

## Kapitel VIII. Magnetohydrodynamik

Als Beispiel einer dynamischen Theorie von Feld und Materie wollen wir in diesem Kapitel die Magnetohydrodynamik (MHD) besprechen. Diese ist für viele Probleme der Plasmaphysik\*) zuständig. In der MHD wird das Plasma als ein einheitliches, gut leitendes Medium betrachtet, welches den Gesetzen der Elektrodynamik und der Hydrodynamik genügt. Diese Gesetze berücksichtigen einerseits die Wirkung der elektromagnetischen Felder auf die Flüssigkeitsbewegung, aber andererseits auch die Veränderungen der Felder durch die Strömung der Materie. Diese dynamische Wechselwirkung führt zu interessanten Phänomenen, welche insbesondere für die Astrophysik von Bedeutung sind. (Im Weltall ist die Materie zum grossen Teil ionisiert.)

\* \* \*

Au dieser Stelle sei noch folgendes zur Strahlungsdämpfung von Punktteilchen bemerkt. Würden wir versuchen, ein Gesamtsystem von elek. Feldern und geladenen Punktteilchen durch die Maxwell'schen Gleichungen und die Newton'schen Bewegungsgleichungen zu den Lorentzkraften zu beschreiben, so würden wir in grosse Schwierigkeiten kommen. Dieses Gleichungssystem ist mathematisch sinnlos. Da nämlich die Quellen (Ladungen und Ströme) für Punktteilchen Distributionen sind, haben auch die Feldstärken nur einen distributiven Sinn. Deshalb ist deren Wert am Orte eines Teilchens nicht definiert. Physikalisch ausser

---

\*) Mit dem Wort Plasma meint man in der Physik ein vollständig oder teilweise ionisiertes Gas (oder Flüssigkeit), also ein Gemisch aus Elektronen, Ionen und neutralen Teilchen.

sich diese Schwierigkeit z.B. in einer divergenten Selbstenergie. Es ist deshalb nicht verwunderlich, dass alle Lösungsversuche für das Problem der Wechselwirkung Punktladung-Feld gescheitert sind. (Für eine ausführliche Diskussion siehe z.B. Jackson, Kapitel 17.) Die erwähnten Schwierigkeiten fallen weg, wenn wir die Materie in einem makroskopischen Sinne als geladene Flüssigkeit beschreiben.

\* \* \*

### §42. Näherungsannahmen und Voraussetzungen der MHD

Ein Plasma besteht aus einem Gemisch von Elektronen, Ionen und eventuell auch aus neutralen Teilchen. Jede dieser drei Komponenten kann im Prinzip verschiedene mittlere Geschwindigkeiten, Temperaturen, etc. besitzen. Für ein <sup>hinreichend</sup> genügend dichtes Plasma ist aber die Stoßfrequenz genügend gross, dass keine Ladungsseparation auftritt (wenn wir von hochfrequenten Plasmaoszillationen absehen). Die mechanischen Bewegungen des Plasmas können dann durch eine einkomponentige Flüssigkeit mit Geschwindigkeitsfeld  $\underline{u}(\underline{x}, t)$  und Stromdichte  $\underline{J}(\underline{x}, t)$  dargestellt werden. (~~Die elektrische Ladungsdichte ist in der Einkomponententheorie gleich Null. Aus diesem Grund bezeichne  $\rho$  in folgenden immer die Massendichte.~~)

Wir beschreiben nun einige Vereinfachungen, welche wir bei der Verknüpfung von Gas- und Elektrodynamik machen wollen.

#### (i) Kleine Geschwindigkeiten

Es werden nur Geschwindigkeiten der Materie betrachtet, die im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit klein sind:

$$\frac{u}{c} \ll 1. \quad (42.1)$$

Ausserdem sollen alle zeitlichen Änderungen der Felder in folgender Sinne klein sein. Bezeichnet  $F$  irgendeine Feldgrösse, dann sind die Ableitungen nach Ort und Zeit

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x} \right| \sim \frac{F}{L}, \quad \left| \frac{\partial F}{\partial t} \right| \sim \frac{F}{\tau}. \quad (42.2)$$

Dabei sind  $L$  eine charakteristische Länge und  $\tau$  eine charakteristische Zeit, in der sich jeweils  $F$  um ihren eigenen Betrag ändert. Wir verlangen nun, dass

$$\frac{L/\tau}{c} \ll 1 \quad (42.3)$$

ist. In dieser Näherung werden deshalb z.B. elektromagnetische Wellen nicht auftreten.

### (ii) Hohe Leitfähigkeit

Wir betrachten nun sehr gut leitende Materie. Dann können sich keine starken elektrischen Felder ausbreiten. Es sei also stets

$$E/B \ll 1. \quad (42.4)$$

Das Ohm'sche Gesetz lautet (s. <sup>(III.5.3)</sup> ~~III.5.3~~):

$$\underline{J} = \sigma \underline{E}^* = \sigma \left( \underline{E} + \frac{1}{c} \underline{u} \wedge \underline{B} \right). \quad (42.5)$$

Hier haben wir die Gl. (21.9) benutzt, welche unter der Voraussetzung (42.1) gültig ist.

Auf Grund dieser Voraussetzungen <sup>dürfen</sup> wir in (42.5) setzen  $\mu = 1$

$$\text{rot } \underline{B} = \frac{4\pi}{c} \underline{J} + \frac{1}{c} \dot{\underline{E}}$$

den Verschiebungsstrom vernachlässigen und das Ampère'sche

Gesetz benutzen. Um dies zu sehen, approximieren wir  $|\text{rot } \underline{B}|$  durch  $B/L$  und  $|\dot{\underline{E}}|$  durch  $E/\tau$  und finden

$$B/L \sim \frac{4\pi}{c} J + \frac{1}{c} \left(\frac{E}{B}\right) \frac{B}{\tau},$$

oder nach Multiplikation mit  $L$

$$B \sim \frac{4\pi}{c} L J + \frac{L/\tau}{c} \cdot \frac{E}{B} \cdot B.$$

Das zweite Glied rechts kann nach (42.3) und (42.4) vernachlässigt werden.

Im Rahmen unserer Näherungen haben wir damit die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{div } \underline{B} &= 0, \quad \text{rot } \underline{E} + \frac{1}{c} \dot{\underline{B}} = 0, & (42.6) \\ \text{rot } \underline{B} &= \frac{4\pi}{c} \underline{J}, & (42.7) \\ \underline{J} &= \sigma (\underline{E} + \frac{1}{c} \underline{u} \wedge \underline{B}). & (42.8) \end{aligned}$$

Hinzu kommt noch das Coulombgesetz für  $\text{div } \underline{E}$ . Da aber die Raumladung in den anderen Gleichungen nicht auftritt, lassen wir es hier weg.

Wir eliminieren im Induktionsgesetz das  $\underline{E}$ -Feld mit dem Ohmschen Gesetz:

$$\dot{\underline{B}} - \text{rot}(\underline{u} \wedge \underline{B}) = -c \text{rot}(\underline{J}/\sigma). \quad (42.9)$$

Der Einfachheit halber nehmen wir an, die Leitfähigkeit  $\sigma$  sei konstant. Ersetzen wir  $\underline{J}$  in (42.9) noch mit (42.7) durch  $\frac{c}{4\pi} \text{rot } \underline{B}$ , so folgt mit  $\text{div } \underline{B} = 0$ :

$$\dot{\underline{B}} - \text{rot}(\underline{u} \wedge \underline{B}) = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \underline{B}. \quad (42.10)$$

## Eingefrorene Feldlinien

Wir betrachten den magnetischen Fluss  $\Phi$  durch eine zeitabhängige Fläche  $F_t$ , deren Rand  $\partial F_t$  an die Plasmamaterie gebunden ist, d.h., sie bewege sich mit den sie bildenden Teilchen mit. Nach der allgemeinen Formel (21.1) und (42.9) ist dann

$$\frac{d\Phi}{dt} = -c \int_{F_t} \text{rot}(\underline{J}/\sigma) \cdot d\underline{s} = -c \int_{\partial F_t} \frac{1}{\sigma} \underline{J} \cdot d\underline{s}. \quad (42.11)$$

Dies zeigt, dass die Flussänderung umgekehrt proportional zur Leitfähigkeit ist. Bei unendlicher Leitfähigkeit sind deshalb die Feldlinien "eingefroren"; sie werden von der Materie mitgenommen, als ob sie an ihr festhängen würden. (Dies ist z.B. wichtig beim Kollaps von Sternen.)

## Dissipation von Magnetfeldern

Wir wählen als Beispiel für Gl. (42.10) in einem cartesianen Koordinatensystem

$$\underline{u} = 0, \quad \underline{B} = (B_x(y,t), 0, 0).$$

Dann wird aus (42.10)

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2}.$$

Diese Gleichung hat die Form der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung. Deshalb zerfließt das Feld langsam mit einer charakteristischen Zeit  $\tau$ , bestimmt durch

$$\frac{\tau}{L} \approx \frac{c^2}{4\pi\sigma L^2},$$

wobei  $L$  eine charakteristische Länge ist. Die Dissipations-

zeit  $\tau$  ist deshalb

$$\boxed{\tau \approx \frac{4\pi\sigma}{c^2} L^2} \quad (42.12)$$

Räumlich weitausgedehnte Felder zerfließen deshalb langsam. Für die Sonne ist, z.B.,  $\sigma \approx 10^{16} \text{ sec}^{-1}$ . Mit  $L \approx 7 \times 10^{10} \text{ cm}$  wird  $\tau = 6 \times 10^{17} \text{ sec} \approx \underline{2 \times 10^{10} \text{ Jahre}}$ !

§43. Die Bewegungsgleichungen für eine Flüssigkeit in der MHD

Um ein geschlossenes Gleichungssystem zu erhalten, müssen wir nun (42.6) - (42.8) noch durch Bewegungsgleichungen für die Flüssigkeit ergänzen.

A. Kinematik einer Flüssigkeit

Wir führen zunächst die substantielle (oder kovariante) Ab-  
leitung einer Größe  $f(x,t)$  ein. Diese ist erklärt durch

$$D_t f(x,t) := \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=t} f(\phi_{s,t}(x), s) = \frac{\partial f}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) f \quad (43.1)$$

wobei  $\phi_{s,t}$  den Fluss des Strömungsfeldes  $\underline{u}(x,t)$  bezeichnet. Insbesondere sind die Komponenten der substantiellen Beschleunigung gleich  $D_t u_i$ .

Bezeichnet  $D_t$  ein mitbewegtes Volumen ( $D_t = \phi_{t,t_0}(D_{t_0})$ ), so gilt (siehe mein Mechanik Skript, §4.1):

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t} f dV = \int_{D_t} \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(f \underline{u}) \right] dV. \quad (43.2)$$

Darin verschwindet die linke Seite für  $f = \rho$  und deshalb gilt die Kontinuitätsgleichung:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{u}) = 0.} \quad (43.3)$$

Für das spezifische Volumen  $v = 1/\rho$  folgt daraus

$$\frac{1}{v} \mathcal{D}_t v = \operatorname{div} \underline{u}. \quad (43.4)$$

Deshalb ist für eine inkompressible Flüssigkeit  $\operatorname{div} \underline{u} = 0$ .  
Für zwei benachbarte Teildien bei  $\underline{x} + d\underline{x}$  und  $\underline{x}$  ist die relative Geschwindigkeit

$$d\underline{u}_i = u_{i,k} dx_k, \quad u_{i,k} \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x_k}. \quad (43.5)$$

Wir nennen  $u_{i,k}$  den Tensor der Deformationsgeschwindigkeiten. Diesen zerlegen wir in seinen symmetrischen und seinen schief-symmetrischen Anteil

$$\begin{aligned} u_{i,k} &= \frac{1}{2} (u_{i,k} + u_{k,i}) + \frac{1}{2} (u_{i,k} - u_{k,i}) \\ &= \mathcal{D}_{ik} + \Omega_{ik}. \end{aligned} \quad (43.6)$$

Der symmetrische Anteil  $\mathcal{D}_{ik}$  ist der sog. Deformationstensor. Zu  $\Omega_{ik}$  gehört der Vektor

$$\omega_i = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \Omega_{jk} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} u_{k,j} \quad (43.7)$$

den man als Wirbelvektor oder Wirbeldichte bezeichnet.

Offensichtlich ist

$$\boxed{\underline{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \underline{u}.} \quad (43.8)$$

Für eine starre Bewegung ist  $\mathcal{D}_{ik} = 0$  und  $\underline{\omega}$  ist die Winkelgeschwindigkeit. Deshalb beschreibt  $\mathcal{D}_{ik}$  die Deformationen der Flüssigkeit.

Nach (43.4) beschreibt die Spur von  $\mathcal{D}_{ik}$  ( $= \operatorname{div} \underline{u}$ ) die Änderung des spezifischen Volumens.

### §. Impulserhaltungssatz

Wir betrachten jetzt alle Kräfte, die auf das Volumenelement  $\mathcal{D}_t$  in einem kontinuierlichen Medium wirken. Es erweist sich als nützlich, "fernwirkende" oder äussere Kräfte, wie Gravitationskräfte oder elektromagnetische Kräfte zu unterscheiden von den inneren Kräften, zu denen z.B. die Reibungskräfte gehören. Solche inneren Kräfte werden auf ein Volumenelement über dessen Begrenzungsfläche übertragen. Besitzt das Volumen eine Aussenfläche, dann sind die Oberflächenkräfte durch Angabe des Aussen drucks bestimmt. (Wir reden von freien Oberflächen). Befindet sich das Element im Inneren und ist  $\underline{n}$  der nach aussen weisende Normaleneinheitsvektor, so bezeichne  $\underline{T}(\underline{n})$  die Kraft, die durch das äussere Medium auf die in Richtung von  $\underline{n}$  orientierte Flächeneinheit ausgeübt wird. (Diese ist natürlich orth- und zeitabhängig.)

Bezeichnet  $\underline{k}$  die Kraftdichte der äusseren Kräfte, so besagt der Impulssatz

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t} \rho \underline{u} dV = \int_{\mathcal{D}_t} \underline{k} dV + \int_{\partial \mathcal{D}_t} \underline{T}(\underline{n}) d\sigma. \quad (43.9)$$

Herstens beruhen alle auftretenden Drehmomente auf den äusseren Kräften. (Lediglich für Medien mit stark polarem Charakter ist dies nicht der Fall.) Dann lautet der Drehimpulssatz

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t} \rho (\underline{x} \wedge \underline{u}) dV = \int_{\mathcal{D}_t} \underline{x} \wedge \underline{k} dV + \int_{\partial \mathcal{D}_t} (\underline{x} \wedge \underline{T}(\underline{n})) d\sigma. \quad (43.10)$$

Man wird erwarten, dass  $\underline{T}(\underline{n})$  linear von  $\underline{n}$  abhängt. (Dies lässt sich mit (43.9) näher begründen.). Wir setzen



$$T_i(\underline{n}) = \sigma_{ik} n_k \quad (43.11)$$

und nennen  $\sigma_{ik}$  den Spannungstensor.

Aus (43.9) wird jetzt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t} \rho u_i dV &= \int_{\mathcal{D}_t} k_i dV + \int_{\partial \mathcal{D}_t} \sigma_{ik} n_k d\sigma \\ &= \int_{\mathcal{D}_t} (k_i + \sigma_{ik,k}) dV. \end{aligned} \quad (43.12)$$

Darin ist die linke Seite nach (43.2) und (43.3)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t} \rho u_i dV &= \int_{\mathcal{D}_t} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \operatorname{div} (\rho u_i \underline{u}) \right] dV \\ &= \int_{\mathcal{D}_t} \rho \mathcal{D}_t u_i dV. \end{aligned} \quad (43.13)$$

Offenbar  
 dafür darf man  $u_i$  durch eine beliebige Funktion  $f$  ersetzen

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t} \rho f dV = \int_{\mathcal{D}_t} \rho \mathcal{D}_t f dV \quad (43.14)$$

(Transport Theorem).

Benutzen wir (43.13) in (43.12), so ergibt sich die Bewegungsgleichung für Kontinua:

$$\boxed{\rho \mathcal{D}_t u_i = k_i + \sigma_{ik,k}.} \quad (43.15)$$

### C. Eigenschaften des Spannungstensors

Aus dem Drehimpulssatz (43.10) (für nicht-polare Medien) und (43.14) folgt

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t} \rho (\underline{x} \wedge \underline{u}) dV = \int_{\mathcal{D}_t} \rho \mathcal{D}_t (\underline{x} \wedge \underline{u}) dV = \int_{\mathcal{D}_t} \underline{x} \wedge \underline{k} dV + \int_{\partial \mathcal{D}_t} \underline{x} \wedge \underline{T}(\underline{u}) d\sigma.$$

Die  $i$ -te Komponente des letzten Integrals lautet nach dem Gauss'schen Satz

$$\int_{\mathcal{D}_t} \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{ke} u_e d\sigma = \int_{\mathcal{D}_t} \varepsilon_{ijk} \underbrace{(x_j \sigma_{ke})_{,e}}_{\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{ke,e} + \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk}} dV.$$

Damit erhalten wir

$$\int_{\mathcal{D}_t} \varepsilon_{ijk} x_j (\rho \mathcal{D}_t u_k - k_k - \sigma_{ke,e}) dV = \int_{\mathcal{D}_t} \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} dV.$$

Die linke Seite verschwindet aber wegen (43.15). Deshalb schliessen wir dass  $\sigma_{ik}$  symmetrisch ist:

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki}. \quad (43.16)$$

Wir zerlegen  $\sigma_{ik}$  in einen isotropen "Druckanteil" und den viskosen Spannungstensor  $\Sigma_{ik}$ :

$$\sigma_{ik} = -p \delta_{ik} + \Sigma_{ik}. \quad (43.17)$$

Sind die Geschwindigkeitsgradienten nicht zu gross, so wird  $\Sigma_{ik}$  linear vom Deformationstensor abhängen. Ist keine Richtung des Raumes ausgezeichnet (isotropes Medium) so wird diese Abhängigkeit von folgender Form sein:

$$\Sigma_{ik} = 2\eta \left( \mathcal{D}_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \mathcal{D}_{ee} \right) + \zeta \delta_{ik} \mathcal{D}_{ee}, \quad (43.18)$$

d.h., die beiden irreduziblen Anteile des Deformationstensors werden mit unabhängigen Materialkonstanten multipliziert. Diese nennt man Zähigkeitskoeffizienten;  $\eta$  ist der Koeffizient der Scherungviskosität und  $\zeta$  nennt man die Volumenzähigkeit. Diese Grössen muss man aus dem Experiment bestimmen.

Da der erste Term in (43.17) und der letzte Term in (43.18) die gleiche Form haben, muss man sagen wie  $p$  definiert ist. Wir werden unter  $p$  immer den thermodynamischen Druck verstehen, welcher durch die Zustandsgleichung  $p(p, T)$  gegeben ist.

### D. Die Navier-Stokesche Gleichung

Aus (43.15), (43.17) und (43.18) erhalten wir

$$\rho \dot{\Delta}_t u_i = -p_{,i} + \left\{ \eta (u_{i,k} + u_{k,i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} u_{l,l}) \right\}_{,k} + \left\{ \zeta u_{l,l} \right\}_{,i} + k_i. \quad (43.19)$$

In vielen Fällen kann man  $\eta$  und  $\zeta$  als konstant ansehen und erhält dann nach einfachen Umformungen

$$\rho \dot{\Delta}_t \underline{u} = -\text{grad } p + \eta \Delta \underline{u} + \left( \zeta + \frac{\eta}{3} \right) \text{grad div } \underline{u} + \underline{k}. \quad (43.20)$$

Im inkompressiblen Fall reduziert sich diese Gleichung auf die sog. Navier-Stokesche Gleichung

$$\underline{\rho \dot{\Delta}_t \underline{u} = -\text{grad } p + \underline{k} + \rho \nu \Delta \underline{u}}, \quad (43.21)$$

wobei  $\nu = \eta/\rho$  die kinematische Zähigkeit ist

### E. Die Kraftwirkung des Magnetfeldes auf die Materie

Berechnet  $\rho_e$  für einen Moment die räumliche Ladungsdichte, so lautet die Kraftdichte  $\underline{k}$  auf die Materie

$$\underline{k} = \rho_e \underline{E} + \frac{1}{c} \underline{J} \wedge \underline{B}.$$

Wir zeigen nun, dass darin das erste Glied vernachlässigt werden darf. Es ist

$$|\underline{J}| = \frac{c}{4\pi} |\text{rot } \underline{B}| \sim \frac{cB}{4\pi L},$$

$$\rho_e = \frac{1}{4\pi} \text{div } \underline{E} \sim \frac{E}{4\pi L}.$$

Also nach (42.4)

$$\frac{\rho_e E}{\frac{1}{c} \underline{J} \cdot \underline{B}} \sim \frac{E^2}{B^2} \ll 1.$$

Deshalb setzen wir in der MHD für  $\underline{k}$  in (43.21)

$$\underline{k} = \frac{1}{c} \underline{J} \wedge \underline{B}. \quad (43.22)$$

### §44. Magneto hydrodynamische Wellen

Wir fassen zunächst das Gleichungssystem der MHD zusammen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \underline{B} = \frac{4\pi}{c} \underline{J}, \quad (44.1) \\ \text{rot } \underline{E} = -\frac{1}{c} \dot{\underline{B}}, \quad (44.2) \\ \text{div } \underline{B} = 0, \quad (44.3) \\ \underline{J} = \sigma (\underline{E} + \frac{1}{c} \underline{u} \wedge \underline{B}), \quad (44.4) \\ \rho \mathcal{D}_t \underline{u} = -\text{grad } p + \frac{1}{c} \underline{J} \wedge \underline{B} + \rho \underline{g} + \rho \nu \Delta \underline{u}, \quad (44.5) \\ \dot{\rho} = -\text{div}(\rho \underline{u}), \quad (44.6) \\ p = p(\rho, T) \quad (\text{z.B. ideales Gasgesetz}). \quad (44.7) \end{array} \right.$$

In (44.5) bezeichnet  $\underline{g}$  die Gravitationsbeschleunigung. Diese Gleichungen bilden ein geschlossenes System, wenn wir die Temperatur als gegebene Funktion annehmen. Im einfachsten Fall ist  $T = \text{const.}$ , in anderen Fällen ist  $T$  durch die Wärmeleitungsgleichung bestimmt (siehe dazu

Landau-Lifshitz, Bd. VIII, § 51).

Eliminieren wir aus diesen Gleichungen wieder das elektrische Feld und den Strom  $\underline{J}$ , so erhalten wir (siehe (42.10)):

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \underline{B} = 0, \quad (44.8) \\ \dot{\underline{B}} - \operatorname{rot}(\underline{u} \wedge \underline{B}) = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \underline{B}, \quad (44.9) \\ \dot{\rho} + \operatorname{div}(\rho \underline{u}) = 0, \quad (44.10) \\ \rho \mathcal{D}_t \underline{u} = -\operatorname{grad} p + \rho \underline{g} - \frac{1}{4\pi} \underline{B} \wedge \operatorname{rot} \underline{B} + \rho \nu \Delta \underline{u}, \quad (44.11) \\ p = p(\rho, T). \quad (44.12) \end{array} \right.$$

Wir lösen nun dieses komplizierte Gleichungssystem für kleine Störungen, die an einem homogenen Plasma angebracht werden. Das ungestörte Magnetfeld sei ebenfalls homogen und die Materie möge im ungestörten Fall ruhen. Die ungestörte Gleichgewichtslösung kennzeichnen wir durch den Index 0 und die zeitabhängige Störung durch den Index 1. Wir rechnen nur bis zur ersten Ordnung in den Störgrößen (lineare Störungstheorie).

Wir setzen also

$$\left. \begin{array}{l} \underline{B} = \underline{B}_0 + \underline{B}_1(x, t), \\ \rho = \rho_0 + \rho_1(x, t), \\ p = p_0 + p_1(x, t), \\ \underline{u} = \underline{u}_1(x, t). \end{array} \right\} \quad (44.13)$$

Wir wollen annehmen, dass die Störungen so schnell ablaufen, dass keine Wärme abgeführt wird, dass also an jeder Stelle die Zustandsgleichung adiabatisch ist. Dann ist

$$p_1 = s^2 \rho_1, \quad s^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\text{ad}, 0}. \quad (44.14)$$

Für ein adiabatisches Gesetz  $p = k \rho^\gamma$  ist  $s^2 = \gamma p_0 / \rho_0$ , wo  $\gamma$  das Verhältnis der spezifischen Wärmen ist.  $s^2$  ist das Quadrat der Schallgeschwindigkeit für  $\underline{B} = 0$  (s. unten).

Die linearisierten Gleichungen lauten bei vernachlässigbarer Viskosität und unendlicher Leitfähigkeit:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\rho}_1 + \rho_0 \nabla \cdot \underline{u}_1 &= 0, \\ \rho_0 \dot{\underline{u}}_1 + s^2 \nabla \rho_1 + \frac{1}{4\pi} \underline{B}_0 \wedge (\nabla \wedge \underline{B}_1) &= 0, \\ \dot{\underline{B}}_1 - \nabla \wedge (\underline{u}_1 \wedge \underline{B}_0) &= 0. \end{aligned} \right\} (44.15)$$

Aus (44.15) kann man eine Gleichung für  $\underline{u}_1$  allein gewinnen:  
 lineare partielle Diff-

$$\ddot{\underline{u}}_1 - s^2 \nabla (\nabla \cdot \underline{u}_1) + \underline{u}_A \wedge \nabla \wedge [\nabla \wedge (\underline{u}_1 \wedge \underline{u}_A)] = 0, \quad (44.16)$$

wo

$$\underline{u}_A = \frac{\underline{B}_0}{\sqrt{4\pi \rho_0}} \quad (44.17)$$

die sog. Alfvén Geschwindigkeit ist.

Nun suchen wir Lösungen von (44.16) in Form von ebenen Wellen:

$$\underline{u}_1(\underline{x}, t) = \underline{u}_1 e^{i(\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega t)} \quad (44.18)$$

Für die Amplitude  $\underline{u}_1$  folgt aus (44.16)

$$-\omega^2 \underline{u}_1 + (s^2 + u_A^2) (\underline{k} \cdot \underline{u}_1) \underline{k} + \underline{u}_A \cdot \underline{k} [(\underline{u}_A \cdot \underline{k}) \underline{u}_1 - (\underline{u}_A \cdot \underline{u}_1) \underline{k} - (\underline{k} \cdot \underline{u}_1) \underline{u}_A] = 0. \quad (44.19)$$

Wenn  $\underline{k}$  senkrecht zu  $\underline{B}_0$  (d.h. zu  $\underline{u}_A$ ) ist, dann wird aus (44.19)

$$-\omega^2 \underline{u}_1 + (s^2 + u_A^2) (\underline{k} \cdot \underline{u}_1) \underline{k} = 0.$$

Die Lösung ist eine longitudinale magnetosonische Welle mit der Phasengeschwindigkeit

$$v_{\text{long}} = \sqrt{s^2 + u_A^2} . \quad (44.20)$$

Wenn  $\underline{k}$  parallel zu  $\underline{u}_A$  ist, so reduziert sich (44.19) auf

$$(k^2 u_A^2 - \omega^2) \underline{u}_1 + \left( \frac{s^2}{u_A^2} - 1 \right) k^2 (\underline{u}_A \cdot \underline{u}_1) \underline{u}_A = 0 .$$

In diesem Fall gibt es zwei Typen von Wellen. Die eine ist eine gewöhnliche longitudinale Welle ( $\underline{u}_1$  parallel zu  $\underline{k}$  und  $\underline{u}_A$ ), deren Phasengeschwindigkeit gleich der Schallgeschwindigkeit  $s$  ist. Es gibt aber auch eine transversale Welle ( $\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_A = 0$ ), deren Phasengeschwindigkeit gleich der Alfvén Geschwindigkeit  $u_A$  ist. Nach ihrem Entdecker nennt man diese Wellen Alfvén-Wellen. Diese sind ein rein magnetohydrodynamisches Phänomen, welches nur vom magnetischen Feld und der Dichte abhängt.

Wir bestimmen die Feldstörung  $\underline{B}_1$  für die drei Wellentypen aus der 3. Gleichung von (44.15). Man findet leicht:

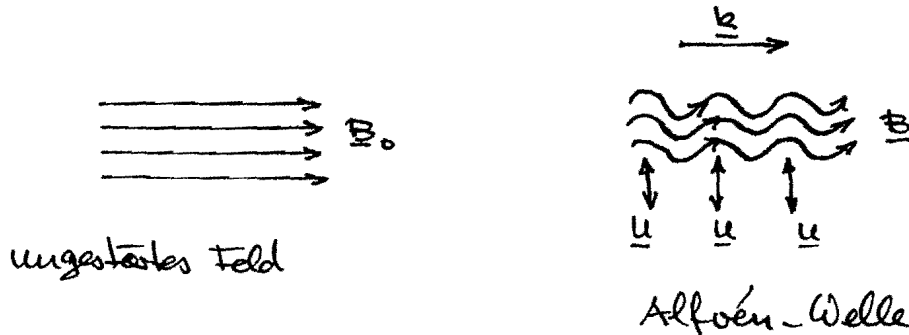
magnetosonische Welle:  $\underline{k} \perp \underline{B}_0$ ,  $\underline{u}_1 \parallel \underline{k}$ ,  $\underline{B}_1 = \frac{k}{\omega} u_1 \underline{B}_0$ ; (44.21)

longitudinale Schallwelle:  $\underline{k} \parallel \underline{B}_0$ ,  $\underline{u}_1 \parallel \underline{k}$ ,  $\underline{B}_1 = 0$ ; (44.22)

Alfvén-Welle:  $\underline{k} \parallel \underline{B}_0$ ,  $\underline{u}_1 \perp \underline{k}$ ,  $\underline{B}_1 = -\frac{k}{\omega} B_0 \underline{u}_1$ . (44.23)

Wir besprechen zunächst die (transversalen) Alfvén-Wellen. Diese sind in der nächsten Fig. skizziert. Eine Störung des Magnetfeldes an einem bestimmten Raumpunkt breitet

sich - wie bei einer angezupften Saite - längs der Feldlinien nach beiden Seiten mit der Geschwindigkeit  $u_A$  fort.



Für starke Magnetfelder (ausdrücklich: "grosse Rückstellkraft" der Feldlinien) ist  $u_A$  gross, für hohe Dichte wird dagegen  $u_A$  klein. Im interstellaren Raum ist typischerweise  $\rho_0 \approx 1.6 \times 10^{-24}$  g/cm<sup>3</sup>,  $B_0 \approx 10^6$  Gauss  $\Rightarrow u_A \approx 2.3 \times 10^5$  cm/sec.

Im Grenzfall  $\rho_0 \rightarrow 0$  muss man den Verschiebungsstrom im Ampère'schen Gesetz mitnehmen. Für unendliche Leitfähigkeit hat dies zur Folge, dass man für den Strom  $\underline{I}$  im Ausdruck (43.22) folgendes einzusetzen hat

$$\underline{I} = \frac{c}{4\pi} \left[ \text{rot } \underline{B} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\underline{u} \wedge \underline{B}) \right]. \quad (44.24)$$

An Stelle der 2. Gleichung in (44.15) kommt dann

$$\rho_0 \left[ \ddot{\underline{u}}_1 + \frac{1}{c^2} \underline{u}_A \wedge (\dot{\underline{u}}_1 \wedge \underline{u}_A) \right] = -\nabla^2 \varphi_1 - \frac{B_0}{4\pi} \wedge (\nabla \wedge \underline{B}_1). \quad (44.25)$$

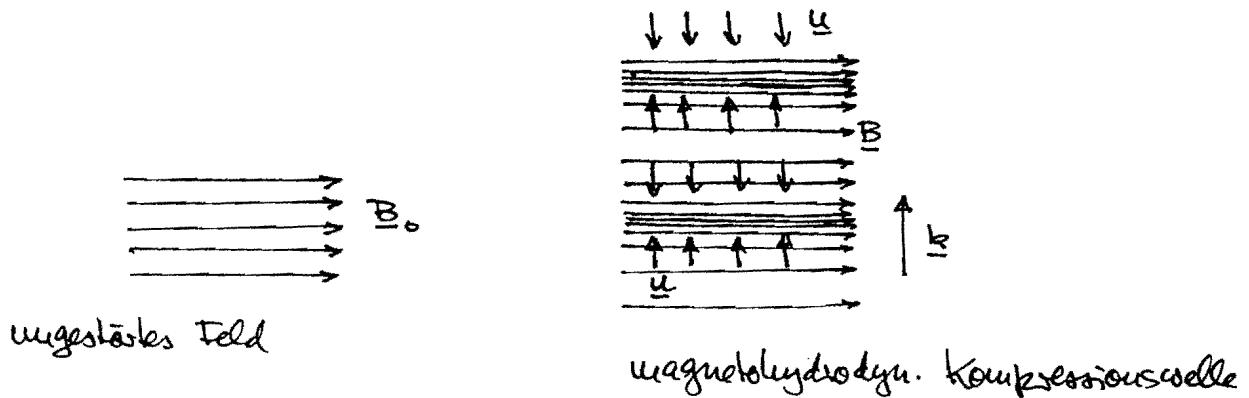
Man zeige, dass damit die Phasengeschwindigkeit der Alfvén-Wellen in folgender Weise modifiziert wird

$$v_A = \frac{c u_A}{\sqrt{c^2 + u_A^2}}. \quad (44.26)$$

Für  $u_A \gg c$  steht  $v_A$  gegen  $c$ .



Die longitudinalen magnetoacustischen Wellen (44.21) laufen senkrecht zu den Feldlinien. Im Grenzfall des verschwindenden Magnetfeldes wird die Phasengeschwindigkeit (44.20) gleich der Schallgeschwindigkeit, bei sehr grossem Magnetfeld (kleinen Dichten) überwiegt die Alfvén-Geschwindigkeit,  $v_{\text{long}} \rightarrow u_A$ . Dieser Wellentyp ist in der folgenden Fig. skizziert. Aus naheliegenden Gründen spricht man auch von magnetohydrodynamischen Kompressionswellen.



Für endliche Leitfähigkeit und <sup>bei</sup> Berücksichtigung von viskosen Effekten, erwarten wir dissipative Verluste und deshalb eine Dämpfung der Wellen. An Stelle der 2. und der 3. Gleichung in (44.15) erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} \rho_0 \dot{\underline{u}}_1 &= -s^2 \underline{\nabla} p_1 - \frac{\underline{B}_0}{4\pi} \wedge (\underline{\nabla} \wedge \underline{B}_1) + \eta \Delta \underline{u}_1, \\ \dot{\underline{B}}_1 &= \underline{\nabla} \wedge (\underline{u}_1 \wedge \underline{B}_0) + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \underline{B}_1. \end{aligned} \right\} \quad (44.27)$$

Für ebene Wellen sind diese Gleichungen äquivalent zu

$$\left. \begin{aligned} \rho_0 \dot{\underline{u}}_1 &= \frac{1}{(1 + i \frac{\eta k^2}{\rho_0 \omega})} \left[ -s^2 \underline{\nabla} p_1 - \frac{\underline{B}_0}{4\pi} \wedge (\underline{\nabla} \wedge \underline{B}_1) \right], \\ \dot{\underline{B}}_1 &= \frac{1}{(1 + i \frac{c^2 k^2}{4\pi\sigma \omega})} \underline{\nabla} \wedge (\underline{u}_1 \wedge \underline{B}_0). \end{aligned} \right\} \quad (44.28)$$

Vergleicht man dies mit (44.15), so sieht man, dass man

in (44.19) lediglich folgende Änderungen vornehmen muss:

(i) multipliziere  $s^2$  und  $\omega^2$  mit dem Faktor  $(1 + i \frac{c^2 k^2}{4\pi\sigma\omega})$

(ii) multipliziere  $\omega^2$  mit dem Faktor  $(1 + i \frac{\eta k^2}{\rho_0\omega})$ .

Speziell für die Alfvén-Wellen führt dies zur folgenden Beziehung zwischen  $\omega$  und  $k$

$$k^2 u_A^2 = \omega^2 \left(1 + i \frac{c^2 k^2}{4\pi\sigma\omega}\right) \left(1 + i \frac{\eta k^2}{\rho_0\omega}\right). \quad (44.29)$$

Sind die resistiven und viskosen Korrekturen klein, so erhalten wir daraus

$$k \approx \frac{\omega}{u_A} + i \frac{\omega^2}{2u_A^3} \left( \frac{c^2}{4\pi\sigma} + \frac{\eta}{\rho_0} \right). \quad (44.30)$$

Die Dämpfung nimmt danach stark mit der Frequenz zu, nimmt aber mit wachsender Feldstärke ab. Die endliche Leitfähigkeit bewirkt, dass die Welle in der Zeit  $\tau = \frac{4\pi\sigma \lambda^2}{c^2}$  auf den  $e$ -ten Teil ihrer ursprünglichen Intensität abfällt. Dies ist gleich der Diffusionszeit (42.12), wenn man dort die Länge  $L$  durch die Wellenlänge  $\lambda$  der Alfvén-Welle ersetzt.

Alle diese Resultate gelten nur bei verhältnismäßig kleinen Frequenzen, da wir den Verschiebungsstrom vernachlässigt haben. Bei hohen Frequenzen muss man überdies den Multi-Komponentencharakter des Plasmas berücksichtigen (siehe, z.B., Kippenhahn u. Kolbenhoff, Elementare Plasmaphysik, B.I. 1973, Kapitel VI). Schliesslich muss noch betont werden, dass die lineare Approximation bei der Untersuchung kollektiver Phänomene leicht zusammenbrechen kann. Dann wird es aber sehr schwierig und wir können auf das Studium nichtlinearer Phänomene nicht eingehen. Für eine erste Einführung verweise ich auf K.H. Späthke: Theoretische Plasmaphysik, Teubner 1990.