underline{J}_{magn.} = c\,\underline{\nabla}\wedge\underline{M} \ . \tag{4.8}$$

Leider ist es immer noch üblich, mit dem folgenden Hilfsfeld

$$\underline{H} = \underline{B} - 4\pi\underline{M} \quad , \tag{4.9}$$

dem sog. magnetischen Feld, zu operieren, für das ich keine Intuition habe. Dann kann man die Feldgleichungen der makroskopischen Magnetostatik so schreiben

$$\boxed{\mathrm{div}\,\underline{B} = 0 \quad , \ \mathrm{rot}\,\underline{H} = \frac{4\pi}{c}\,\underline{J}_e \ .} \tag{4.10}$$

Wieder benötigen wir eine zusätzliche phänomenologische Beziehung zwischen $\underline{H}$ und $\underline{B}$ (oder besser $\underline{M}$ und $\underline{B}$). Für isotrope diamagnetische und paramagnetische Substanzen ist

$$\underline{B} = \mu\,\underline{H} \quad , \tag{4.11}$$

wobei die magnetische Permeabilität μ eine Materialgrösse ist, welche nur sehr wenig von 1 abweicht. Typisch ist $|\mu - 1| \sim 10^{-5}$;

$\mu > 1$ für paramagnetische Substanzen,

$\mu < 1$ für diamagnetische Materialien.

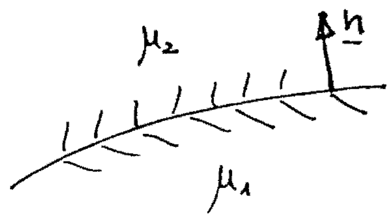
Wir können hier auf die mikroskopische Theorie dieser Substanzen nicht eingehen (s. Vorlesung über Physik der kondensierten Materie. Es sei lediglich bemerkt, dass der Diamagnetismus (z.B. von Heliumgas) ein rein quantenmechanischer Effekt ist.

In Ferromagnetika ist der Zusammenhang zwischen

$\underline{B}$ und $\underline{M}$ wesentlich nichtlinear und im allgemeinen auch nicht eindeutig: $\underline{B}$ hängt als Funktion von $\underline{M}$ davon ab, wie das Material präpariert worden ist (Hysterese). Wir werden diese Substanzen im folgenden nicht behandeln.

Randwertprobleme der Magnetostatik

Wir diskutieren zuerst die Randbedingungen an der Grenze zwischen zwei Medien mit verschiedenen magnetischen Eigenschaften (s. Fig.)



Integrieren wir div $\underline{B} = 0$ über das Gebiet G in der oberen Fig. auf S. I.16 und machen denselben Grenzübergang wie dort, so finden wir sofort die Stetigkeit der Normalkomponente von $\underline{B}$:

$$(\underline{B}_2-\underline{B}_1)\cdot\underline{n} = 0. \tag{4.11}$$

Integrieren wir andererseits $\underline{H}$ längs der geschlossenen Kurve γ in der unteren Fig. auf S. I.16, so ergibt sich

$$\int_\gamma \underline{H}\cdot d\underline{s} = \int_S \mathrm{rot}\,\underline{H}\cdot d\underline{\sigma} = \frac{4\pi}{c}\int_S \underline{J}\cdot\underline{n}'\,d\sigma, \tag{4.12}$$

wobei $\underline{n}'$ senkrecht auf S steht. Wieder lassen wir die Höhe des "Rechtecks" in der Fig. gegen Null gehen. In diesem Grenzfall erhalten wir aus (4.12) ($\underline{n}'$ ist tangential an die Unstetigkeitsfläche):

$$(\underline{H}_2 - \underline{H}_1)\cdot(\underline{n}'\wedge\underline{n}) = \frac{4\pi}{c}\,\underline{J}^*\cdot\underline{n}' . \qquad (4.13)$$

Darin ist $\underline{J}^*$ der Oberflächenstrom. Da $\underline{n}'$ ein beliebiger tangentialer Einheitsvektor an die Unstetigkeitsfläche ist, folgt aus (4.13)

$$\boxed{\underline{n}\wedge(\underline{H}_2 - \underline{H}_1) = \frac{4\pi}{c}\,\underline{J}^*} . \qquad (4.14)$$

Insbesondere verschwindet die linke Seite, wenn es keine Oberflächenströme gibt.
Wir behandeln nun eine Reihe von einfachen Beispielen.

a) Das Feld einer homogen magnetisierten Kugel

Wir betrachten eine Kugel mit Radius a und konstanter Magnetisierungsdichte $\underline{M}$. Ausserhalb der Kugel sei $\mu = 1$ (z.B. Vakuum). Gesucht sind $\underline{B}$ und $\underline{H}$.
Ausserhalb der Kugel ist ($\underline{B} = \underline{H}$):

$$\mathrm{div}\,\underline{B} = 0 , \quad \mathrm{rot}\,\underline{B} = 0 .$$

Deshalb existiert ein (skalares) Potential Φ mit

$$\underline{B} = -\,\mathrm{grad}\,\Phi , \qquad \Delta\Phi = 0 . \qquad \text{für } r > a \qquad (4.15)$$

Im Unendlichen soll natürlich $\underline{B}$ verschwinden. Die allgemeinste Form von Φ ist deshalb (siehe MMP-Skript, Kap. IV):

$$\Phi = \sum_{l=0}^{\infty} b_l\, r^{-(l+1)} P_l(\cos\vartheta) \ , r > a , \quad \vartheta = \sphericalangle(\underline{M}, \underline{x}) . \qquad (4.16)$$

Innerhalb der Kugel ist

$$H = \underline{B} - 4\pi\underline{M} . \qquad (4.17)$$

In dieser Gl. sind alle drei Vektoren parallel (zur z-Achse);

$$B_r = B_0 \cos\vartheta \,, \quad B_\vartheta = -B_0 \sin\vartheta.$$

Nach (4.11) und (4.14) ($\underline{J}^* = 0$) müssen B_r und H_ϑ für $r = a$ stetig sein. Dies impliziert

$$B_0 \cos\vartheta = \sum_{l=0}^{\infty} b_l \, \frac{(l+1)}{a^{l+2}} \, P_l(\cos\vartheta)$$

$$-(B_0 - 4\pi M)\sin\vartheta = -\sum_{l=0}^{\infty} b_l \, \frac{1}{a^{l+2}} \, \frac{d}{d\vartheta} P_l(\cos\vartheta) \,.$$

Daraus sieht man, dass nur $b_{l=1} \neq 0$ sein kann und wir finden ($P_1(\cos\vartheta) = \cos\vartheta$):

$$B_0 = 2 b_1 / a^3 \,,$$

$$-(B_0 - 4\pi M) = b_1 / a^3 \,,$$

d.h.

$$b_1 = \frac{4\pi}{3} \cdot M \, a^3 \,, \quad B_0 = \frac{8\pi}{3} M \,.$$

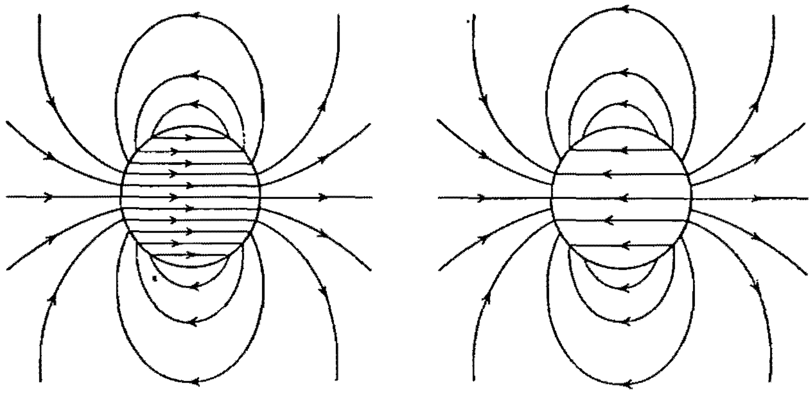
Für $r < a$ erhalten wir also

$$\boxed{\underline{B} = \frac{8\pi}{3} \underline{M} \,, \quad \underline{H} = -\frac{4\pi}{3} \underline{M} \,.} \qquad (4.18)$$

Ausserhalb der Kugel liegt ein <u>Dipolfeld</u> vor, mit dem Dipolmoment

$$\underline{\mu} = \int_{\text{Kugel}} \underline{M} \, d^3x = \frac{4\pi}{3} a^3 \underline{M} \,. \qquad (4.19)$$

Beachte die Vorzeichen in (4.18). Die Feldlinien von $\underline{B}$ sind geschlossen, während diejenigen für $\underline{H}$ auf der Oberfläche enden. Das ist in den beiden folgenden Fig. gezeigt.



b) Magnetisierte Kugel in einem äusseren Feld

Setzen wir die magnetisierte Kugel von Beispiel a) in ein äusseres Feld $\underline{B}_0$, dann erhalten wir die resultierenden Felder einfach durch Superposition. (Die Feldgleichungen und die Randbedingungen sind linear!). Also ist

$$\underline{B} = \underline{B}_0 + \frac{8\pi}{3}\underline{M}, \quad \underline{H} = \underline{B}_0 - \frac{4\pi}{3}\underline{M} \qquad \text{für } r < a. \tag{4.20}$$

Falls die Kugel nicht permanent magnetisiert ist (diamagnetische oder paramagnetische Substanz), dann kommt die Magnetisierung $\underline{M}$ durch das äussere Feld zustande. Um $\underline{M}$ zu berechnen, benutzen wir in (4.20) die Beziehung $\underline{B} = \mu\,\underline{H}$ und finden

$$\underline{M} = \frac{3}{4\pi}\,\frac{\mu-1}{\mu+2}\,\underline{B}_0 \,. \tag{4.21}$$

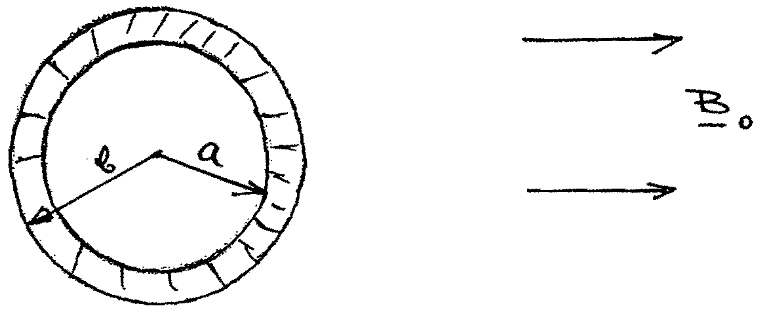
Eine ganz analoge Formel hatten wir für eine dielektrische Kugel in einem äusseren Feld.

Für Ferromagnetika gilt diese Beziehung nicht. Durch Elimination von $\underline{M}$ in (4.20) erhält man aber die allgemein gültige Relation

$$\underline{B} + 2\underline{H} = 3\,\underline{B}_0 \,. \tag{4.22}$$

c) Kugelschale in einem homogenen äusseren Feld

An Stelle einer Kugel setzen wir jetzt eine Kugelschale von permeablem Material in ein äusseres Feld $\underline{B}_0$ (s. Fig.).



Da keine Ströme fliessen, ist in allen drei Gebieten der Fig. $\mathrm{rot}\,\underline{H} = 0$, d.h. $\underline{H} = -\mathrm{grad}\,\phi$. Aus $\underline{B} = \mu \underline{H}$ folgt weiter überall $\Delta\phi = 0$. Weit weg ist ausserdem $\phi \to -B_0 r \cos\vartheta$. Für den Aussenraum ($r > b$) gilt der Ansatz

$$\phi = -B_0 r \cos\vartheta + \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l\, r^{-(l+1)} P_l(\cos\vartheta) . \qquad (4.23)$$

Für $a < r < b$ ist das Potential von der Form

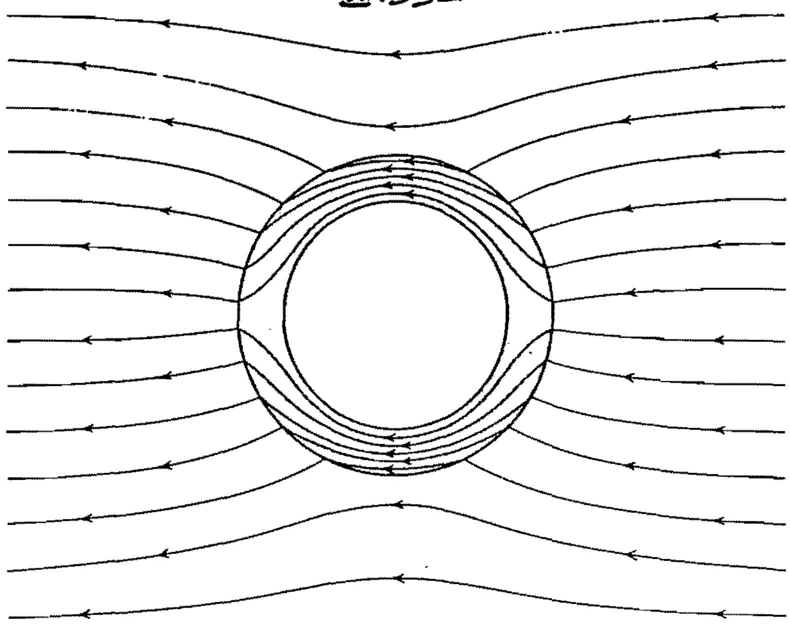
$$\phi = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\beta_l r^l + \gamma_l r^{-(l+1)}\right) P_l(\cos\vartheta) \qquad (4.24)$$

und für $r < a$ gilt

$$\phi = \sum_{l=0}^{\infty} \delta_l r^l P_l(\cos\vartheta) . \qquad (4.25)$$

Dieses Beispiel wird in den Übungen weiter untersucht. Es wird sich zeigen, dass alle Koeffizienten in (4.23)–(4.25) verschwinden, ausser für $l = 1$. Für hohes μ wird sich herausstellen, dass das Magnetfeld im Inneren (auch für eine dünne Schale) stark reduziert wird. Diese magnetische Abschirmung ist von grossem praktischem Nutzen.

Die Feldlinien von $\underline{B}$ sind in der folgenden Fig. gezeigt.



* * *

III.5 Stromverteilung bei Gleichstrom in Leitern, Ohmscher Widerstand

In der Elektrostatik konnte man die Leiter dadurch charakterisieren, dass in ihnen das elektrische Feld verschwindet. In nichtstatischen Situationen können aber in Leitern Ströme fliessen, deren Stromdichte schon bei kleinen Feldstärken $\underline{E}$ beträchtlich sein kann.

A. Ohm'sches Gesetz

Viele Leiter lassen sich durch eine lineare Beziehung zwischen $\underline{J}$ und $\underline{E}$ beschreiben:

$$\underline{J} = \sigma \underline{E} . \tag{5.1}$$

Den Proportionalitätsfaktor σ nennt man die Leitfähigkeit und die Beziehung (5.1) das Ohm'sche Gesetz.

Gelegentlich benötigen wir die Verallgemeinerung dieses Gesetzes auf bewegte Leiter. Im lokalen Ruhesystem eines kleinen Leiterstückes ist das elektrische Feld $\underline{E}'$ nach (II.1.33), bis auf $O(v^2/c^2)$, gegeben durch

$$\underline{E}' = \underline{E} + \frac{1}{c} \underline{v} \wedge \underline{B} \qquad (+ O(v^2/c^2)). \tag{5.2}$$

Es ist klar, dass die Verallgemeinerung von (5.1) – bis auf $O(v^2/c^2)$ – wie folgt lauten muss

$$\underline{J} = \sigma \underline{E}' = \sigma \left(\underline{E} + \frac{1}{c} \underline{v} \wedge \underline{B} \right) . \tag{5.3}$$

(Das Ohmsche Gesetz kann man auch kovariant formulieren. Siehe dazu das SRT-Skript, Abschnitt über die Elektrodynamik bewegter Körper.)

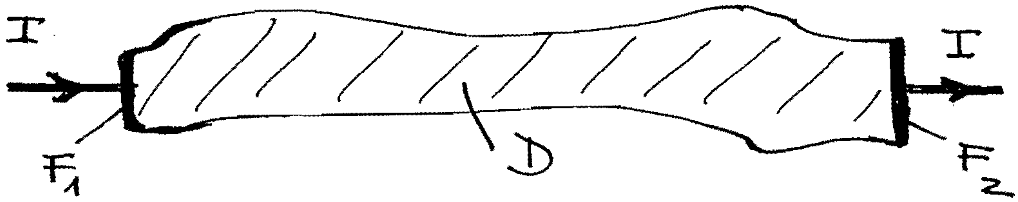
Für sehr gute Leiter folgt aus (5.3)

$$\underline{E} + \frac{1}{c}\underline{v} \wedge \underline{B} \simeq 0 . \qquad (5.4)$$

Diese Näherung verwendet man z.B. oft für ein Plasma (Kap.). (Für ein Bsp. siehe die Übungsserie 7.)

B. Stromverteilung in Ohm'schem Widerstand

Wir wollen nun die Stromverteilung in einem sogenannten <u>Ohmschen Widerstand</u> untersuchen. Als einen solchen Widerstand bezeichnet man ein Stück Materie, in dem σ wesentlich kleiner ist als in den "Zuleitungsdrähten" (schlechter Leiter). Das zugehörige Gebiet D besitze also zwei Oberflächenanteile F_1 und F_2 (s. Fig.), die den Stellen entsprechen, an denen die Zuleitungen mit sehr grossen Leitfähigkeiten angebracht sind.



Die stationäre Stromverteilung im Leiter sei $\underline{J}(\underline{x})$. Das elektrische Feld erfüllt $\text{rot}\,\underline{E} = 0$ und kann deshalb aus einem Potential abgeleitet werden

$$\underline{E} = -\text{grad}\,\varphi . \qquad (5.5)$$

Aus $\text{div}\,\underline{J} = 0$ und dem Ohmschen Gesetz (5.1) folgt für φ die Differentialgleichung

$$\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} \varphi) = 0 . \qquad (5.6)$$

Wir setzen

$$\underline{J}(\underline{x}) = I \, \underline{s}(\underline{x}) , \qquad (5.7)$$

wo I der Gesamtstrom durch D ist. Die Berechnung von $\underline{s}(\underline{x})$ erfordert die Lösung eines Randwertproblems: Es ist

$$\underline{s}(\underline{x}) = -\sigma(\underline{x}) \operatorname{grad} \varphi ,$$

wo φ die Gleichung (5.6) und die Randbedingungen

(i) $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ auf den freien Oberflächen von D (Normalkomponente des Stromes $= 0$)

(ii) $\int_{F_{1,2}} \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, d\sigma = \pm 1$ (Stromstärke ± 1 der Zuleitungen)

(5.8)

erfüllt. Die pro Zeiteinheit an den Ladungen geleistete Arbeit ist ($\underline{B}$ leistet keine Arbeit) pro Volumeneinheit gleich*) $\underline{J}(\underline{x}) \cdot \underline{E}(\underline{x})$. Die gesamte Leistung in D ist somit

$$\int_D \underline{J}(\underline{x}) \cdot \underline{E}(\underline{x}) \, d^3x = I^2 \int_D \frac{\underline{s}^2(\underline{x})}{\sigma(\underline{x})} \, d^3x = I^2 R , \qquad (5.9)$$

---

*) Die Arbeit, welche ein Feld $(\underline{E}, \underline{B})$ an einer Punktladung e pro Zeiteinheit leistet, ist

$$\underline{K} \cdot \underline{v} = e \underline{v} \cdot \left(\underline{E} + \frac{1}{c} \underline{v} \wedge \underline{B} \right) = e \underline{v} \cdot$$

Deshalb ist die Leistungsdichte an einer Stromverteilung gleich $\underline{J} \cdot \underline{E}$.

wobei

$$R = \int_D \frac{\underline{s}^2(\underline{x})}{\sigma(\underline{x})}\, d^3x \tag{5.10}$$

der <u>Widerstand</u> des Materials in D ist.

Für die Leistung gilt auch

$$\int_D \underline{J}\cdot\underline{E}\, dV = \int_D \sigma |\operatorname{grad}\varphi|^2 dV = \int_D \operatorname{div}(\varphi\,\sigma \operatorname{grad}\varphi)\, dV$$

$$= \int_{\partial D} \varphi\sigma \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\sigma .$$

Da $-\sigma\,\partial\varphi/\partial n$ die Normalkomponente des Stromes durch die Oberfläche pro Flächeneinheit ist, erhalten wir

$$\boxed{\int_D \underline{J}\cdot\underline{E}\, dV = IV}\ , \quad V=\varphi_1-\varphi_2 : \text{Potentialdifferenz}, \quad V = \int_1^2 \underline{E}\cdot d\underline{s} . \tag{5.11}$$

Der Vergleich mit (5.9) gibt

$$\boxed{V = IR .} \tag{5.12}$$

Nach (5.10) hängt R nur von σ und der Geometrie von D ab. Die Beziehung (5.12) ist das bekannte (integrale) Ohmsche Gesetz.

Wir können den Widerstand R noch anders darstellen. Dazu sei $\hat\varphi$ die Lösung von (5.6) mit den Randbedingungen

$$\text{(i)}\ \frac{\partial\hat\varphi}{\partial n} = 0 \ \text{auf den freien Oberflächen von } D,$$

$$\text{(ii)}\ \hat\varphi|F_1 = 1, \quad \hat\varphi|F_2 = 0 . \tag{5.13}$$

Dann ist $\varphi = \varphi_2 + V\hat\varphi$. Andererseits ist

$$I = \int_{F_2} \underline{J} \cdot \underline{n} \, d\sigma = - \int_{F_2} \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, d\sigma$$

$$= -V \int_{F_2} \sigma \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial n} \, d\sigma .$$

Vergleichen wir dies mit (5.12), so ergibt sich

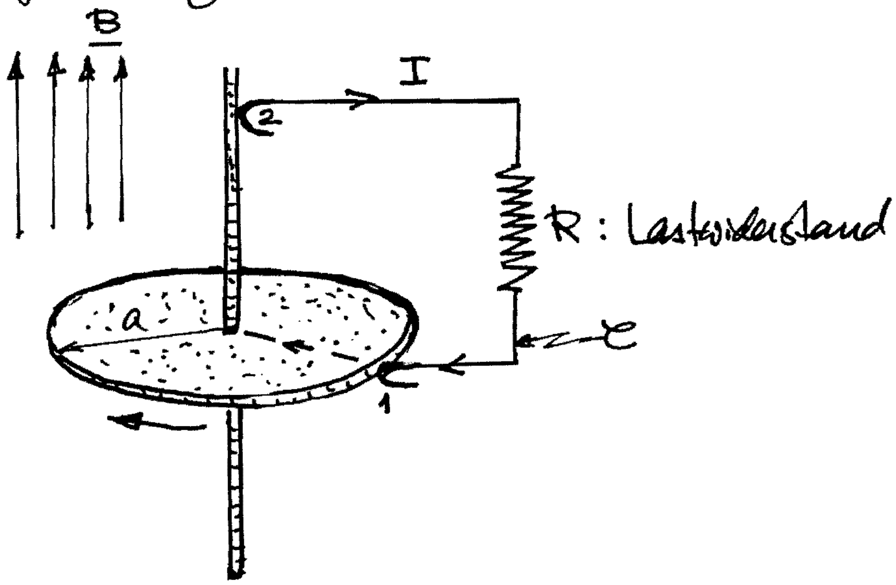
$$R^{-1} = - \int_{F_2} \sigma \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial n} \, d\sigma . \qquad (5.14)$$

Als spezielles Beispiel betrachten wir einen <u>dünnen Draht</u> mit langsam veränderlichem Querschnitt q. Hier ist $\underline{s}$ in (5.7) über den Querschnitt annähernd konstant und folglich gilt $\underline{s}^2 \simeq 1/q^2$. Aus (5.10) ergibt sich für den Widerstand des Drahtes das folgende Linienintegral längs des Drahtes

$$R = \int_{\text{Draht}} \frac{ds}{q \cdot \sigma} . \qquad (5.15)$$

C. Unipolarinduktion

Wir beschreiben die Unipolarinduktion, welche bei der Konstruktion von Unipolarmaschinen verwendet wird, am Beispiel der Faraday-Scheibe (s. Fig.). Darunter verstehen wir eine rotierende Scheibe aus sehr gut leitendem Material, welche in ein homogenes Magnetfeld eingebettet ist. Schleifkontakte verbinden die Achse senkrecht durch den Mittelpunkt der Scheibe über einen Widerstand R mit dem Rand der Scheibe. Wir interessieren uns für die Spannung zwischen diesen beiden Stellen.



Diese wollen wir auf zwei verschiedene Arten bestimmen. Bei der ersten Methode betrachten wir den ruhenden geschlossenen Weg $\mathcal{C}$ (ruhend bez. des Laborsystems) durch die äussere Leitung, den gestrichelten Weg zum Mittelpunkt und anschliessend zum Schleifkontakt auf der Rotationsachse. Da eine stationäre Situation vorliegt, gilt

$$\oint_{\mathcal{C}} \underline{E}\cdot d\underline{s} = 0 = \int_1^2 \underline{E}\cdot d\underline{s} + IR \; . \qquad (5.16)$$

Das Integral rechts erstreckt sich über gute Leiter und für diese gilt nach (5.4)

$$\underline{E} + \frac{1}{c}\underline{v}\wedge\underline{B} \simeq 0. \tag{5.17}$$

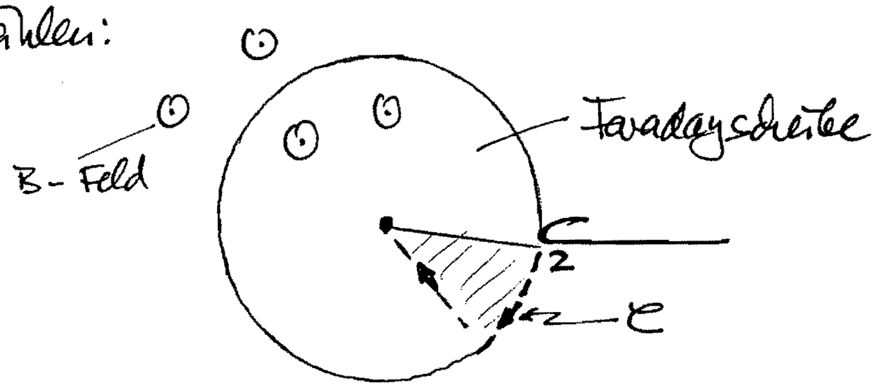
Deshalb haben wir

$$\int_1^2 \underline{E}\cdot d\underline{s} \simeq -\frac{1}{c}\int(\underline{v}\wedge\underline{B})\cdot d\underline{s} = -\frac{1}{c}\Omega B\int_0^a r\,dr = -\frac{1}{c}\Omega B\frac{a^2}{2},$$

wo Ω die Winkelgeschwindigkeit ist. Deshalb folgt aus (5.16) für die gesuchte Spannung

$$\boxed{V = IR = \frac{1}{2}\frac{\Omega a}{c}Ba}. \tag{5.18}$$

Wir konnten aber auch ein unbewegtes Wegstück durch die Scheibe wählen:



Dann ist das Faradaysche Induktionsgesetz (II.5.4) für bewegte Leiter zuständig

$$\int_C \underline{E}'\cdot ds = -\frac{1}{c}\dot{\Phi}, \quad \underline{E}' = \underline{E} + \frac{1}{c}\underline{v}\wedge\underline{B}. \tag{5.19}$$

Wegen $\underline{\nabla}\wedge\underline{E} = 0$ ist wieder

$$\oint_C \underline{E}\cdot ds = 0 = \int_1^2 \underline{E}\cdot d\underline{s} + V. \tag{5.20}$$

Andererseits liefert das Integral in (5.19) zur EMK von 1 nach 2 für gute Leiter keinen Beitrag und es ist

$$V = -\frac{1}{c}\dot{\Phi} \Longrightarrow \int_1^2 \underline{E}\cdot d\underline{s} = \frac{1}{c}\dot{\Phi}. \tag{5.21}$$

Nun ist aber

$$\dot{\Phi} = B \times \text{überstrichene Fläche pro Zeiteinheit} \cdot (-1)$$

$$= -B \cdot \text{Frequenz} \cdot \pi a^2 = -B \cdot \frac{\Omega}{2\pi} \pi a^2 = -\frac{1}{2} \Omega B a^2 .$$

Wieder erhalten wir das Ergebnis (5.18) (Vorzeichen?)!

Ergänzung zu A

Wir leiten noch das relativistisch korrekte Ohm'sche Gesetz für bewegte Leiter her. Dazu notieren wir zuerst die bekannten Transformationsgesetze

$$\underline{E}'_{\parallel} = \left(\underline{E} + \tfrac{1}{c}\underline{v}\wedge\underline{B}\right)_{\parallel}, \quad \underline{E}'_{\perp} = \gamma\left(\underline{E} + \tfrac{1}{c}\underline{v}\wedge\underline{B}\right)_{\perp},$$

$$\underline{J}'_{\parallel} = \gamma\left(\underline{J} - \rho\underline{v}\right)_{\parallel}, \quad \underline{J}'_{\perp} = \left(\underline{J} - \rho\underline{v}\right)_{\perp}. \qquad (5.22)$$

Aus $\underline{J}' = \sigma\underline{E}'$ im Ruhesystem erhalten wir deshalb im Laborsystem

$$\gamma\left(\underline{J} - \rho\underline{v}\right)_{\parallel} = \sigma\left(\underline{E} + \tfrac{1}{c}\underline{v}\wedge\underline{B}\right)_{\parallel},$$

$$\left(\underline{J} - \rho\underline{v}\right)_{\perp} = \sigma\gamma\left(\underline{E} + \tfrac{1}{c}\underline{v}\wedge\underline{B}\right)_{\perp}. \qquad (5.23)$$

Diese Gl. kann man etwas künstlich zusammenfassen: Sei $\underline{E}^* := \underline{E} + \tfrac{1}{c}\underline{v}\wedge\underline{B}$, dann gilt

$$\underbrace{\underline{J} - \rho\underline{v}}_{\text{Leitungsstrom } \underline{J}_\ell} = \sigma\gamma\left(\underline{E}^* - (\underline{\beta}\cdot\underline{E}^*)\underline{\beta}\right).$$

Wir haben also

$$\boxed{\underline{J}_\ell = \sigma\gamma\left[\underline{E}^* - (\underline{\beta}\cdot\underline{E}^*)\underline{\beta}\right]} \qquad (5.24)$$

$$\left(= \sigma\underline{E}^* + \mathcal{O}(\beta^2)\right).$$

Die kovariante Formulierung lautet

$$\boxed{j_\ell^\mu = j^\mu - (j\cdot u)u^\mu = \sigma F^{\mu\nu}u_\nu}. \qquad (5.25)$$

(Siehe § V.2.)