

Kapitel VII. Streuung elektromagnetischer Wellen

Fällt eine elektromagnetische Welle auf ein Medium ein, so führt dies zu einer Bewegungsänderung der in diesem befindlichen Ladungen. Dies gibt Anlass zur Emission von gestreuten Wellen. Auf diesem Streuprozess beruht z.B. die blaue Farbe des Himmels und die rote Farbe der untergehenden Sonne.

§ 38. Thomson Streuung

Wenn eine ebene Welle auf ein geladenes freies Teilchen einfällt, dann wird dieses beschleunigt und emittiert folglich Strahlung. Wir wollen den Wirkungsquerschnitt für diesen Streuprozess berechnen. Die ebene Welle sei in komplexer Schreibweise

$$\underline{E}(\underline{x}, t) = E_0 \underline{e} e^{i(\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega t)} \quad (38.1)$$

(\underline{e} : Polarisationsvektor, E_0 : Amplitude). Bezeichnet $\underline{z}(t)$ den Ort des Teilchens so gilt*) (m : Masse, e : Ladung):

$$m \ddot{\underline{z}}(t) = e \underline{E}(\underline{z}, t) = e E_0 \underline{e} e^{i(\underline{k} \cdot \underline{z} - \omega t)}. \quad (38.2)$$

Wir nehmen an, dass sich die Ladung während einer Schwingung wenig weit bewegt im Vergleich zur Wellenlänge. Wir benötigen den Zeitmittelwert von \dot{v}^2 . Dieser ist nach (38.2) und der gemachten Annahme:

$$\langle \dot{v}^2 \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\ddot{\underline{z}} \cdot \ddot{\underline{z}}^*) = \frac{1}{2} |E_0|^2 \left(\frac{e}{m}\right)^2. \quad (38.3)$$

Dabei haben wir den folgenden allgemeinen Sachverhalt be-

*) Wir nehmen an, die Geschwindigkeit v sei viel kleiner als c , sodass die Lorentzkraft $\underline{e} \underline{v} \wedge \underline{B}$ vernachlässigbar ist.

umkt: Sei $\underline{A}(t) = \underline{A}_0 e^{-i\omega t}$, $\underline{B} = \underline{B}_0 e^{-i\omega t}$. Dann ist das Zeitmittel von

$$\operatorname{Re} A(t) \operatorname{Re} B(t) = \frac{1}{4} (\underline{A}_0 e^{-i\omega t} + \underline{A}_0^* e^{i\omega t}) (\underline{B}_0 e^{-i\omega t} + \underline{B}_0^* e^{i\omega t})$$

offensichtlich gerad

$$\underline{\langle \operatorname{Re} A(t) \operatorname{Re} B(t) \rangle} = \frac{1}{4} (\underline{A}_0 \underline{B}_0^* + \underline{A}_0^* \underline{B}_0) = \underline{\frac{1}{2} \operatorname{Re} (\underline{A} \cdot \underline{B}^*)}. \quad (38.4)$$

Die mittlere abgestrahlte ^{Leistung} Energie pro Raumwinkel ist nach (38.3) und der Larmor'schen Formel (31.25)

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \dot{\underline{v}}^2 \sin^2 \theta = \frac{c}{8\pi} |\underline{E}_0|^2 \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2 \theta. \quad (38.5)$$

Dabei ist θ der Winkel zwischen der Beobachtungsdichtung und der Beschleunigung, $\theta = \angle(\underline{E}, \underline{n})$.

Der einfallende Energiefluss pro Flächen- und Zeiteinheit ist gleich dem zeitgemittelten Poynting-Vektor für die ebene Welle, also nach (38.4) gleich $(c/8\pi) \cdot |\underline{E}_0|^2$. Der differentielle Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega$ ist definiert durch:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{Abgestrahlte Energie} / (\text{Zeiteinheit} - \text{Raumwinkel})}{\text{Einfallender Energiefluss}}. \quad (38.6)$$

Deshalb ist der Wirkungsquerschnitt an einem freien Elektron

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2 \theta. \quad (38.7)$$

unabhängig von ω

Dies ist der sog. Thomson-Querschnitt.

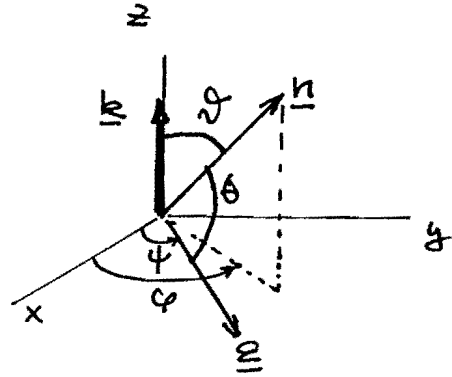
Die Welle falle in der z-Richtung ein und der Polarisationsvektor bilde einen Winkel ψ mit der x-Achse (s. Fig.).

Nun ist

$$\cos \theta = (\underline{n} \cdot \underline{e}),$$

$$\underline{n} = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta),$$

$$\underline{e} = (\cos \psi, \sin \psi, 0).$$



Also

$$\cos \theta = \sin \vartheta (\cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi) = \sin \vartheta \cos(\varphi - \psi).$$

Damit

$$\sin^2 \theta = 1 - \sin^2 \vartheta \cos^2(\varphi - \psi). \quad (38.8)$$

Für unpolarisierte ^{einfallende} Strahlung müssen wir über ψ mitteln und erhalten

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \vartheta). \quad (38.9)$$

verw.-verw. symmetrisch

Der totale Thomson-Querschnitt ist

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 = 0.665 \times 10^{-24} \text{ cm}^2 \quad (\text{für Elektronen}). \quad (38.10)$$

Die Grösse

$$\frac{e^2}{mc^2} = 2.82 \times 10^{-13} \text{ cm} \quad (38.11)$$

ist der sog. klassische Elektronenradius.

Die Quantenelektrodynamik zeigt, dass diese Formel nur für "tiefe" Frequenzen gilt: $\hbar\omega \ll mc^2$.

§ 39. Elastische und inelastische Streuung an quantisierten Ladungen

Nun studieren wir allgemeiner die Streuung einer ebenen Welle an einem System von fixen (quasifixen) Ladungen e_j (Ortsvektor \underline{x}_j). Als konkretes System kann man sich z.B. die Streuung von Röntgenstrahlen an den Elektronen

eines Atoms vorstellen.

Die einfallende Welle sei wieder

$$\underline{E}(\underline{x}, t) = E_0 \underline{\epsilon} e^{i(\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega t)} \quad (39.1)$$

Nach ^(Q.4.30) (31.22) erzeugen die beschleunigten Ladungen für $v_j \ll c$ das folgende Strahlungsfeld

$$\underline{E}_s(\underline{x}, t) = \frac{1}{c} \sum_j q_j \frac{1}{R_j} [\underline{n} \wedge (\underline{n} \wedge \dot{\underline{\beta}}_j)]_{\text{ret}} \quad (39.2)$$

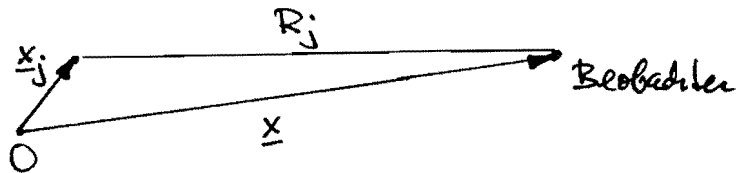
Aber

$$\dot{\underline{\beta}}_j = \frac{1}{c} \dot{\underline{v}}_j = \frac{e_j}{m_j c} E_0 \underline{\epsilon} e^{i(\underline{k} \cdot \underline{x}_j - \omega t)} \quad (39.3)$$

Also

$$\underline{E}_s(\underline{x}, t) = \frac{E_0}{c^2} \underline{n} \wedge (\underline{n} \wedge \underline{\epsilon}) \cdot \sum_j \frac{e_j^2}{m_j} \frac{1}{R_j} \exp[i\underline{k} \cdot \underline{x}_j - i\omega(t - \frac{R_j}{c})] \quad (39.4)$$

Mit genügender Genauigkeit ist (s. Fig.):



$$R_j = |\underline{x} - \underline{x}_j| \approx |\underline{x}| - \underline{n} \cdot \underline{x}_j$$

Wägenwert ab

Also ($|\underline{x}| = r$):

$$\underline{E}_s(\underline{x}, t) = \frac{E_0}{c^2} \underline{n} \wedge (\underline{n} \wedge \underline{\epsilon}) e^{-i\omega(t - r/c)} \frac{1}{r} \sum_j \frac{e_j^2}{m_j} e^{-i\varphi \cdot \underline{x}_j} \quad (39.5)$$

wo

$$\varphi = \frac{\omega}{c} \underline{n} - \underline{k} \quad (39.6)$$

ist. Wie im letzten Abschnitt erhalten wir für den Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \sum_j \frac{e_j^2}{m_j c^2} e^{i\varphi \cdot \underline{x}_j} \right|^2 \sin^2 \theta \quad (39.7)$$

Diese Gleichung setzt voraus, dass die Ladungen frei sind. Elektronen in einem Atom sind nicht frei. Falls aber die Frequenz der einfallenden Strahlung gross ist verglichen zu den charakteristischen Frequenzen der Übergangsenergien, dann können wir die Elektronen als frei behandeln. Deshalb ist die Formel (39.7) für Röntgenstreuung an Atomen anwendbar. Dazu muss man allerdings (39.7) noch über die Positionen \underline{x}_j mitteln.

A. Kohärente und inkohärente Streuung

Nun diskutieren wir (39.7) (eventuell gemittelt). Die folgenden Überlegungen spielen bei allen Streuprozessen an gebundenen Systemen eine Rolle, da auch materielle Teilchen eine Wellennatur haben.

Der Wirkungsquerschnitt hängt stark von $|q|$ ab. Die Grössenordnung der $|\underline{x}_j|$ ist gleich der Dimension a des gebundenen Systems. Der Wirkungsquerschnitt ist sehr verschieden für $qa \ll 1$ und $qa \gg 1$, wie wir sehen werden. Sei $\vartheta = \angle(\underline{k}, \underline{n})$ der Streuungswinkel. Es ist

$$q^2 = \left(\frac{\omega}{c} \underline{n} - \underline{k} \right)^2 = 2k^2(1 - \cos\vartheta) = 4k^2 \sin^2 \vartheta / 2,$$

d.h.

$$q = 2k \sin \vartheta / 2. \quad (39.8)$$

Falls also $ka \ll 1$ ist so ist $qa \ll 1$ für alle Streuwinkel ϑ . Im umgekehrten Fall $ka \gg 1$ ist qa nur in der Vorwärts^{Kegel}richtung $\vartheta < \vartheta_c \sim 1/ka$ viel kleiner als 1 und wird bei grösseren Winkeln schliesslich viel grösser als 1.

Nun sind aber für $qa \ll 1$ die Exponentialfaktoren $e^{i\varphi \cdot \underline{x}_j}$ in (39.7) sehr nahe bei 1 und es ist deshalb in dieser Situation:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{qa \ll 1} \approx \left| \sum_j \frac{e_j^2}{m_j c^2} \right|^2 \sin^2 \theta. \quad (39.9)$$

Für ein Atom mit Z Elektronen ist insbesondere

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{qa \ll 1} \approx \underset{\uparrow}{Z^2} \left(\frac{e^2}{m c^2} \right)^2 \sin^2 \theta, \quad (39.10)$$

Die Wirkung der Z Elektronen ist also kohärent: der Wirkungsquerschnitt ist gleich Z^2 mal dem 1-Teilchen Querschnitt.

Im anderen Grenzfall $qa \gg 1$ sind die Exponenten ^{in (39.7)} sehr groß und haben sehr unterschiedliche Werte. Die schnell oszillierenden Kreuzterme im Quadrat der Summe werden sich deshalb zu Nullmitteln. Nur die Diagonalterme werden überleben und wir erhalten deshalb

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{qa \gg 1} \approx \sum_j \left(\frac{e_j^2}{m_j c^2} \right)^2 \sin^2 \theta. \quad (39.11)$$

An Stelle von (39.10) haben wir jetzt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{qa \gg 1} \approx \underset{\uparrow}{Z} \left(\frac{e^2}{m c^2} \right)^2 \sin^2 \theta. \quad (39.12)$$

In diesem Fall superponieren sich die Beiträge der einzelnen Elektronen inkohärent.

In der Quantenmechanik lernt man, dass für ein Atom (im Fermi-Thomas Modell)

$$a \approx 1.4 a_0 Z^{-1/3} \quad (39.13)$$

ist, wo $a_0 = \hbar^2 / m e^2$ der Bohrsche Radius des H-Atoms ist. Numerisch erhält man

$$a_c \approx Z^{1/3} / \hbar \omega \text{ (keV)}. \quad (39.14)$$

Die diskutierten Verhältnisse beobachtet man tabächlich bei der Streuung von Röntgenstrahlung an Atomen. Diesen Fall wollen wir noch etwas näher untersuchen.

Nach (39.7) gilt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\theta \left| \sum_{j=1}^Z e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}_j} \right|^2. \quad (39.15)$$

Den letzten Faktor (Strukturfaktor) wollen wir noch über die Positionen \mathbf{x}_j mittels. Sei $w(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_Z) d^3x_1 \dots d^3x_Z$ das Wahrscheinlichkeitsmass im Ortsraum für die Z Elektronen. Es sei

$$F^2(\mathbf{q}) = \int \left| \sum_{j=1}^Z e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}_j} \right|^2 w(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_Z) d^3x_1 \dots d^3x_Z \quad (39.16)$$

den sog. inelastische Formfaktor. Dann lautet der (gemittelte) inelastische Querschnitt

$$\left| \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Thomson}} \cdot F^2(\mathbf{q}), \quad (39.17) \right.$$

Diese allgemeine Form (Wirkungsquerschnitt am isolierten Einzelsystem mal Strukturfaktor) ist für viele Streuprobleme charakteristisch. Sie kann dazu benutzt werden, um aus gemessenen Querschnitten etwas über die Struktur des Systems zu erfahren.

Nach (39.16) ist natürlich

$$F^2(\mathbf{0}) = Z^2. \quad (39.18)$$

Wir spalten (39.17) in die diagonalen und nicht diagonalen Terme auf:

$$F^2(\mathbf{q}) = Z + Z(Z-1) P(\mathbf{q}), \quad (39.19)$$

wobei

$$Z(Z-1) P(\mathbf{q}) = \sum_{i \neq j} \int e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)} w_{ij}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) d^3x_i d^3x_j. \quad (39.20)$$

Dabei ist

$$w_{ij}(\underline{x}_i, \underline{x}_j) = \int \prod_{k \neq i, j}^Z dx_k W(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_Z) \quad (39.21)$$

die Wahrscheinlichkeitsverteilung für zwei Elektronen. Aus dem Riemann-Lebesgue Lemma (S. 228) folgt

$$\lim_{|q| \rightarrow \infty} P(q) = 0, \quad \text{↳ s. MMP}$$

also

$$\lim_{|q| \rightarrow \infty} P^2(q) = Z, \quad (39.22)$$

wie erwartet. Für hohe Impulsüberträge und $t \rightarrow \infty$ diskreten Anregungsenergien (kiefinelastischer Bereich) wird also der Wirkungsquerschnitt konstant und zwar gleich Z mal dem Einteilchen-Querschnitt. (Deshalb wurden die Stanford Messungen der kiefinelastischen Elektronenstreuung an Nucleonen als Evidenz dafür angesehen, dass das Nucleon aus "Punktteilchen" (Partonen) aufgebaut ist.)

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung für ein Elektron ist

$$w_i(\underline{x}_i) = \int W(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_Z) \prod_{k \neq i}^Z dx_k. \quad (39.23)$$

Wir definieren die Korrelationen c_{ij} durch

$$w_{ij}(\underline{x}_i, \underline{x}_j) = w_i(\underline{x}_i) w_j(\underline{x}_j) + c_{ij}(\underline{x}_i, \underline{x}_j). \quad (39.24)$$

Dann ist

$$Z(Z-1)P(q) = \sum_{i \neq j} F_i(q) F_j^*(q) + \sum_{i, j} C_{ij}(q), \quad (39.25)$$

$$\text{wo} \quad F_i(q) = \int w_i(\underline{x}) e^{i q \cdot \underline{x}} d^3x \quad (39.26)$$

$$\text{und} \quad C_{ij}(q) = \int c_{ij}(\underline{x}_i, \underline{x}_j) e^{i q \cdot (\underline{x}_i - \underline{x}_j)} d^3x_i d^3x_j. \quad (39.27)$$

§. Elastische Streuung

Für die Bestimmung des elastischen Streuquerschnittes ist derjenige Teil der gestreuten Welle (39.5) auszuwählen, der die Frequenz ω besitzt. Der Ausdruck (39.5) hängt von der Zeit über den Faktor $e^{i\omega t}$ ab; ferner hängt auch die Summe $\sum_j \exp(-iq \cdot x_j)$ von der Zeit ab. Die letztere Zeitabhängigkeit führt dazu, dass im Felde der gestreuten Welle neben der Frequenz ω noch andere Frequenzen enthalten sind.

Wir erhalten offenbar den Anteil des Feldes der die Frequenz ω besitzt, wenn wir den Faktor $\sum_j \exp(-iq \cdot x_j)$ über die Zeit mitteln. Also ist

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{el} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Th} \left| \overline{\sum_j e^{-iq \cdot x_j}} \right|^2. \quad (39.28)$$

Wir ersetzen das Zeitmittel durch das räumliche Mittel (siehe die quantenmech. Diskussion im Skriptum QM II).

$$\begin{aligned} \overline{\sum_j e^{-iq \cdot x_j}} &= \int \prod_{k=1}^Z dx_k W(x_1, \dots, x_Z) \sum_{j=1}^Z e^{-iq \cdot x_j} \\ &= \sum_{j=1}^Z F_j^*(q). \end{aligned} \quad (39.29)$$

Also

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{el} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Th} F_{el}^2(q), \quad (39.30)$$

wobei

$$F_{el}(q)^2 = \left| \sum_{j=1}^Z F_j(q) \right|^2. \quad (39.31)$$

Diesen elastischen Formfaktor kann man wie folgt interpretieren. Die Ladungsdichte der Z Elektronen ist

$$\varrho(\underline{x}) = e \sum_{j=1}^Z \delta^3(\underline{x} - \underline{x}_j) \quad (39.32)$$

und der zugehörige Mittelwert ist

$$\begin{aligned} \langle \varrho \rangle(\underline{x}) &= \int e \sum_j \delta^3(\underline{x} - \underline{x}_j) W(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_Z) \prod_{k=1}^Z d\underline{x}_k \\ &= e \sum_{j=1}^Z w_j(\underline{x}). \end{aligned} \quad (39.33)$$

Die Fouriertransformierte dieses Mittelwertes ist nach (39.26)

$$\langle \hat{\varrho} \rangle(\underline{q}) = e \sum_j F_j(\underline{q}).$$

Also ist

$$\left| e^2 F_{el}(\underline{q})^2 = |\langle \hat{\varrho} \rangle(\underline{q})|^2 \right., \quad (39.34)$$

d.h. der elastische Formfaktor ist gleich dem Betragquadrat der Fouriertransformierten der mittleren Ladungsverteilung (bis auf e^2).

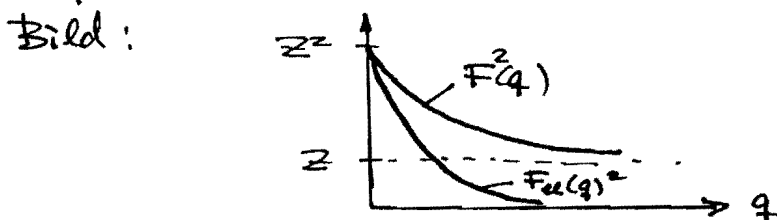
In der Vorwärtsrichtung ($\underline{q} = 0$) ist nach (39.31) und (39.26) $F_{el}(0) = 1$ und folglich ist die Streuung wie erwartet kohärent:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{el}(\underline{0}) = \sum_{m=1}^Z \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Th}. \quad (39.35)$$

Nach dem Riemann-Lebesgue Lemma ist andererseits

$$\lim_{|\underline{q}| \rightarrow \infty} F_{el}(\underline{q}) = 0. \quad (39.36)$$

Qualitativ haben wir also für die beiden Formfaktoren $F(\underline{q})^2$ in (39.17) und $F_{el}(\underline{q})^2$ in (39.30) das folgende Bild:



Nehme auch, dass nach (39.25) und (39.31)

$$Z(Z-1)P(q) = F_{el}^2(q) - \sum_{j=1}^Z |F_j(q)|^2 + \sum_{i \neq j} C_{ij}(q) \quad (39.37)$$

ist. Vernachlässigt man Korrelationen, so fällt der letzte Term weg und es ist dann

$$F(q) = F_{el}^2(q) + \left(Z - \sum_{j=1}^Z |F_j(q)|^2 \right). \quad (39.38)$$

(ohne Korrelationen)

Die Formeln in diesem Abschnitt gelten auch in der Quantentheorie (s. QM II), wobei die Quantenmechanik zusätzlich leistet, wie die Wahrscheinlichkeitsverteilung w zu berechnen ist.

Das diskutierte Beispiel zeigt, wie man durch Streuexperimente Informationen über die Struktur eines komplexen Systems erhalten kann. Dabei ist wesentlich, dass die Wellenlänge der "Sonde" (hier der Röntgenstrahlung) kleiner als die Dimensionen des Objektes ist (sonst wüsste man nur die Werte der Formfaktoren bei $q \approx 0$). Deshalb benötigt man zur Erforschung der subatomaren Strukturen immer höhere Energien. Leider ist dies mit ständig steigenden Kosten verbunden.

* * *

§40 Streuung in Gasen und Flüssigkeiten

In diesem Abschnitt lösen wir die folgende Aufgabe. Gegeben sei ein homogenes und isotropes Dielektrikum mit DK $\epsilon_0(\omega)$ (unabhängig von \underline{x}). In diesem Medium beobachten wir eine ebene Welle, welche auf eine lokalisierte Inhomogenität des Dielektrikums auffällt. Von dieser werden elektromagnetische Ebenfelder ausgehen. Wir wollen die abgestrahlte

Energie und den Wirkungsquerschnitt für den Streuprozess berechnen. Wichtige Anwendungen sind:

- (i) Streuung von Licht an Staubpartikeln in der Luft;
- (ii) Streuung von Licht an den Lichtschwankungen eines Gases (Lorentz-Theorie).

A. Allgemeine Theorie

Die Maxwell-Gleichungen lauten, bei verschwindender Magnetisierung ($\mu=1$) und in Abwesenheit Leitungs Ladungen und Leitungsströme,

$$\operatorname{div} \underline{B} = 0 \quad , \quad \operatorname{rot} \underline{E} - \frac{i\omega}{c} \underline{B} = 0 \quad , \quad (40.1)$$

$$\operatorname{div} (\epsilon \underline{E}) = 0 \quad , \quad \operatorname{rot} \underline{B} = -\frac{i\omega}{c} \epsilon \underline{E} \quad .$$

Dabei sind $\underline{E}(x, \omega)$, $\underline{B}(x, \omega)$ die bez. t Fouriersummenformierten Felder.

In unserer Situation ist

$$\underline{E}(x, \omega) = \underline{E}_0(\omega) + \underline{E}_1(x, \omega) \quad , \quad (40.2)$$

wobei $\underline{E}_1(x, \omega)$ den Zusatz (zur \underline{E}_0) der lokalisierten Inhomogenität bezeichnet.

Wie immer, stellen wir die Felder durch Potentiale dar

$$\underline{B} = \operatorname{rot} \underline{A} \quad , \quad \underline{E} = \frac{i\omega}{c} \underline{A} - \operatorname{grad} \varphi \quad , \quad (40.3)$$

Für diese verlangen wir die Nebenbedingung

$$\operatorname{div} \underline{A} - \frac{i\omega}{c} \epsilon_0 \varphi = 0 \quad . \quad (40.4)$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$\underbrace{\operatorname{rot} \operatorname{rot} \underline{A}}_{\operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{A} - \Delta \underline{A}} = -\frac{i\omega}{c} \epsilon \underline{E} = -\frac{i\omega}{c} \epsilon_0 \underline{E} - \frac{i\omega}{c} \epsilon_1 \underline{E} \quad ;$$

\uparrow
 $\frac{i\omega}{c} \underline{A} - \operatorname{grad} \varphi$

$\underbrace{\epsilon_1 \underline{E}}_{4\pi \underline{P}_1}$

$\epsilon_1 \underline{E}$ ist gleich 4π mal die zusätzliche Polarisationsdichte der lokalisierten Inhomogenität, welche wir mit \underline{P}_1 bezeichnen. Benutzen wir noch (40.4), so kommt

$$\left[\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_0(\omega) \right] \underline{A} = \frac{4\pi i \omega}{c} \underline{P}_1. \quad (40.5)$$

Die Gleichung für φ erhalten wir wie folgt:

$$0 = \operatorname{div}(\epsilon \underline{E}) = \operatorname{div}(\epsilon_0 \underline{E} + 4\pi \underline{P}_1) = \epsilon_0 \left(\underbrace{i \frac{\omega}{c} \operatorname{div} \underline{A} - \Delta \varphi}_{-\epsilon_0 \frac{\omega^2}{c^2} \varphi} + 4\pi \operatorname{div} \underline{P}_1 \right)$$

$$\left[\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_0 \right] \varphi = \frac{4\pi}{\epsilon_0} \operatorname{div} \underline{P}_1. \quad (40.6)$$

Mit der Gleichung

$$\underline{A} = i - \lambda \frac{\omega}{c} \epsilon_0 \underline{Z} \quad (40.7)$$

definieren wir den Hertz'schen Vektor \underline{Z} . Nach (40.4) ist dann

$$\varphi = -\operatorname{div} \underline{Z} \quad (40.8)$$

und für \underline{Z} gilt nach (40.5) die Gleichung

$$\left[(\Delta + k^2) \underline{Z} = -\frac{4\pi}{\epsilon_0} \underline{P}_1 \right], \quad (40.9)$$

wobei

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n_0^2(\omega), \quad n_0^2 = \epsilon_0(\omega) \quad (40.10)$$

ist. Die Felder \underline{E} und \underline{B} ergeben sich aus \underline{Z} gemäß (s. (40.3), (40.7) und (40.8)):

$$\left[\underline{B} = -i \frac{\omega}{c} \epsilon_0 \operatorname{rot} \underline{Z}, \quad \underline{E} = k^2 \underline{Z} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{Z} \right]. \quad (40.11)$$

Wir verwandeln (40.9) in eine Integralgleichung. (Beachte, dass die rechte Seite von (40.9) ein Funktional von \underline{Z} ist:

$\underline{P}_1 = \frac{\epsilon_1}{4\pi} \underline{E}$, mit \underline{E} in (40.11).) Dazu benötigen wir die

"richtige" Green'sche Funktion G für den Operator $\Delta + k^2$. Die Fourier-Transformation von

$$(\Delta + k^2) G = \delta \quad (40.12)$$

lautet

$$(-p^2 + k^2) \tilde{G}(p) = 1.$$

Eine Lösung davon ist

$$\tilde{G}(p) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{k^2 + i\epsilon - p^2},$$

wobei rechts der schwache Limes in \mathcal{S}' zu verstehen ist. Damit ist also

$$G = F^{-1}[\tilde{G}] = \frac{1}{(2\pi)^3} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|p| < R} \frac{e^{-ip \cdot x}}{k^2 + i\epsilon - p^2} d^3 p.$$

Aber

$$\int_{|p| < R} \frac{e^{-ip \cdot x}}{k^2 + i\epsilon - p^2} d^3 p = \int_0^R \frac{d|p| p^2}{k^2 + i\epsilon - p^2} 2\pi \int_{-1}^{+1} d\zeta \underbrace{e^{-i|p|\tau \zeta}}_{\frac{e^{-i|p|\tau} - e^{i|p|\tau}}{-2i|p|\tau}}$$

deshalb ist

$$G(x) = \frac{1}{i} \frac{1}{\tau} \frac{1}{(2\pi)^2} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{dp \cdot p}{k^2 + i\epsilon - p^2} (e^{ip\tau} - e^{-ip\tau}).$$

Mit dem Residuensatz erhält man

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{dp \cdot p}{k^2 + i\epsilon - p^2} (e^{ip\tau} - e^{-ip\tau}) = -i\pi \cdot e^{ik\tau}$$

und damit

$$\boxed{G(x) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (r = |x|)} \quad (40.13)$$

Diese Green'sche Funktion führt, wie gewünscht, zu auslaufenden Wellen. Die gesuchte Integralgleichung lautet also:

$$\underline{\underline{Z}}(\underline{x}) = \underline{\underline{Z}}^{(0)} + \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \int \frac{e^{i\mathbf{k}|\underline{x}-\underline{x}'|}}{|\underline{x}-\underline{x}'|} \underline{\underline{P}}_1(\underline{x}') d\underline{x}', \quad (40.14)$$

wobei $\underline{\underline{Z}}^{(0)}$ die einfallende Welle bezeichnet. Der zweite Term, wir nennen ihn $\underline{\underline{Z}}^{(s)}$, beschreibt das Streufeld. In grossen Abständen R von der Inhomogenität ist

$$\underline{\underline{Z}}^{(s)}(\underline{x}) = \frac{e^{i\mathbf{k}R}}{R} \frac{1}{\epsilon_0} \int \underline{\underline{P}}_1(\underline{x}') e^{-i\mathbf{k}' \cdot \underline{x}'} d\underline{x}', \quad (40.15)$$

wobei $\underline{\underline{k}}' = \underline{\underline{k}} \cdot \underline{\underline{n}}$, $\underline{\underline{n}} = \underline{\underline{R}}/|\underline{\underline{R}}|$ (40.16)

ist. Die Streufelder ergeben sich aus (40.11). Mit Hilfe von

$$\underline{\nabla} \left(\frac{e^{i\mathbf{k}R}}{R} \right) \approx i\mathbf{k} \frac{e^{i\mathbf{k}R}}{R} \underline{\underline{n}}$$

finden wir

$$\begin{cases} \underline{\underline{B}}^{(s)} = \frac{k^2}{n_0} \frac{e^{i\mathbf{k}R}}{R} \underline{\underline{n}} \wedge \tilde{\underline{\underline{P}}}_1(\underline{\underline{k}}') \\ \underline{\underline{E}}^{(s)} = \frac{k^2}{n_0^2} \frac{e^{i\mathbf{k}R}}{R} (\underline{\underline{n}} \wedge \tilde{\underline{\underline{P}}}_1(\underline{\underline{k}}')) \wedge \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{\frac{1}{n_0} \underline{\underline{B}}^{(s)} \wedge \underline{\underline{n}}}} \end{cases} \quad (40.17)$$

Dabei ist $\tilde{\underline{\underline{P}}}_1$ die Fourier-Transformierte von $\underline{\underline{P}}_1$:

$$\tilde{\underline{\underline{P}}}_1 = \int \underline{\underline{P}}_1(\underline{x}') e^{-i\mathbf{k}' \cdot \underline{x}'} d\underline{x}'. \quad (40.18)$$

Nehmen wir den Zeitfaktor $e^{-i\omega t}$ wieder mit, so ist also

$$\begin{cases} \underline{\underline{B}}^{(s)} = \frac{1}{R n_0} \underline{\underline{n}} \wedge \tilde{\underline{\underline{P}}}_1(\underline{\underline{k}}', t_{\text{ret}}) \\ \underline{\underline{E}}^{(s)} = \frac{1}{n_0} \underline{\underline{B}}^{(s)} \wedge \underline{\underline{n}} \end{cases} \quad (40.19)$$

wobei $t_{\text{ret}} = t - \frac{R}{c/n_0}$ (40.20)

die retardierte Zeit ist.

Interessieren wir uns für die Polarisation der auslaufenden Strahlung, so haben wir $\underline{\epsilon}' \cdot \underline{E}^{(s)}$ zu berechnen. Wegen $\underline{\epsilon}' \cdot \underline{n} = 0$ ist

$$\underline{\epsilon}' \cdot \underline{E}^{(s)} = \frac{1}{R} \frac{k^2}{n_0} \underline{\epsilon}' \cdot \underline{\tilde{P}}_1. \quad (40.21)$$

Der zugehörige Poynting Vektor ist

$$\underline{S} = \frac{c}{4\pi} n_0 |\underline{\epsilon}' \cdot \underline{E}^{(s)}|^2 \underline{n} = \frac{1}{R^2} \frac{c}{4\pi} n_0 \left(\frac{k^2}{n_0}\right)^2 |\underline{\epsilon}' \cdot \underline{\tilde{P}}_1|^2 \underline{n}.$$

Die zeitlich gemittelte Intensität der gestreuten Welle ist deshalb

$$\boxed{\frac{dI}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} \frac{k^4}{n_0^3} \langle |\underline{\epsilon}' \cdot \underline{\tilde{P}}_1|^2 \rangle}. \quad (40.22)$$

B. Streuung von langen Wellen

Wir nehmen jetzt an, dass die Wellenlänge λ der einfallenden Welle viel grösser ist als die Dimension des Systems. Dann dürfen wir in (40.18) den Exponentialfaktor durch 1 ersetzen (Dipolnäherung) und wir erhalten

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} \frac{k^4}{n_0^3} \langle |\underline{\epsilon}' \cdot \underline{P}_1|^2 \rangle, \quad (40.23)$$

wobei

$$\underline{P}_1 = \int \underline{P}_1(\underline{x}') d^3x' \quad (40.24)$$

das Dipolmoment der Inhomogenität ist. Ferner ist $n_0(\omega) \approx n_0(0)$.

Die Intensität ist also proportional zu k^4 ($\propto \lambda^{-4}$).

Als Beispiel betrachten wir die Streuung an einer dielektrischen Kugel mit dem Radius a . Da $\lambda \gg a$ ist, dürfen wir \underline{P}_1 statisch berechnen. Das Dipolmoment ist nach (11.9)

$$\underline{P}_1 = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} a^3 \underline{E}^{(0)}, \quad (40.25)$$

wobei $\underline{E}^{(0)}$ das einfallende elektrische Feld ist. Damit ist der Wirkungsquerschnitt

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = k^4 a^6 \left| \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} \right|^2 |\underline{e} \cdot \underline{E}|^2}, \quad (40.26)$$

wobei \underline{e} der Polarisationsvektor der einfallenden Welle ist.

Absorption

Die Energie, die pro Zeiteinheit von ^{einem} Teilchen absorbiert wird, ist $\langle \dot{Q} \rangle = \dot{\underline{P}} \cdot \underline{E}^{(0)}$. Benutzen wir die komplexe Darstellung der Größen, so gilt im Zeitmittel (s. (38.4)):

$$\begin{aligned} \langle \dot{Q} \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\dot{\underline{P}} \cdot \underline{E}^{(0)*}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [V \alpha(\omega) \underline{E}^{(0)}(-i\omega) \underline{E}^{(0)*}] \\ &= \frac{\omega}{2} V \operatorname{Im} \alpha |\underline{E}^{(0)}|^2, \end{aligned} \quad (40.27)$$

Dabei ist V das Volumen des Teilchens und α die Polarisierbarkeit, definiert durch

$$\underline{P} = V \alpha(\omega) \underline{E}^{(0)}, \quad (40.28)$$

Der Absorptionsquerschnitt lautet deshalb

$$\underline{\sigma}_{\text{abs}} = \frac{\langle \dot{Q} \rangle}{\frac{c}{4\pi} \frac{1}{2} |\underline{E}^{(0)}|^2} = \frac{4\pi}{c} \omega V \operatorname{Im} \alpha, \quad (40.29)$$

Für eine dielektrische Kugel ist nach (40.25)

$$\alpha = \frac{3}{4\pi} \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} = \frac{3}{4\pi} \frac{(\operatorname{Re} \epsilon - 1 + i \operatorname{Im} \epsilon)(\operatorname{Re} \epsilon + 2 - i \operatorname{Im} \epsilon)}{(\operatorname{Re} \epsilon + 2)^2 + (\operatorname{Im} \epsilon)^2} \quad (40.30)$$

und folglich

$$\operatorname{Im} \alpha = \frac{3}{4\pi} \cdot 3 \cdot \frac{\operatorname{Im} \epsilon}{(\operatorname{Re} \epsilon + 2)^2 + (\operatorname{Im} \epsilon)^2}, \quad (40.31)$$

*) siehe S. 226

Also ist ($V = \frac{4\pi}{3} a^3$):

$$\sigma_{\text{abs}} = 12\pi \frac{\omega}{c} a^3 \frac{\text{Im } \epsilon}{(\text{Re } \epsilon + 2)^2 + (\text{Im } \epsilon)^2}, \quad (40.32)$$

Der Absorptionsquerschnitt ist also für lange Wellen proportional zu ω .

C. Bornsche Näherung

In der Integralgleichung (40.14) ist rechts $\underline{P}_1(\underline{x}') = \frac{\epsilon_1}{4\pi} \underline{E}(\underline{x}')$. In guter Näherung können wir darin \underline{E} durch das einlaufende Feld $\underline{E}^{(0)}$ ersetzen. Dies bedeutet, dass wir die Rückwirkung des Streufeldes vernachlässigen (Born'sche Näherung). In dieser Näherung ist

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{P}}_1(\underline{k}') &= \int d^3x' e^{-i\underline{k}' \cdot \underline{x}'} \frac{\epsilon_1}{4\pi} \underline{E}^{(0)}(\underline{x}') \\ &= \frac{1}{4\pi} \tilde{\underline{E}}_1(\underline{k}' - \underline{k}) \underline{e}. \end{aligned} \quad (40.33)$$

: normierte Welle

Nach (40.22) ist deshalb der Wirkungsquerschnitt*)

$$\frac{d\sigma^{(\text{Born})}}{d\Omega} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 n_0^2 |\underline{e}' \cdot \underline{e}|^2 |\tilde{\underline{E}}_1(\underline{k}' - \underline{k})|^2. \quad (40.34)$$

(Daraus erhalten wir für lange Wellen wieder (40.26), wenn wir dort $\epsilon + 2$ durch 3 ersetzen.)

In der Dipolnäherung wird daraus

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 n_0^2 |\underline{e}' \cdot \underline{e}|^2 \left| \int \epsilon_1(\underline{x}') d^3x' \right|^2. \quad (40.35)$$

*) Der Energiefluss der einfallenden Welle ist dem Betrage nach gleich $\frac{1}{2} \frac{c}{4\pi} n_0 |\underline{E}^{(0)}|^2 = \frac{1}{2} \frac{c}{4\pi} n_0$; zeitliches Mittel in (40.22) gibt ebenfalls Faktor $\frac{1}{2}$.

Integrieren wir diesen Ausdruck über alle Richtungen und summieren wir auch über die beiden Polarisationsrichtungen, so erhalten wir

$$\sigma = \frac{1}{6\pi} \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 n_0^2 \left| \int \epsilon_1(x') d^3x' \right|^2, \quad (40.36)$$

D. Streuung an Dichteschwankungen

Collected Papers, Vol. 3
p. 287

In einem Gas geben die örtlichen Dichteschwankungen Anlass zur Streuung von Licht (A. Einstein).

Wir zerlegen das Medium in kleine Volumenelemente V , welche die folgenden Eigenschaften haben:

- (i) $N_V \gg 1$ (N_V : Teilchenzahl in V),
- (ii) $V \ll \lambda^3$ (λ : Wellenlänge). (40.37)

Eine solche Einteilung ist für sichtbares Licht und nicht zu kleine Dichten möglich (im allgemeinen aber nicht für Röntgenstrahlung).

Wir nehmen an, dass die Schwankungen in verschiedenen Volumina unkorreliert sind

$$\langle \Delta N_V \cdot \Delta N_{V'} \rangle = 0 \quad \text{für } V \neq V'. \quad (40.38)$$

Der mittlere Brechungsindex sei n . Nach (40.36) ist der Wirkungsquerschnitt für die Lichtstreuung an einer mittleren Schwankung in V :

$$\sigma = \frac{1}{6\pi} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 n^2 V^2 \langle [\Delta n^2]^2 \rangle, \quad (40.39)$$

wo Δn^2 die Abweichung des Quadrates des Brechungsindex von seinem Mittelwert bezeichnet.

Es sei $n \approx 1$; dann können wir den Unterschied von lokalem und mittlerem Feld vernachlässigen. Nach (34.96)

ist dann

$$\epsilon(\omega) - 1 \simeq 4\pi\alpha(\omega) N_V / V, \quad (40.40)$$

wo $\alpha(\omega)$ die atomare Polarisierbarkeit ist. Folglich gilt

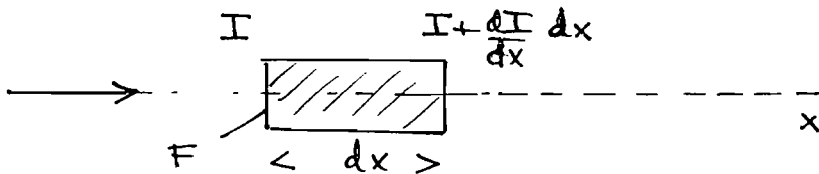
$$\Delta n^2 = 4\pi\alpha \Delta N_V / V \quad (40.41)$$

und damit

$$\sigma = \frac{1}{6\pi} (4\pi\alpha)^2 \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 \langle (\Delta N_V)^2 \rangle. \quad (40.42)$$

Streuoeffizient

Betrachten wir einen Lichtstrahl, welcher in der positiven x-Richtung fortbewegt (s. Fig.).



Die Intensität I ist definitionsgemäss die durch die Einheitsfläche F strömende Energie pro Zeiteinheit. Deshalb ist

$$IF - \left(I + \frac{dI}{dx} dx\right) F = - \frac{dI}{dx} \underbrace{F dx}_V = + \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle,$$

d.h.

$$V \frac{dI}{dx} = - \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle,$$

wo $\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle$ die zeitlich gemittelte abgestrahlte Energie des Volumen V ist; diese ist gleich $s \cdot I$.
(Extinktionskoeff.)

Der Streukoeffizient ist definiert durch

$$- \frac{dI}{dx} = s \cdot I \quad ([s] = \text{Länge}^{-1}). \quad (40.43)$$

Nach dem Gesagten ist $s = \sigma / V$, d.h.

$$s = \frac{1}{6\pi} \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 (4\pi\alpha)^2 \frac{\langle (\Delta N_V)^2 \rangle}{V} \quad (40.44)$$

oder, mit $\bar{N} = N_V / V$, $n^2 - 1 = 4\pi \alpha \bar{N}$,

$$s = \frac{1}{6\pi} \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 (n^2 - 1)^2 \frac{1}{\bar{N}^2} \frac{\langle (\Delta N_V)^2 \rangle}{V}. \quad (40.45)$$

In der statistischen Mechanik wird die folgende Schwankungsformel hergeleitet (s. SM-Skript, p. I. 50):

$$\langle (\Delta N_V)^2 \rangle = \frac{-k_T \cdot \bar{N}^2}{\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{N_V, T}}. \quad (40.46)$$

Für ideale Gase ($p = \bar{N} k_T = \frac{N_V \cdot k_T}{V}$) ist dies

$$\langle (\Delta N_V)^2 \rangle = \bar{N} \cdot V (= N_V). \quad (40.47)$$

Dieses Resultat werden wir unten elementar herleiten.

Setzen wir (40.46) in (40.45) ein, so erhalten wir schliesslich

$$s = \frac{1}{6\pi} \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 (n^2 - 1)^2 \frac{k_T}{-V \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{N_V, T}}. \quad (40.48)$$

Speziell für ein ideales Gas ist (Einstein - Smoluchowski)
↑ 1910

$$s = \frac{1}{6\pi} \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 (n^2 - 1)^2 \frac{1}{N}. \quad (40.49)$$

Mit dieser Formel kann man die Avogadro'sche Zahl bestimmen. (Dies wird von Einstein im letzten Satz seiner Arbeit bemerkt.)

Bemerkungen.

- In der Dipolnäherung ist die Streuung proportional zu λ^{-4} : blaues Licht wird stärker gestreut als rotes. Deshalb die blaue Farbe des Himmels, die vom Streulicht herrührt, deshalb auch die rote Farbe der untergehenden Sonne, deren Strahlen die Atmosphäre streifend durchqueren, somit einen langen

Weg zurücklegen müssen und ihre Blau-Komponente verlieren.

2. Beim kritischen Punkt $\frac{\partial p}{\partial V} = 0$ werden die Schwankungen (40.46) unendlich gross und es tritt sehr starke Streuung, sog. kritische Opaleszenz auf. (Dann versagt aber die Born'sche Näherung.)
3. Für die Polarisationsverhältnisse (wichtig für die Bienen) siehe z.B. das Buch von H. Born über Optik.

Ergänzung: Dichteschwankung für ein ideales Gas

Wir betrachten ein Volumen V_0 mit N_0 Teilchen, welche unterscheidbar, statistisch unabhängig und homogen verteilt sind. V sei ein Teilvolumen; $\lambda = V/V_0$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmtes Teilchen sich in V befindet.

Die Wahrscheinlichkeit w_N , genau N (beliebige) Teilchen in V zu finden, ist

$$w_N = \frac{N_0!}{(N_0-N)!N!} \lambda^N (1-\lambda)^{N_0-N} \quad (40.50)$$

Wir betrachten die erzeugende Funktion

$$\chi(t) = \sum_{N=0}^{N_0} w_N t^N = (1-\lambda + t\lambda)^{N_0} \quad (40.51)$$

Es ist
$$\bar{N} = \sum_{N=0}^{N_0} N w_N = \left. \frac{\partial \chi}{\partial t} \right|_{t=1} = N_0 \lambda = N_0 \frac{V}{V_0} \quad (40.52)$$

und
$$\overline{N(N-1)} = \overline{N^2} - \bar{N} = \sum_{N=0}^{N_0} N(N-1) w_N = \left. \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \right|_{t=1} = N_0(N_0-1)\lambda^2, \quad (40.53)$$

Da andererseits
$$\overline{(\Delta N)^2} = \overline{(N-\bar{N})^2} = \overline{N^2} - \bar{N}^2,$$

so folgt
$$\overline{(\Delta N)^2} = \overline{N(N-1)} + \bar{N} - \bar{N}^2 = \underbrace{N_0 \lambda}_{\bar{N}} (N_0-1)\lambda + \bar{N} (1-N_0\lambda) = \bar{N} (1-\lambda) = \bar{N} \left(1 - \frac{V}{V_0}\right).$$

Hält man N_0/V_0 fest und lässt $V_0 \rightarrow \infty$ gehen, so erhalten wir das Resultat (40.47):
$$\overline{(\Delta N)^2} = \bar{N}. \quad (40.54)$$

§ 41. Beugung

Unter Beugung versteht man jede Abweichung der Lichtausbreitung vom geometrisch optischen Strahlengang. Beleuchtet man einen Körper, so wirft dieser in erster Näherung einen scharfen geometrischen Schatten. Bei genügend grossen Wellenlängen, oder genügend kleinen Dimensionen des Körpers, wird aber diese Näherung schlecht. Das Licht kann dann "um die Ecke" gehen.

Die Beugungserscheinungen werden durch die Wellentheorie vollauf erklärt. Es gibt allerdings nur sehr wenige Beispiele die man mathematisch exakt lösen kann.

Bei den Beugungserscheinungen haben wir es grundsätzlich mit Randwertproblemen zu tun. Es sind die Maxwell'schen Gleichungen mit vorgegebenen Singularitäten in den Lichtquellen und Randbedingungen auf den Schirmen und im Unendlichen zu lösen.

Aus Zeitgründen besprechen wir hier nur die Kirchhoff'sche Näherung. Für exakte Lösungen verweise ich auf die Optik von Sommerfeld, § 38.

Für das Weitere machen wir die folgenden Vereinfachungen, welche aber nicht wesentlicher Natur sind.

(i) Wir benutzen eine skalare Wellengleichung

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u = 0. \quad (41.1)$$

Diese soll überall ausserhalb von Schirmen und Lichtquellen gelten. Diese "skalare Vereinfachung" ist erlaubt, wenn wir uns nicht für die Polarisationsverhältnisse interessieren. Jede Komponente des elm. Feldes erfüllt ja im Vakuum diese Gleichung. Wir nehmen im übrigen an,

dass keine Dielektrika vorhanden sind; sonst müsste man c durch c/n ersetzen.

(ii) Wir betrachten immer monochromatisches Licht $u \propto e^{-i\omega t}$; dann lautet die Wellengleichung (41.1)

$$(\Delta + k^2)u = 0, \quad k = \frac{\omega}{c}. \quad (41.2)$$

A. Die Kirchhoffsche Näherung

Wir leiten zunächst eine nützliche mathematische Identität her. In der 2. Green'schen Formel

$$\int_D (v \Delta u - u \Delta v) dV = \int_{\partial D} (v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}) d\sigma$$

für ein Gebiet D mit glattem Rand ∂D setzen wir v gleich der Green'schen Funktion $G(\underline{x}-\underline{y})$ (s. (40.13)) zum Wellenoperator $\Delta + k^2$ in \mathbb{R}^3 :

$$G(\underline{x}-\underline{y}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\underline{x}-\underline{y}|}}{|\underline{x}-\underline{y}|} \quad (41.3)$$

und sparen für $\underline{y} \in D$ zunächst wieder eine kleine Kugel um \underline{y} aus. Da auf dieser Kugel mit Radius r

$$-\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial r} = \left(\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} \right) e^{ikr}$$

und $d\sigma = r^2 d\Omega$, folgt im Limes $r \rightarrow 0$

$$\int_{\partial D} (u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}) d\sigma = \begin{cases} u(\underline{y}), & \underline{y} \in D, \\ 0, & \underline{y} \notin D. \end{cases} \quad (41.4)$$

In einem konkreten Beugungsproblem wird ein Teil von

∞ im Unendlichen liegen. Um zu sehen, was in diesem Fall passiert, verlangen wir, dass die Lösung u des Beugungsproblems nur asymptotisch auslaufende Wellen hat, d.h. u soll sich asymptotisch wie e^{ikr}/r (und nicht wie e^{-ikr}/r) verhalten. Dann gilt

$$\left(v \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial v}{\partial t} \right) r^2 d\Omega \rightarrow 0 \quad \text{für } r \rightarrow \infty.$$

Deshalb müssen wir nur über die endlichen Teile der Oberfläche integrieren.

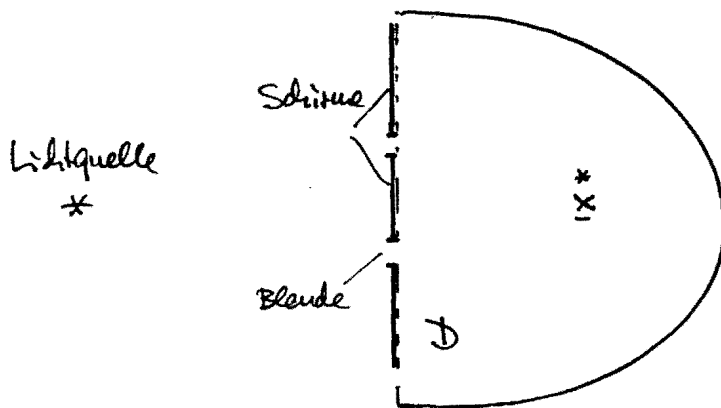
Die exakte Formel (41.4) drückt die gesuchte Funktion u durch die Randwerte von u und von $\frac{\partial u}{\partial n}$ aus und stellt natürlich keine Lösung des Problems dar. Sie bildet aber den Ausgangspunkt für die Kirchhoff'sche Näherung.

Das Beugungsproblem besteht im folgenden. Man möchte den Einfluss von (undurchsichtigen) Schirmen und Blenden auf die Lichtausbreitung bestimmen. Der ganze Raum ausserhalb des Materials der Schirme ist von der Lichterregung u erfüllt zu denken, die der Wellengleichung (41.2) genügt und in den Lichtquellen gewisse Singularitäten aufweist. Die Art dieser Singularitäten ist zunächst keineswegs bekannt, ebensowenig aber auch der genaue Einfluss der Schirme, d.h. die Grenzbedingungen, denen die Funktion u an der Oberfläche der Schirme zu genügen hat. (Es zeigt sich allerdings, dass die Beugungerscheinungen sehr unempfindlich auf die physikalische Beschaffenheit der Schirme sind.) Wäre beides bekannt, so hätte man ein Randwertproblem für die Wellengleichung mit vorgegebenen Singularitäten gegeben.

Kirchhoff ging von der Tatsache aus, dass bei grober Beobachtung das Licht sich von der Quelle bis zu den Schirmen

ungestört ausbreitet und erst hinter engen Blenden ein Einfluss der Schirmwände bemerkbar wird, indem die Licht-
erregung über die Schattenzone hinausgreift.

Um die Lichtintensität in einem Punkte x zu berechnen, der durch den Schirm mit Öffnungen von der Lichtquelle
gebeugt ist, dachte sich Kirchhoff diesen Aufpunkt von
einer Fläche umgeben, die an der von der Lichtquelle ab-
gewandten Seite des Schirmwände verläuft und die Blenden-
öffnungen glatt überbrückt (s. Fig.).



Es ist eine physikalisch vernünftige Aussage, dass in
erster Näherung die Erregung an der Rückseite des Schirmes
dauernd Null ist:

$$u=0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{auf der Rückseite des Schirmes} \quad (41.5)$$

Etwas gewagter ist die weitere Annahme, dass man bei
der Berechnung der Erregung im Punkte x mit Hilfe der
Formel (41.4) für die Teile der Fläche, welche die Blenden-
öffnungen überspannen, als Randwerte von u und $\frac{\partial u}{\partial n}$
die der ungestörten Lichtausbreitung entsprechenden Werte
nehmen darf; also für einen leitenden Punkt

$$u = u^0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u^0}{\partial n} \quad \text{an der Blendenöffnung,} \quad (41.6)$$

wobei

$$u^0 = A \frac{e^{i k r_1}}{r_1}, \quad r_1 = \text{Abstand zur Lichtquelle} \quad (41.7)$$

ist. Setzen wir diese Annahmen in (41.4) ein, so folgt die Kirchhoff'sche Näherungsformel

$$u(x) = \int_B \left(u^0 \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u^0}{\partial n} \right) d\sigma, \quad (41.8)$$

wobei sich das Integral über die Blenden B erstreckt.

Für u^0 gilt natürlich ebenfalls (41.4); also ist die rechte Seite von (41.8) auch gleich (S: Schlitze):

$$u(x) = u^0(x) - \int_S \left(u^0 \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u^0}{\partial n} \right) d\sigma. \quad (41.9)$$

Die Lösungen (41.8) und (41.9) sind natürlich nicht exakt. Falls man daraus u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ auf S und B berechnet, erhält man nicht die Werte, welche man hineingesteckt hat. Man kann sowieso nicht u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ am Rand unabhängig vorgeben. (Das ist uns schon von der Potentialtheorie bekannt.) Die Kirchhoff'sche Näherung ist aber brauchbar, wenn die Blendenöffnungen verglichen zur Wellenlänge relativ gross sind.

Grundsätzlich könnte man das geschilderte Verfahren iterieren. Ob dieses konvergiert und zu einer Lösung der Wellengleichung führt ist, soviel ich weiss, nicht beantwortet.

Vertauscht man Schlitze und Öffnungen (komplementäre Anordnungen), so erfüllen die zugehörigen "Lösungen" u_1 und u_2 nach (41.8) und (41.9) die Gleichung

$$u_1 + u_2 = u^0. \quad (41.10)$$

Dies ist das Babinet'sche Prinzip. In dieser Form ist

kommen.

Für einen ebenen Schirm kann man die Green'schen Funktionen G_D und G_N mit dem Spiegelungsvorfaktor berechnen. Es ist offensichtlich

$$G_{D,N}(x, x') = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \mp \frac{e^{ikR'}}{R'} \right), \quad (4.16)$$

wobei $R = |x - x'|$, $R' = |x - x''|$, und x'' den zu x' gespiegelten Punkt bezeichnet.

In (4.14) benötigen wir die Normalenableitung von G_D auf dem Rand $S \cup B$. Bezeichnet \underline{n} den Normalenvektor nach der von der Lichtquelle abgewandten Seite, so findet man leicht die Integralgleichung ($\underline{R} = x - x'$):

$$u(x) = \frac{k}{2\pi i} \int_{SUB} \frac{e^{ikR}}{R} \left(1 + \frac{i}{kR} \right) \frac{\underline{n} \cdot \underline{R}}{R} u(x') \delta S(x'). \quad (4.17)$$

Eine analoge Formel ergibt sich aus (4.15).

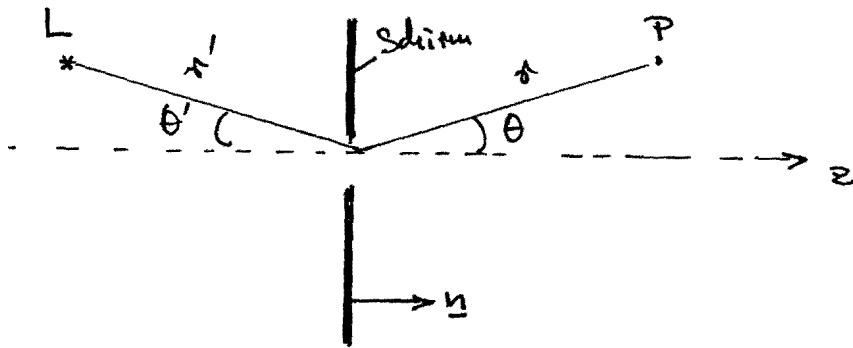
In der Näherung (4.15), (4.16) wird aus (4.17)

$$u(x) = \frac{k}{2\pi i} \int_B \frac{e^{ikR}}{R} \left(1 + \frac{i}{kR} \right) \frac{\underline{n} \cdot \underline{R}}{R} u^0(x') \delta S(x'). \quad (4.18)$$

Vergleichen wir dies mit (4.18), so sehen wir ^{das wir} daraus (4.18) bekommen, wenn wir den ersten Term verdoppeln und den zweiten weglassen. Um das Neumann'sche Resultat zu bekommen, müsste man andererseits den ersten Term in (4.18) weglassen und den zweiten verdoppeln.

Alle drei Formeln stimmen im Besonderen, indem sie vernünftigerweise approximative Gültigkeit beanspruchen können, praktisch untereinander überein. Um dies zu sehen betrachten wir die

Anordnung in der folgenden Figur. Der Aufpunkt P und



die Punktquelle L seien viele Wellenlängen vom Schlitz entfernt. Benutzen wir noch (4.1.7) für u^0 , so erhalten wir in den drei Fällen (s. Fig.):

$$\psi(P) = A \frac{k}{2\pi i} \int_{\mathcal{B}} \frac{e^{ikt}}{r} \cdot \frac{e^{ikt'}}{r'} \cdot \mathcal{B}(\theta, \theta') ds, \quad (4.1.19)$$

wobei

$$\mathcal{B}(\theta, \theta') = \begin{cases} \cos \theta & (\text{approximative Dirichlet Formel,} \\ \cos \theta' & (\text{ " Neumann " }, \\ \frac{1}{2}(\cos \theta + \cos \theta') & (\text{Kirchhoff Approximation}). \end{cases} \quad (4.1.20)$$

Im Vergleich zu den schnell oszillierenden Exponentialfaktoren in (4.1.19) darf $\mathcal{B}(\theta, \theta')$ praktisch als konstant behandelt werden^{*}). Deshalb sind die relativen Amplituden in allen drei Fällen fast gleich. Für senkrechte Incidenz darf man $\mathcal{B}(\theta, \theta')$ in allen drei Fällen durch Eins ersetzen.

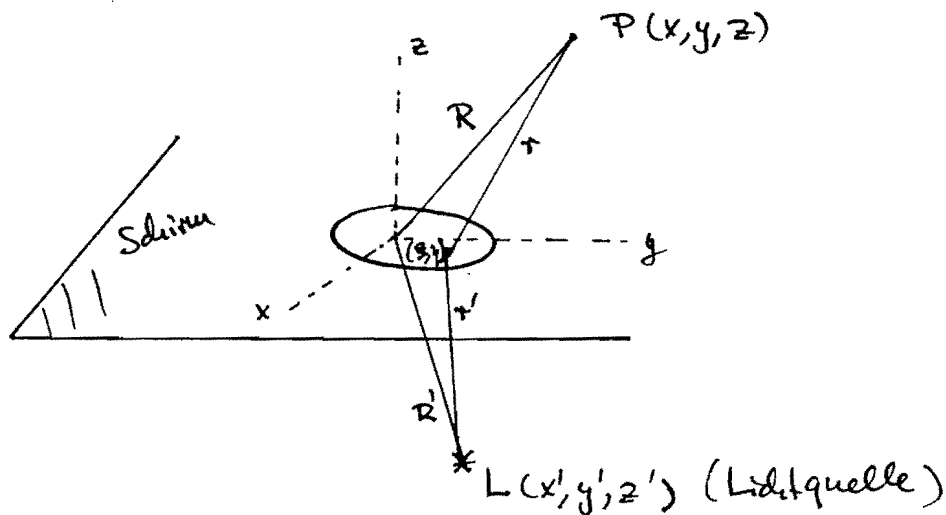
Im folgenden ersetzen wir $\mathcal{B}(\theta, \theta')$ durch einen mittleren $\cos \bar{\theta}$. Ebenso ersetzen wir den Faktor $\frac{1}{r r'}$ in (4.1.19) durch einen mittleren Wert $1/R R'$.

^{*}) Vertikale Beugung tritt nur in der Nähe der geometrischen Schattengrenze auf.

Als Ausgangspunkt für die weiteren Rechnungen haben wir damit die Formel:

$$u(P) = A \frac{k}{2\pi i} \cos \delta \frac{1}{RR'} \int_B e^{ik(r+r')} d\sigma, \quad (41.21)$$

Weiter nehmen wir an, dass die Öffnung praktisch eben ist und legen in diese ein cartesisches Koordinatensystem mit dem Nullpunkt in der Öffnung (s. Fig.). Die Integrations-



variablen in der Ebene der Öffnung seien (ξ, η) .

Nun ist

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2,$$

$$r'^2 = (x' - \xi)^2 + (y' - \eta)^2 + z'^2,$$

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$R'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

Also

$$r^2 = R^2 - 2(x\xi + y\eta) + \xi^2 + \eta^2,$$

$$r'^2 = R'^2 - 2(x'\xi + y'\eta) + \xi^2 + \eta^2.$$

Bemerken wir noch die Entwicklung $\sqrt{1+e^2} = 1 + \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{8} + \dots$

so folgt

$$r = R - \frac{x\xi + y\eta}{R} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R} - \frac{(x\xi + y\eta)^2}{2R^3} + \dots,$$

$$r' = R' - \frac{x'\xi + y'\eta}{R'} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R'} - \frac{(x'\xi + y'\eta)^2}{2R'^3} + \dots.$$

(4.22)

Dies setzen wir in (4.21) ein

$$u(\underline{x}) = A \frac{k}{2\pi i} \cos\delta \frac{e^{ik(R+R')}}{RR'} \int_B e^{ik\phi(\xi, \eta)} d\xi d\eta,$$

(4.23)

wobei

$$\phi(\xi, \eta) = -\frac{x\xi + y\eta}{R} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R} - \frac{(x\xi + y\eta)^2}{2R^3},$$

$$-\frac{x'\xi + y'\eta}{R'} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R'} - \frac{(x'\xi + y'\eta)^2}{2R'^3} + \dots, \quad (4.24)$$

B. Fraunhofer Beugung

Man spricht von Fraunhofer Beugung, wenn die Lichtquelle L und der Beobachtungspunkt P soweit weg sind, dass man sich in (4.24) auf die linearen Terme beschränken darf. Die vorkommenden Größen

$$\alpha := x/R, \quad \beta = y/R,$$

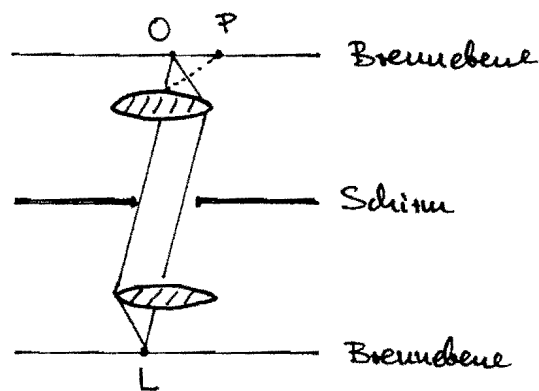
$$\alpha' := x'/R', \quad \beta' = y'/R' \quad (4.25)$$

sind dann die Richtungskosinusse und man erhält

$$u(\underline{x}) = \text{const.} \frac{1}{2\pi} \int_B e^{-ik[\xi(\alpha+\alpha') + \eta(\beta+\beta')]} d\xi d\eta.$$

(4.26)

In der Praxis wird man, um eine genügende Intensität zu bekommen, alle von der Lichtquelle ausgehenden Strahlen durch eine Linse (Kollimator) zu einem Parallelstrahlenbündel zusammenfassen. Ebenso fasst man alle von der Beugungsöffnung ausgehenden Parallelstrahlenbündel durch eine Linse zu einem Punkt in deren Brennebene zusammen (s. Fig.).



Der primäre Strahl u^0 ist bei idealer Linsenabbildung im Punkte O (s. Fig.) konzentriert und sonst überall gleich Null. Ausserhalb von O gilt also für die beiden komplementären Anordnungen nach (4.1.10) $u_1 + u_2 = 0$, d.h.

$$\underline{I_1 = I_2}, \quad (4.1.27)$$

d.h. die beiden komplementären Schirme liefern (für Fraunhofer Beugung) intensitätsgleiche Beugungsbilder.

Wir bemerken auch noch folgendes. Normieren wir u so, dass für $a = \alpha + \alpha'$, $b = \beta + \beta'$

$$\int_{\mathbb{B}} |u|^2 da db = |\mathbb{B}| = \text{Fläche von } \mathbb{B}, \quad (4.1.28)$$

so ist die Konstante in (4.1.26) wie folgt bestimmt. Sei $\chi(x, y)$ die charakteristische Funktion zu $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^2$, dann

ist auch (4.1.26)

$$u = \text{const. } \hat{X}(ka, kb), \quad (4.1.29)$$

wenn \hat{X} die Fouriertransformierte von X bezeichnet. Nun ist aber

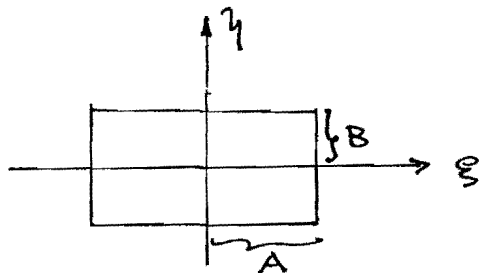
$$\begin{aligned} |B| &= \int_{\mathbb{R}^2} |X(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta = \int |\hat{X}(ka, kb)|^2 d(ka) d(kb) \\ &= \frac{k^2}{(\text{const.})^2} \int_B |u|^2 da db = \frac{k^2}{(\text{const.})^2} |B|, \end{aligned}$$

d.h. es ist $\text{const.} = k$ und also

$$u = \frac{1}{\lambda} \int_B e^{-ik(a\xi + b\eta)} d\xi d\eta. \quad (4.1.30)$$

a) Beugung am Rechteck

Wir nehmen nun als beugende Öffnung ein Rechteck und legen den Nullpunkt des Koordinatensystems in seinen Mittelpunkt und die Koordinatenachsen parallel zu den Seiten. Die Seitenlängen seien $2A$ und $2B$ (s. Fig.).

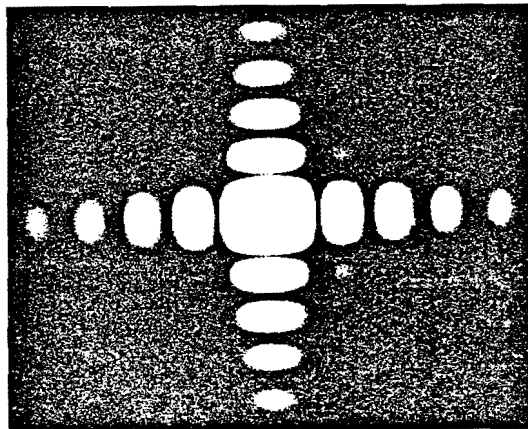


Aus (4.1.30) erhalten wir für die Intensität

$$I(P) = |u(P)|^2 = \left(\frac{4AB}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{\sin kaA}{kaA}\right)^2 \left(\frac{\sin kbB}{kbB}\right)^2. \quad (4.1.31)$$

Die Funktion $\frac{\sin^2 x}{x^2}$ hat das Hauptmaximum bei $x=0$ mit der Höhe 1. Die Minima vom Betrage Null folgen einander äquidistant an den Stellen $x = \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$. Nebenmaxima treten an allen Stellen auf, wo $\lg x = x \mp \pi$, d.h. an Stellen, die mehr und mehr an $\pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2, \dots$ herantreten; ihre Höhe beträgt in dieser Reihenfolge 0.047, 0.017, 0.008, \dots

Aus diesen Eigenschaften und (41.31) wird das folgende Bild verständlich.



b) Beugung durch einen Spalt

Die Lichtquelle sei ein leuchtender gerader Draht. Von den einzelnen Punkten geht dann inkohärentes Licht aus. Die beugende Öffnung sei ein langer schmaler Spalt. Die Längsrichtung sei die η -Achse. Da sich die Intensitäten addieren, müssen wir (41.31) über b integrieren. Wir haben also folgendes Integral zu bilden

$$\int_{-b_1}^{+b_1} \left(\frac{\sin kbB}{kbB} \right)^2 db = \frac{1}{kB} \int_{-x_1}^{x_1} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx ; x_1 = kb_1 B.$$

Falls $\lambda \ll b_1 B \mp \pi$, dürfen wir x_1 durch ∞ ersetzen.

Nun ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = \pi$$

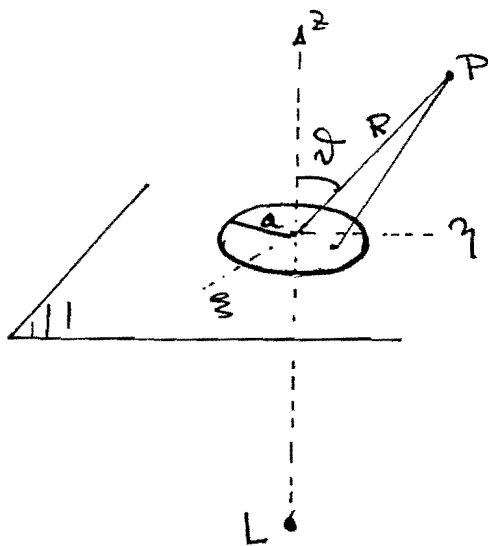
und damit

$$I = I_0 \left(\frac{\sin kaA}{kaA} \right)^2, \quad (41.32)$$

c) Beugung an kreisförmiger Öffnung

Dieser Fall ist in der Praxis (Fernrohr, Mikroskop, etc.) besonders wichtig.

Der einfallende Strahl sei senkrecht auf der Öffnung: $\alpha' = \beta' = 0$. Dann ist die z -Achse eine Symmetrieachse für das Beugungsphänomen. Mit ϑ bezeichnen wir den Beugungswinkel (s. Fig.).



Statt ϑ, η führen wir Polarkoordinaten ein

$$\xi = r \cos \varphi, \quad \eta = r \sin \varphi.$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $\beta = 0$ und $\alpha = \sin \vartheta$ wählen. Dann ist nach (41.26)

$$u = \text{const} \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} e^{-ik r \sin \vartheta + i \cos \vartheta} d\varphi. \quad (4.33)$$

Nun hat die nullte Besselfunktion $J_0(\rho)$ die folgende Integraldarstellung

$$J_0(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{\pm i \rho \cos \alpha} d\alpha. \quad (4.34)$$

Folglich ist

$$u = \text{const} \cdot \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \int_0^{k a \sin \vartheta} J_0(\rho) \rho d\rho.$$

Mit Hilfe von

$$\rho J_0(\rho) = \frac{d}{d\rho} (\rho J_1(\rho))$$

können wir das Integral ausführen und erhalten

$$u = \text{const} \cdot \frac{J_1(k a \sin \vartheta)}{\sin \vartheta}.$$

Für kleine z ist $J_1(z)/z \sim 1/2$ und folglich

$$\boxed{I = I_0 \left(\frac{2 J_1(k a \sin \vartheta)}{k a \sin \vartheta} \right)^2}. \quad (4.35)$$

Die erste Nullstelle von J_1 ist bei

$$\rho_1 = 0.61 \times 2\pi = 3.95.$$

Der erste dunkle Ring erscheint also bei

$$\boxed{\sin \vartheta_1 = 0.61 \frac{2\pi}{ka} = 0.61 \frac{\lambda}{a}}. \quad (4.36)$$

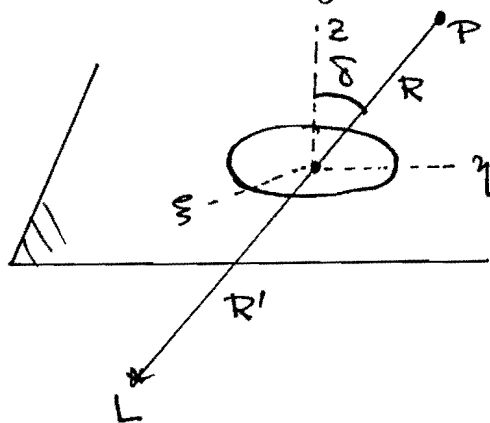
Ganz ähnliche Verteilungen wie (41.35) beobachtet man auch bei Hochenergiebestrahlung von Protonen oder π -Mesonen an Atomkernen. Man spricht deshalb von Diffraktionsbeugung.

Beugungserscheinungen führen zu einer prinzipiellen Beschränkung des Auflösungsvermögens von Fernrohren und Mikroskopen, welche sich aus (41.36) ergibt. (Für eine ausführliche Diskussion siehe das Buch von H. Born, S. 53.)

C. Fresnel Beugung

Wir nehmen nun nicht mehr an, dass die Lichtquelle L und der Beobachtungspunkt P weit weg von der Öffnung sind. Dann muss man in (41.24) mindestens bis zu quadratischen Gliedern gehen (Fresnel Beugung).

Praktisch geht man so vor, dass man den Ursprung des Koordinatensystems (ξ, η) in den Schnittpunkt der Verbindungslinie LP mit der Ebene der beugenden Öffnung legt (s. Fig.). (Bei festem L hat man also für jedes P ein anderes Koordinatensystem zu wählen.)



Dadurch erreicht man, dass das (ξ, η) -Koordinatensystem so gelegt werden kann, dass $y = y' = 0$ wird und

$$\alpha = -\alpha' = \sin \delta.$$

Damit fallen in (41.24) die linearen Terme weg und es bleibt

$$\phi(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) (\xi^2 \cos^2 \delta + \eta^2). \quad (41.37)$$

Führt man in (41.23) die folgenden neuen Integrationsvariablen ein

$$\begin{aligned} k \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \xi^2 \cos^2 \delta &= \pi u^2, \\ k \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \eta^2 &= \pi v^2, \end{aligned} \quad (41.38)$$

so kommt

$$u(P) = A \frac{1}{zi} \frac{e^{ik(R+R')}}{R+R'} \int e^{i\frac{\pi}{2}(u^2+v^2)} du dv, \quad (41.39)$$

wobei man über das transformierte Gebiet zu integrieren hat.

Wir haben nun das folgende Fresnel'sche Integral zu untersuchen:

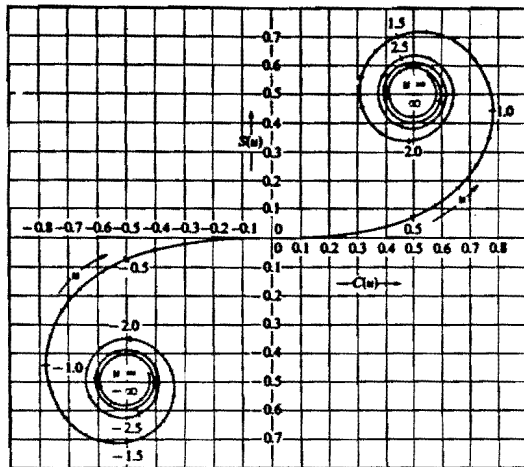
$$F(s) = \int_0^s e^{i\frac{\pi}{2}u^2} du. \quad (41.40)$$

Die Zerlegung in Real- und Imaginärteile lautet

$$F(s) = X(s) + i Y(s), \quad (41.41)$$

$$\left. \begin{aligned} X(s) &= \int_0^s \cos\left(\frac{\pi}{2}u^2\right) du, \\ Y(s) &= \int_0^s \sin\left(\frac{\pi}{2}u^2\right) du. \end{aligned} \right\} \quad (41.42)$$

Zerlegt man $F(s)$ als Funktion von s in der komplexen Ebene auf, so erhält man die Cosin-Spirale (s. Fig.).



The Cornu spiral. [Reprinted with permission from Classical Electromagnetic Radiation, by Jerry B. Marion. Academic Press, 1974.]

Kann beachten, dass

$$\left(\frac{dX}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dY}{ds}\right)^2 = \cos^2 \frac{\pi}{2} s^2 + \sin^2 \frac{\pi}{2} s^2 = 1$$

ist; also ist s die Bogenlänge. Die Krümmung κ der Kurve ist $\kappa = d\pi/ds$, wo π den Winkel der Tangente mit der reellen Achse bezeichnet. Da $\frac{dX}{ds} = \cos(\frac{\pi}{2} s^2)$ ist, ist $\pi = \frac{\pi}{2} s^2$ und folglich

$$\underline{\kappa = \pi \cdot s} \tag{41.43}$$

Die Krümmung ist also proportional zur Bogenlänge. Es ist weiter

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{\pi}{2} u^2} du = 2 \int_0^{\infty} e^{i\frac{\pi}{2} u^2} du = 1+i, \tag{41.44}$$

d.h.

$$F(\infty) = -F(-\infty) = \frac{1+i}{2}, \tag{41.45}$$

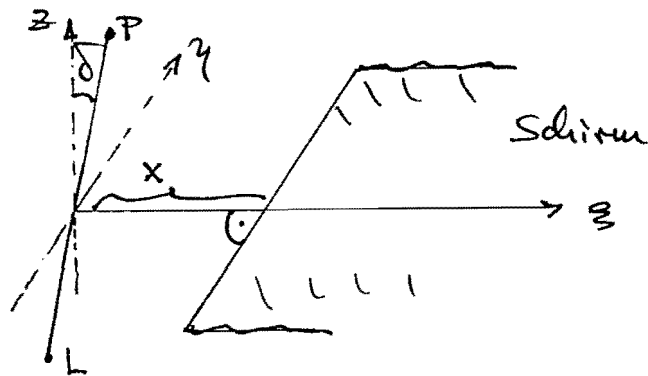
wie man mit funktionentheoretischen Mitteln leicht sieht (s. Übungen). Die Fresnel'schen Integrale sind im übrigen ten-

bedient.

Beispiel. Beugung am einschigen Schirm (Halbebene)

Dieses Beispiel illustriert das Verhalten des Lichtes an der Schattengrenze.

Wir wahlen den Aufpunkt P so (s. Fig.), dass die Projektion der Verbindungslinie LP auf die Schirmebene auf der beugenden Kante senkrecht steht



Damit sind für η die Integrationsgrenzen $-\infty$ und $+\infty$, dasselbe gilt dann für v .

Für ξ sind die Grenzen $-\infty$ und x , wo x die Koordinate der Schirmkante bedeutet (s. Fig.). Für u sind deshalb die Grenzen $-\infty$ und

$$s = \sqrt{\frac{k}{\pi} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right)} \tag{41.46}$$

Somit wird

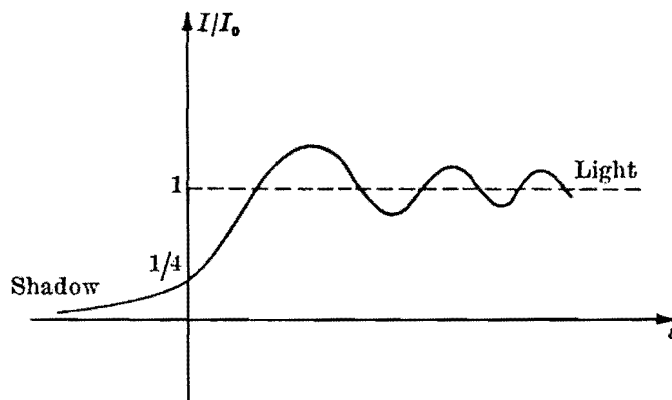
$$\begin{aligned}
 u(P) &= \frac{A}{2i} (1+i) \frac{e^{ik(R+R')}}{R+R'} \int_{-\infty}^s e^{i\frac{\pi}{2}u^2} du \\
 &= \frac{1-i}{2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ungestörte Erregung}}}{u^0} \int_{-\infty}^s e^{i\frac{\pi}{2}u^2} du \tag{41.47}
 \end{aligned}$$

Für die Intensität folgt

$$\frac{I}{I_0} = \frac{|U(P)|^2}{|U^0(P)|^2} = \frac{1}{2} \left| \int_{-\infty}^s e^{i\frac{\pi}{z}u^2} du \right|^2$$

$$= \frac{1}{2} \left[X(s) + \frac{1}{2} \right]^2 + \frac{1}{2} \left[Y(s) + \frac{1}{2} \right]^2.$$

Deshalb ist $2I/I_0$ gleich dem Quadrat der Länge des Vektors, welcher vom Windungspunkt $-\frac{1+i}{2}$ bis zum Punkt $X(s)+iY(s)$ gezogen ist. Aus dem Graphen der Cosin-Spirale folgt deshalb der Verlauf in der folgenden Fig..



Mit Hilfe der Fresnel Beugung der Radioquelle 3C 273 am Mondrand, konnte man 1962 die genaue Position dieser Quelle bestimmen. Zudem zeigte sich, dass diese aus zwei Komponenten (A und B) besteht. Die kleinere Komponente B fiel mit einem blauen "Stern" der 13. Grössenklasse zusammen. M. Schmidt nahm sofort das optische Spektrum von 3C 273 B auf und entdeckte schliesslich, dass dieses etwas nach rot verschoben ist: $\Delta\lambda/\lambda = 0.158$; dies entspricht 16% der Lichtgeschwindigkeit. Die Quelle 3C 273 ist ein Quasar; die Fresnel Beugung verhalf also zur Entdeckung der Quasare.