

T E I L III

DIE HAMILTONSCHE FORMULIERUNG DER MECHANIK

"It is nevertheless true that historically this purely formal structure played a well known and crucial part in the development of quantum mechanics. This should serve as a warning to all those who declare any kind of purely formal development a priori as 'unphysical'. Things are not that simple !"

R. Jost

In diesem 3. Teil beschreiben wir eine allgemeine Klasse von mechanischen Systemen von f Freiheitsgraden durch $2f$ Gleichungen 1. Ordnung von besonders eleganter Struktur. Diese sog. Hamiltonschen Systeme sind forminvariant bezüglich einer "grossen" Gruppe von Transformationen (Gruppe der kanonischen Transformationen). Dies kann praktisch, etwa in der Störungstheorie, dazu verwendet werden, um die Gleichungen zu vereinfachen.

In der kanonischen Formulierung der Mechanik wird die Beziehung von Symmetriegruppen und Erhaltungssätzen besonders durchsichtig. Der kanonische Formalismus ist für die Quantenmechanik von ausschlaggebender Bedeutung.

Kap. 5. Phasenraum, kanonische Gleichungen und symplektische Transformationen

Hamiltonsche Gleichungen sind uns bisher schon wiederholt begegnet. Wir zeigen im folgenden, dass unter allgemeinen Bedingungen ein Lagrangesches System zu einem Hamiltonschen System äquivalent ist. Zuvor betrachten wir ein Beispiel.

Die Lagrangefunktion sei

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{q}_i^2 - V(q_1, \dots, q_N) .$$

Dann gilt für die Impulse $p_i = m_i \dot{q}_i$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} . \tag{5.1}$$

Diese Gleichungen lassen sich im vorliegenden Beispiel trivialerweise nach \dot{q}_i auflösen. Die Hamiltonfunktion ist

(vgl. S. 38)

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} + V(q_1, \dots, q_N)$$

und hängt infolgedessen mit L wie folgt zusammen

$$H(q, p) = \sum_i (p_i \dot{q}_i) - L(q, \dot{q}) , \tag{5.2}$$

wobei rechts für \dot{q}_i die Auflösung von (5.1) nach (q, p) eingesetzt werden muss. (Hier ist $\dot{q}_i = p_i/m_i$.)

In den Gl. (5.1) und (5.2) kommt die konkrete Form von L nicht mehr vor. Wir untersuchen nun, unter welchen Bedingungen durch diese ein, zu den Eulerschen Gleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0, \quad (5.3)$$

äquivalentes kanonisches System

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = - \frac{\partial H}{\partial q} \quad (5.4)$$

definiert wird.

A. Legendre Transformationen, Satz von Liouville

Wir führen zunächst eine lokale Diskussion.

Sei $F(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m)$ eine Funktion, definiert auf einer offenen Menge von \mathbb{R}^{n+m} , welche C^2 in den x ist und $\text{Det}(F, x_k x_\ell) \neq 0$ erfüllt. [$F, x_k := \partial F / \partial x_k$.]

Nach dem impliziten Funktionentheorem kann man dann die Gleichungen

$$y_k = F, x_k(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m) \quad (5.5)$$

bei festen z_1, \dots, z_m lokal (!) eindeutig nach x_1, \dots, x_n auflösen,

$$x_k = \varphi_k(y, z). \quad (5.6)$$

Die Legendretransformierte Funktion F^* von F (bezüglich der Variablen x) ist definiert durch

$$F^*(y, z) = \sum_{k=1}^n y_k \varphi_k(y, z) - F(\varphi(y, z), z). \quad (5.7)$$

Nach (5.7) und (5.5) gilt

$$F^*, y_k = \varphi_k + \sum_{\ell} y_\ell \varphi_{\ell, y_k} - \sum_{\ell} \underbrace{F, x_\ell}_{y_\ell} \varphi_{\ell, y_k} = \varphi_k \quad (5.8)$$

d.h.

$$F^*, y_k(y, z) = x_k. \quad (5.8')$$

Ferner ist

$$F^*_{,z_k} = \sum_l (y_l \varphi_{l,z_k} - F_{,x_l} \varphi_{l,z_k}) - F_{,z_k} = -F_{,z_k}$$

d.h.

$$F^*_{,z_k}(y,z) = -F_{,z_k}(\varphi(y,z),z). \quad (5.9)$$

Aus (5.5) und (5.8') ergibt sich

$$F^*_{,y_i y_l} F_{,x_l x_j} = \frac{\partial x_i}{\partial y_l} \frac{\partial y_l}{\partial x_j} = \delta_{ij}.$$

Die Matrizen $(F_{,x_i x_j})$ und $(F^*_{,y_i y_j})$ sind also zueinander invers. Daraus folgt insbesondere

$$\text{Det}(F^*_{,y_i y_j}) \neq 0 \quad (5.10)$$

d.h. F^* erfüllt dieselben Voraussetzungen wie F und wir können die Legendretransformation $(F^*)^*$ von F^* betrachten. Wir zeigen, dass

$$(F^*)^* = F \quad (5.11)$$

ist. Die Legendretransformierte F^{**} von F^* ist wie folgt definiert: $y = \psi(x,z)$ sei die (lokale) Auflösung von

$$x_k = F^*_{,y_k} \quad (*)$$

dann ist

$$F^{**}(x,z) = \sum x_k \Psi_k(x,z) - F^*(\psi(x,z),z). \quad (**)$$

Nun ist nach (5.8) $F^*_{,y_k} = \varphi_k$, also nach (*) $x_k = \varphi_k(y,z)$. Deshalb sind φ und ψ (bei festem z) zueinander invers, $\varphi = \psi^{-1}$, und folglich ist nach (5.7)

$$F^*(\psi(x,z),z) = \sum \psi_k(x,z) x_k - F(x,z).$$

Setzen wir dies in (**) ein, so folgt $F^{**}(x,z) = F(x,z)$, was zu beweisen war. \square

Nun führen wir eine globale Diskussion durch. Dazu halten wir zunächst die folgende Tatsache aus der Analysis fest.

Lemma 1: Es sei $f \in C^2(U, \mathbb{R})$, wobei U eine offene konvexe Teilmenge von \mathbb{R}^n ist. Dann ist f genau dann konvex, d.h.

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2), \quad x_1 \neq x_2, \quad t \in (0,1), \quad (5.12)$$

wenn die Matrix $D^2f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)$ (d.h. die Hessesche Form) positiv semi-definit ist (für jedes $x \in U$). Ist $D^2f(x)$ für jedes $x \in U$ positiv definit, so ist f strikt konvex (d.h. in (5.12) gilt das strikte $<$ Zeichen).

Dieses Lemma beweist man sehr einfach mit der Taylorsche Formel [siehe z.B. W. Fleming, Functions of Several Variables, Springer-Verlag 1977, p. 114.]

Eine einfache Bedingung, welche garantiert, dass die Abbildung $\nabla f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ bijektiv ist, gibt das folgende

Lemma 2: Es sei $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, und D^2f sei gleichmäßig positiv definit, d.h. es existiere ein $\alpha > 0$ mit

$$D^2f(x)(h,h) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j \geq \alpha |h|^2, \quad \forall x, h \in \mathbb{R}^n. \quad (5.13)$$

Dann ist die Gleichung

$$\nabla f(x) = y \quad (5.14)$$

für jedes y eindeutig lösbar.

Beweis: Da für die Funktion $g(x) := f(x) - (x,y)$ gilt:

$\nabla g(x) = \nabla f(x) - y$, $D^2g = D^2f$, genügt es, den Fall $y = 0$ zu betrachten.

Nach Lemma 1 ist f strikt konvex, hat also höchstens einen kritischen Punkt (nämlich ein Minimum). Also hat die

Gleichung $\nabla f(x) = 0$ höchstens eine Lösung. Wir zeigen jetzt, dass es andererseits sicher eine Lösung gibt.

Nach der Taylorschen Formel gilt

$$f(x) = f(0) + (\nabla f(0), x) + \frac{1}{2} D^2 f(sx)(x, x)$$

mit $s \in (0, 1)$. Daraus erhalten wir mit (5.13) die Abschätzung

$$f(x) \geq f(0) - |\nabla f(0)| |x| + \frac{\alpha}{2} |x|^2, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Folglich existiert ein $R > 0$ mit $f(x) \geq f(0)$ für $|x| \geq R$.

Also nimmt f höchstens in dem Ball $\{x \mid |x| < R\}$ ein Minimum an. Da die abgeschlossene Kugel $\{x \mid |x| \leq R\}$ kompakt ist, nimmt die Einschränkung von f auf diese das Minimum an, welches nach dem Gesagten ein globales Minimum von f in \mathbb{R}^n ist. Es existiert also ein x mit $\nabla f(x) = 0$. \square

Die Legendretransformation lässt sich für beliebige stetige Funktionen definieren:

$$f^*(y) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} [(y, x) - f(x)]. \quad (5.15)$$

(Dies ist z.B. in der Thermodynamik wichtig.) Ist f konvex, so hat $f^*(y)$ die in Fig. 5.1 angedeutete Bedeutung.

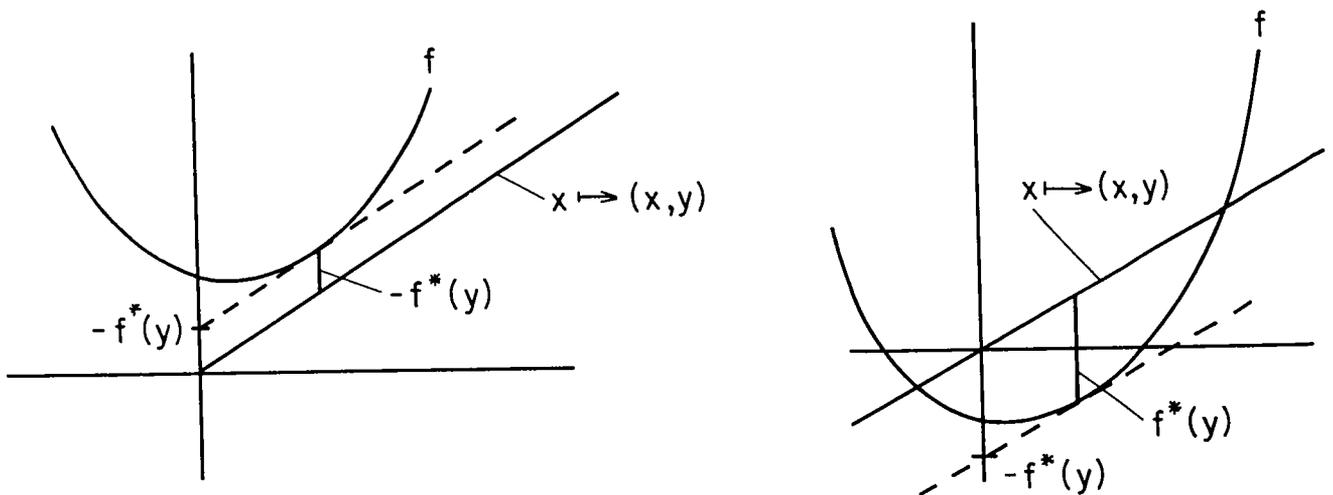


Fig. 5.1. Geometrische Bedeutung der Legendretransformation.

Der folgende Satz wird für uns nützlich sein.

Satz 5.1: Es sei $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und D^2f sei gleichmässig positiv definit (vgl. (5.13)). Dann gilt:

$$(i) \quad f^*(y) = (y, x(y)) - f(x(y)) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $x(y)$ die eindeutige Lösung der Gleichung $\nabla f(x) = y$ ist;

$$(ii) \quad f^* \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \text{ ist strikt konvex und } \nabla f^* = (\nabla f)^{-1};$$

$$(iii) \quad f(x) + f^*(y) \geq (y, x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$f(x) + f^*(y) = (y, x) \iff x = x(y) (= (\nabla f)^{-1}(y));$$

$$(iv) \quad f^{**} := (f^*)^* = f.$$

Beweis: (i) Die Funktion $g(x) := f(x) - (x, y)$ erfüllt

$$g \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \quad \nabla g(x) = \nabla f(x) - y, \quad D^2g = D^2f.$$

Nach den beiden Lemmata 1 und 2 ist deshalb g strikt konvex und besitzt in $x(y)$ ein eindeutiges globales Minimum. Dann folgt aber (i) aus

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} g(x) = g(x(y)) = - \max_{x \in \mathbb{R}^n} (-g(x)) = - f^*(y).$$

(ii) Die Umkehrfunktion $x(\cdot)$ ist nach dem Satz über die Umkehrfunktion aus $C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, da D^2f positiv definit ist.

Aus (i) folgt deshalb $f^* \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Für das Differential von f^* erhalten wir

$$\begin{aligned} df^*(y) &= d(x(y), y) - d(f(x(y))) = dx_i y_i + x_i dy_i - \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}}_{y_i} dx_i \\ &= x_i(y) dy_i. \end{aligned}$$

Das beweist $f^* \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und ferner $\nabla f^*(y) = x(y) = (\nabla f)^{-1}(y)$.

Es verbleibt die strikte Konvexität von f^* . Um diese zu beweisen, seien $y, z \in \mathbb{R}^n$ beliebig und

$$u := \nabla f^*(y) = (\nabla f)^{-1}(y), \quad v := \nabla f^*(z) = (\nabla f)^{-1}(z).$$

Nun wenden wir rechts in

$$(\nabla f^*(y) - \nabla f^*(z), y-z) = (u-v, \nabla f(u) - \nabla f(v))$$

den Mittelwertsatz an und benutzen (5.13)

$$\begin{aligned} (\nabla f^*(y) - \nabla f^*(z), y-z) &= D^2 f(v+s(u-v)) \cdot (u-v, u-v) \\ &\geq \alpha |u-v|^2, \quad \forall y, z \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

($s \in (0,1)$). Für alle $y, z \in \mathbb{R}^n$, $y \neq z$, ist deshalb

$$(\nabla f^*(y) - \nabla f^*(z), y-z) > 0. \quad (5.17)$$

Daraus schliesst man leicht, dass die Ableitung der Funktion $\varphi(t) := f^*(z+t(y-z))$ strikt wachsend ist. Also ist φ strikt konvex für alle y, z , woraus sich die Konvexität von f^* ergibt.

(iii) ist trivial.

(iv) Dies ergibt sich wie bei der lokalen Diskussion (p.123).

B. Kanonische Gleichungen

Nun können wir die Beziehung zwischen Lagrangeschen und Hamiltonschen Systemen besprechen.

Satz 5.2: Es sei $L: U \times \mathbb{R}^f \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($U \subset \mathbb{R}^f$) eine C^2 Lagrange-funktion und die Matrix $(\partial^2 L / \partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j)$ sei gleichmässig positiv definit. Dann ist die Eulersche Gleichung

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (i=1, \dots, f) \quad (5.18)$$

äquivalent zum Hamiltonschen System

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i=1, \dots, f), \quad (5.19)$$

wobei die Hamiltonfunktion H die Legendretransformierte von L bzgl. der Variablen \dot{q} ist, d.h.

$$H(q,p,t) \stackrel{''}{=} (p, \dot{q}) - L(q, \dot{q}, t) \quad (5.20)$$

mit

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} . \quad (5.21)$$

In (5.20) ist rechts die eindeutige Auflöung von \dot{q} nach (q,p,t) einzusetzen (vgl. Lemma 2).

Beweis: $\stackrel{''}{\Rightarrow}$ Nach (5.9) ist

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = - \frac{\partial L}{\partial q_i} . \quad (5.22)$$

Deshalb folgt aus (5.21) und der Eulerschen Gleichung

$$\dot{p}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = - \frac{\partial H}{\partial q_i} .$$

Da nach Satz 5.1 die Abbildungen ∇f und ∇f^* zueinander invers sind, folgt aus (5.21)

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} .$$

$\stackrel{''}{\Leftarrow}$ Wegen $f^{**} = f$ in Satz 5.1 gilt

$$L(q, \dot{q}, t) = (\dot{q}, p) - H(q, p, t), \quad (5.23)$$

mit $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$. Daraus schliessen wir jetzt umgekehrt auf (5.21) und daraus auf

$$\dot{p}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = - \frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} ,$$

wobei wieder (5.22) verwendet wurde. Damit ist auch gezeigt, dass umgekehrt aus den Hamiltonschen Gleichungen die Eulerschen Gleichungen folgen. \square

Beispiele:

1. Es sei

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q), \quad (5.24)$$

mit

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k, \quad (5.25)$$

wo $A(q) := (a_{ik}(q))$ eine gleichmässig positiv definite Matrix ist.

Dann sind die Bedingungen des Satzes 5.2 erfüllt und es ist

$$H(q, p) = (\dot{q}, p) - L(q, \dot{q}),$$

mit

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = A(q) \dot{q} \implies \dot{q} = A(q)^{-1} p.$$

Die Hamiltonfunktion ist

$$H(q, p) = (p, A^{-1}p) - \frac{1}{2} (A^{-1}p, AA^{-1}p) + V$$

d.h.

$$H(q, p) = \frac{1}{2} (p, A^{-1}p) + V \quad (= E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}). \quad (5.26)$$

2. In § 3.1 wurde gezeigt, dass die Lagrangefunktion für ein Teilchen in einem elektromagnetischen Feld wie folgt aussieht

$$L = \frac{m}{2} \dot{\underline{x}}^2 - e\varphi + \frac{e}{c} \dot{\underline{x}} \cdot \underline{A}. \quad (5.27)$$

Die zugehörige Hamiltonfunktion wird in den Uebungen bestimmt.

Das Ergebnis lautet

$$H = \frac{1}{2m} \left(\underline{p} - \frac{e}{c} \underline{A} \right)^2 + e\varphi, \quad (5.28)$$

Gl. (5.28) ist für die Quantenmechanik sehr wichtig. Beachte, dass für ein Teilchen in einem magnetischen Feld der kanonische Impuls nicht mehr der kinematische Impuls $m\dot{\underline{x}}$ ist, denn

$$\underline{p} = m\dot{\underline{x}} + \frac{e}{c} \underline{A}. \quad (5.29)$$

Es sei $x = (q, p)$, d.h.

$$x_i = q_i \quad \text{und} \quad x_{f+i} = p_i, \quad \text{für} \quad i=1, \dots, f \quad (5.33)$$

und ferner sei J die folgende $2f \times 2f$ Matrix

$$J = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1_f \\ \hline -1_f & 0 \end{array} \right). \quad (5.34)$$

Wir nennen sie die symplektische Normalform. Ihre Matrixelemente bezeichnen wir mit E_{kl} , $J = (E_{kl})$.

Jetzt können wir die kanonischen Gleichungen (5.19) kompakter wie folgt schreiben

$$\dot{x}_k = \sum_l E_{kl} \frac{\partial H}{\partial x_l}. \quad (5.35)$$

In der Terminologie von § 2.1 ist (5.35) ein dynamisches System zum Vektorfeld:

$$X_H = J \nabla H = J(D_1 H)^T \quad (5.36)$$

$$= \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_f}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q_f} \right). \quad (5.36')$$

Ein Vektorfeld dieser Form nennt man ein Hamiltonsches Vektorfeld (zur Hamiltonfunktion H). Die Matrix J hat die folgenden Eigenschaften:

$$J^T J = 1, \quad J^T + J = 0, \quad J^2 = -1, \quad \text{Det } J = 1. \quad (5.37)$$

Die Zustände eines Systems sind in der kanonischen Formulierung der Mechanik durch die Punkte $x = (q, p)$ im Phasenraum $M \subset \mathbb{R}^{2f}$ gegeben. [Es ist allerdings oft nicht möglich, den Phasenraum durch eine (offene) Menge im \mathbb{R}^{2f} darzustellen. Schon für einfache Systeme ist dieser eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, welche nicht durch ein einziges Koordinatensystem überdeckt werden kann. Wir ignorieren dies, d.h. wir

arbeiten immer in einer Karte.]

Die kanonische Struktur der Gleichungen (5.35) hat zur Folge, dass die Strömung spezielle Eigenschaften hat. So gilt nach (5.30) für autonome Hamiltonsche Systeme der Energiesatz, d.h. H ist längs den Integralkurven an das Hamiltonsche Vektorfeld (5.36) konstant). Wir wenden uns nun einer weiteren wichtigen allgemeinen Eigenschaft zu.

C. Symplektische Transformationen

Zunächst betrachten wir ein lineares Hamiltonsches System mit Hamiltonfunktion

$$H = \frac{1}{2} \sum g_{ik} x_i x_k, \quad g_{ik} = g_{ki}. \quad (5.38)$$

Für dieses ist

$$\dot{x}_i = \sum \varepsilon_{ik} g_{jk} x_j$$

oder, in Matrixschreibweise,

$$\dot{x} = JGx, \quad G := (g_{ik}). \quad (5.39)$$

Wir zeigen nun, dass der zugehörige Fluss $\phi_t = e^{tA}$, $A := JG$, die folgende Gleichung erfüllt:

$$\phi_t^T J \phi_t = J. \quad (5.40)$$

Bezeichnen wir die linke Seite dieser Gleichung mit $\Gamma(t)$, so gilt

$$\dot{\Gamma} = \phi_t^T J \dot{\phi}_t + \dot{\phi}_t^T J \phi_t = \phi_t^T J A \phi_t + \phi_t^T A^T J \phi_t.$$

Da $A^T = (JG)^T = G^T J^T = -GJ$ und $JA = JJG = -G$, folgt

$$\dot{\Gamma} = -\phi_t^T G \phi_t + \phi_t^T G \phi_t = 0.$$

Ferner ist $\Gamma(0) = J$, also folgt (5.40). Eine analoge Aussage werden wir unten für den Fluss von nichtlinearen Hamiltonschen Systemen beweisen.

Es sei

$$\text{Sp}(f, \mathbb{R}) = \left\{ 2f \times 2f \text{ Matrizen } M : M^T J M = J \right\}$$

die reelle symplektische lineare Gruppe über \mathbb{R}^{2f} . Nach (5.40) ist $\phi_t \in \text{Sp}(f, \mathbb{R})$.

Auf dem \mathbb{R}^{2f} definieren wir die folgende schiefe Form

$$\omega(x, y) := \sum_{k, l} \epsilon_{kl} x_k y_l = x^T J y. \quad (5.42)$$

Diese ist natürlich nicht ausgeartet. $(\mathbb{R}^{2f}, \omega)$ ist ein symplektischer Vektorraum. Die Automorphismengruppe dieses Raumes ist gerade die symplektische Gruppe $\text{Sp}(f, \mathbb{R})$, denn $\omega(Mx, My) = \omega(x, y)$ bedeutet in Matrixschreibweise:

$$(Mx)^T J (My) = x^T J y \quad \text{für alle } x, y$$

d.h. es gilt

$$M^T J M = J,$$

und umgekehrt.

Nun betrachten wir die Volumenform

$$\Omega = \frac{(-1)^f}{(2f)!} \underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_{f \text{ mal}}. \quad (5.43)$$

Da Ω eine total antisymmetrische Multilinearform ist, gilt

$$\Omega(Mx_1, \dots, Mx_{2f}) = (\det M) \cdot \Omega(x_1, \dots, x_{2f}).$$

Andererseits ist nach (5.43) für $M \in \text{Sp}(f, \mathbb{R})$ die Form Ω invariant. Also schliessen wir auf

$$\det M = 1 \quad \text{für } M \in \text{Sp}(f, \mathbb{R}). \quad (5.44)$$

Nach diesen algebraischen Vorbereitungen betrachten wir jetzt wieder nichtlineare Hamiltonsche Systeme. Zunächst

beweisen wir eine zu (5.40) analoge Aussage.

Satz 5.3: Sei $\phi_{t,s}$ der (lokale) Fluss zu X_H (vgl. (5.36)).

Dann gilt für alle x, t und s , für die der Fluss definiert ist

$$D\phi_{t,s}(x) \in \text{Sp}(f, \mathbb{R}). \quad (5.45)$$

Sei umgekehrt $\phi_{t,s}$ der Fluss zum Vektorfeld $X(x,t)$ und es gelte lokal (5.45). Dann ist das Vektorfeld lokal Hamiltonsch, d.h. es existiert eine Hamiltonfunktion H mit $X = X_H$.

Beweis: Aus der Definition des Flusses $\phi_{t,s}$ zu einem (zeitabhängigen) Vektorfeld $X(x,t)$ folgt (vgl. §2.1):

$$\frac{d}{dt} \phi_{t,s}(x) = X(\phi_{t,s}(x), t), \quad (5.46)$$

denn

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \phi_{t,s}(x) &= \left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=0} \phi_{t+\tau, s}(x) = \left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=0} \phi_{t+\tau, t}(\phi_{t,s}(x)) \\ &= X(\phi_{t,s}(x), t). \end{aligned}$$

Nach der Kettenregel erhalten wir daraus

$$\frac{\partial}{\partial t} D\phi_{t,s}(y) = D_1 X(x, t) D\phi_{t,s}(y), \quad x = \phi_{t,s}(y). \quad (5.47)$$

Nun betrachten wir, ähnlich wie im linearen Fall, die Zeitableitung von

$$\Gamma(y, t, s) := [D\phi_{t,s}(y)]^T J D\phi_{t,s}(y). \quad (5.48)$$

Wir finden, mit (5.47).

$$\frac{\partial}{\partial t} \Gamma(y, t, s) = (D\phi_{t,s})^T [J D_1 X(x, t) + (D_1 X(x, t))^T J] D\phi_{t,s}(y). \quad (5.49)$$

Für $X = J(D_1 H)^T$ verschwindet die eckige Klammer von (5.49), da

$$D_1(D_1 H)^T = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} \right) \quad (5.50)$$

eine symmetrische Matrix (die Hessesche von H) ist. In diesem

Fall ist also $(\partial/\partial t) \Gamma(y, t, s) = 0$ für "alle" y, t, s .

Da aber für $t = s$ $D\phi_{s,s} = 1$, d.h. $\Gamma(y, s, s) = J$ ist, folgt $D\phi_{t,s}(y) \in \text{Sp}(f, \mathbb{R})$. Dies beweist den ersten Teil des Satzes.

Sei umgekehrt $\phi_{t,s}$ der Fluss zu einem Vektorfeld für welchen (5.45) erfüllt ist. Dann muss die eckige Klammer von (5.49) verschwinden, d.h. es muss gelten:

$$D_1(JX) - D_1(JX)^T = 0.$$

Dies bedeutet, dass die Rotation des Vektorfeldes JX (bei festem t) verschwindet. Dies ist lokal notwendig und hinreichend für die Existenz einer Funktion $H(x, t)$ mit

$$JX = - \nabla H \iff X = J \nabla H = X_H.$$

(∇H bezeichnet immer den Gradienten von H bei fester Zeit.) \square

Eine direkte Folge dieses Satzes ist der Satz von Liouville:

Satz 5.4: Sei $\phi_{t,s}$ der Fluss zur Hamiltonfunktion $H(x, t)$, dann gilt für jede messbare (stetige) Phasenfunktion über dem Phasenraum $M \subset \mathbb{R}^{2f}$:

$$\int_M F \circ \phi_{t,s} d^{2f}x = \int_M F d^{2f}x \quad (5.51)$$

($d^{2f}x$: Lebesgue Mass). Insbesondere gilt für das Lebesguesche Mass $|B|$ jeder Borelmenge B :

$$|\phi_{t,s}(B)| = |B|, \quad (5.52)$$

d.h. das Lebesguesche (Liouvillesche-) Mass ist unter dem Fluss $\phi_{t,s}$ invariant.

Beweis: Wir benutzen die folgende bekannte Transformationsformel für Integrale: Es sei φ eine reguläre Transformation einer offenen Menge $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ auf D (d.h. φ ist ein C^1 -Diffeomorphismus von Δ auf D). Ferner sei f eine messbare Funktion auf D und B eine Borelsche Teilmenge von D .

Dann gilt

$$\int_B f(x) d^n x = \int_{\varphi^{-1}(B)} (f \circ \varphi)(x) |\det D\varphi(x)| d^n x \quad (5.53)$$

falls eines der beiden Integrale existiert.

Nun ist nach (5.45) und (5.44)

$$\det D\phi_{t,s} = 1 \quad (5.54)$$

und deshalb gilt (5.51). Wählt man darin die charakteristische Funktion der Menge B , so folgt daraus (5.52).

Ergänzungen: Im Anschluss an den letzten Satz betrachten wir die folgende Verallgemeinerung, welche z.B. in der Hydrodynamik wichtig ist.

Es sei $\phi_{t,s}$ der Fluss zu einem beliebigen Vektorfeld $X(x,t)$, D ein Bereich und $D_{t,s} = \phi_{t,s}(D)$. Für jede differenzierbare Funktion $f(x,t)$ gilt dann:

$$\frac{d}{dt} \int_{D_{t,s}} f d^n x = \int_{D_{t,s}} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(fX) \right] d^n x. \quad (5.55)$$

Beweis: Der Einfachheit halber betrachten wir den autonomen Fall und überlassen den zeitabhängigen Fall dem Leser als Übungsaufgabe. Auf Grund der Gruppeneigenschaft von ϕ_t genügt es, die Gleichung

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t} f d^n x = \int_{D_t} \operatorname{div}(fX) d^n x \quad (5.56)$$

für $t = 0$ zu beweisen. Nun ist nach (5.53) $[\det D\phi_t > 0$ für $t \simeq 0]$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_{D_t} f d^n x &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_D f \circ \phi_t \det D\phi_t d^n x \\ &= \int_D \left\{ \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\phi_t(x)) + f \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \det D\phi_t \right\} d^n x . \end{aligned} \quad (5.57)$$

Nun ist aber:

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\phi_t(x)) = D_X f , \quad (5.58)$$

wobei D_X die Richtungsableitung bezeichnet. Ausserdem gilt

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \det D\phi_t = \operatorname{div} X , \quad (5.59)$$

wie wir gleich zeigen werden. Setzen wir die beiden letzten Gleichungen in (5.57) ein, so folgt

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_{D_t} f d^n x = \int_D \underbrace{[D_X f + f \operatorname{div} X]}_{\operatorname{div}(fX)} d^n x = \int_D \operatorname{div}(fX) d^n x .$$

Es bleibt der Beweis von (5.59). Nun ist

$$D\phi_s = 1 + sDX + \mathcal{O}(s^2) .$$

Also

$$\det D\phi_s = 1 + s \operatorname{Sp} DX + \mathcal{O}(s^2)$$

und folglich

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \det D\phi_s = \operatorname{Sp} DX = \operatorname{div} X . \quad \square$$

Speziell folgt aus (5.55) für $f \equiv 1$

$$\frac{d}{dt} \Big|_{D_{t,s}} = \int_{D_{t,s}} \operatorname{div} X d^n x . \quad (5.60)$$

Für ein Hamiltonsches Feld $X = X_H$ ist $\operatorname{div} X_H = 0$ und deshalb

folgt aus (5.60) wieder, dass das Liouvillesche Mass unter einem Hamiltonschen Fluss erhalten bleibt.

Als weitere Anwendung von (5.55) betrachten wir eine Funktion $f(x,t)$, für welche die "Substanzmenge"

$$\int_{\phi_{t,s}(D)} f(x,t) d^n x$$

unter der Strömung konstant bleibt. (Dies gilt z.B. für die Massendichte in der Hydrodynamik.) Dann folgt aus (5.55)

für jedes Gebiet D die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(fX) = 0. \quad (5.61)$$

Im Hamiltonschen Fall $X = X_H$ ist $\operatorname{div}X_H = 0$ und folglich

$$\frac{\partial f}{\partial t} + D_{X_H} f = 0, \quad (5.62)$$

oder

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = 0, \quad (5.63)$$

wenn

$$\{f, H\} = D_{X_H} f = \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i} e_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) \quad (5.64)$$

die Poisson-Klammer bezeichnet.

* * *

(Lokale) Diffeomorphismen $\psi: \mathbb{R}^{2f} \rightarrow \mathbb{R}^{2f}$ des Phasenraumes, mit der Eigenschaft $D\psi(x) \in \operatorname{Sp}(f, \mathbb{R})$, nennen wir symplektisch oder kanonisch. Nach Satz 5.3 ist der Fluss $\phi_{t,s}$ eines Hamiltonschen Vektorfeldes symplektisch. Symplektische Diffeomorphismen werden im folgenden eine grosse Rolle spielen. Sie lassen die kanonische Struktur (5.19) eines Hamiltonschen Systems invariant. Ist nämlich $x(t)$ Lösung des autonomen

Hamiltonschen Systems

$$\dot{x}(t) = X_H(x(t)) , \quad (5.65)$$

so gilt für $y(t) := \phi(x(t))$:

$$\dot{y} = D\phi \cdot \dot{x} = D\phi \cdot X_H(x) = D\phi \cdot J \cdot (DH)^T .$$

Für $K(y) := H(x)$, $y = \phi(x)$, d.h.

$$K = H \circ \phi^{-1} ,$$

gilt

$$DH = DK \cdot D\phi \implies (DH)^T = (D\phi)^T (DK)^T$$

und folglich

$$\dot{y} = \underbrace{D\phi \cdot J \cdot (D\phi)^T}_{J} (DK)^T = J(DK)^T = X_K(y) .$$

Dies zeigt

$$\phi_* X_H = X_K , \quad K = H \circ \phi^{-1} . \quad (5.66)$$

Das Hamiltonsche Vektorfeld X_H wird also in das Hamiltonsche Vektorfeld X_K übergeführt, wobei K die alte Hamiltonfunktion H durch die neuen Variablen ausgedrückt ist. (Den nichtautonomen Fall betrachten wir später.)

D. Formulierung mit Differentialformen

Die (konstante) nicht ausgeartete Differentialform z -ten Grades (5.42) hat die Darstellung

$$\omega = \frac{1}{2} \sum_{k,l} \varepsilon_{kl} dx^k \wedge dx^l = \sum_i dq_i \wedge dp_i \quad (5.67)$$

und ist natürlich geschlossen *)

$$d\omega = 0 . \quad (5.68)$$

*) Umgekehrt lässt sich zeigen, dass zu einer nicht ausgearteten geschlossenen 2-Form immer Koordinaten existieren, in denen ω die Form (5.67) hat (Theorem von Darboux).

Das Paar (M, ω) ist eine symplektische Mannigfaltigkeit.

Jedes Vektorfeld X auf dem Phasenraum M definiert auf M eine 1-Form $i_X \omega$, wobei

$$i_X \omega(Y) := \omega(X, Y) \quad \text{für alle Vektorfelder } Y. \quad (5.69)$$

Dadurch wird ein Isomorphismus zwischen dem Vektorraum $\mathfrak{X}(M)$ aller Vektorfelder und dem Vektorraum $\Lambda^1(M)$ aller 1-Formen definiert. Ist also H eine differenzierbare Funktion, so existiert genau ein Vektorfeld $X_H \in \mathfrak{X}(M)$ mit

$$i_{X_H} \omega = dH. \quad (5.70)$$

Wir zeigen jetzt, dass X_H mit (5.36) identisch ist. Bezeichnen X_i die Komponenten von X_H in der kanonischen Basis $\{e_i\}$ des \mathbb{R}^{2f} , so gilt, auf Grund der Dualität $dx_i(e_j) = \delta_{ij}$, für alle $Y \in \mathfrak{X}(M)$:

$$i_{X_H} \omega(Y) = \omega(X_H, Y) = \varepsilon_{kl} X_k Y_l = dH(Y) = \frac{\partial H}{\partial x^l} Y_l.$$

Deshalb ist $\varepsilon_{kl} X_k = \partial H / \partial x^l$, also $X_H = J(dH)^T = J \text{ grad } H$.

Symplektische Transformationen können wir wie folgt charakterisieren.

Satz 55: Ein Diffeomorphismus $\psi: M \rightarrow M$ ist genau dann symplektisch, wenn ω unter ψ invariant ist,

$$\psi^* \omega = \omega \quad (5.71)$$

($\psi^* \omega$ bezeichnet die zurückgezogene Form; s. Anhang I)

Beweis: Es sei $\psi(x) =: (\psi_1(x), \dots, \psi_{2f}(x))$, d.h. $\psi_i = x_i \circ \psi = \psi^*(x_i)$, wobei x_i die Komponentenfunktionen sind, $x_i: x \mapsto i^{\text{te}}$ Komponente von x . Dann gilt nach allgemeinen Regeln

$$\psi^* \omega = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} d(\psi^*(x_i)) \wedge d(\psi^*(x_j)) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} d\psi_i \wedge d\psi_j =$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_{lj} \psi_{i,k} dx_k \wedge \psi_{j,l} dx_l =: \frac{1}{2} \bar{\varepsilon}_{kl} dx_k \wedge dx_l ,$$

wobei

$$(\bar{\varepsilon}_{kl}) = (D\psi)^T J D\psi .$$

Daraus ergibt sich die Behauptung. \square

Bezeichnet θ die 1-Form

$$\theta = \sum p_i dq_i \tag{5.72}$$

so gilt

$$\omega = - d\theta . \tag{5.73}$$

Da $\psi^*\omega - \omega = - d(\psi^*\theta - \theta)$ gilt das

Korollar: Der Diffeomorphismus ψ ist genau dann symplektisch, falls $\psi^*\theta - \theta$ geschlossen ist.

* * *

Nun besprechen wir noch eine nützliche Methode, symplektische Transformationen zu erzeugen.

Es sei $S: U \subset \mathbb{R}^f \times \mathbb{R}^f \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion der Variablen (q,P) , für welche

$$\det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial P_j} \right) \neq 0 . \tag{5.74}$$

Dann lassen sich die Gleichungen

$$p = D_1 S(q,P)^T, \quad Q = D_2 S(q,P)^T \tag{5.75}$$

nach (q,p) auflösen. [Die 2. Gleichung von (5.75) hat nach (5.74) eine eindeutige Auflösung nach q . Setzt man das Resultat $q(Q,P)$ in die erste Gleichung ein, so ergibt sich $p(Q,P)$.]

Satz 5.6: Unter den obigen Voraussetzungen über die Funktion S sei

$$\begin{aligned} q_i &= \varphi_i(Q, P) \\ p_i &= \psi_i(Q, P) \end{aligned} \quad (5.76)$$

eine Auflösung von (5.75), d.h. wir haben eine Abbildung $\varphi: V \subset \mathbb{R}^f \times \mathbb{R}^f \rightarrow \mathbb{R}^f$ mit stetigen partiellen Ableitungen (bis zur 2. Ordnung) derart, dass

$$(\varphi(Q, P), P) \in U, \quad Q = D_2 S(\varphi(Q, P), P)^T, \quad (Q, P) \in V; \quad (5.77)$$

ferner ist

$$\psi(Q, P) = D_1 S(\varphi(Q, P), P)^T, \quad (Q, P) \in V. \quad (5.78)$$

Dann stellt die Abbildung

$$\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \varphi(Q, P) \\ \psi(Q, P) \end{pmatrix} \quad (5.79)$$

von V in den \mathbb{R}^{2f} eine symplektische Transformation dar.

Beweis: Nach dem Korollar zu Satz 5.5 haben wir zu zeigen, dass die Differentialform

$$\sum \psi_k d\varphi_k - \sum P_k dQ_k \quad (*)$$

geschlossen ist. Dazu betrachten wir das Differential der in V definierten Funktion

$$(Q, P) \mapsto S(\varphi(Q, P), P)$$

und bekommen mit Hilfe der Kettenregel und den Gleichungen (5.77) und (5.78)

$$dS(\varphi(Q, P), P) = \frac{\partial S}{\partial q_k} d\varphi_k + \frac{\partial S}{\partial P_k} dP_k = \psi_k d\varphi_k + Q_k dP_k.$$

Dies zeigt, dass die Differentialform (*) gleich $d(S(\varphi(Q, P), P) - Q \cdot P)$, also geschlossen ist.

Würde es uns gelingen, eine kanonische Transformation zu finden, dass die Hamiltonfunktion K in den neuen Variablen (vgl. 5.66) z.B. nur von den neuen Impulskoordinaten P_1, \dots, P_f abhängt, dann ist die Lösung des transformierten Hamiltonschen Systems

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = 0 \quad (5.80)$$

trivial. Dies könnte man z.B. mit Hilfe von Satz 5.6 durch eine erzeugende Funktion S versuchen, welche also

$$H(q, D_1 S(q, P)^T) = K(P) \quad (5.81)$$

erfüllen müsste. Dieser Gedanke wird später in der Hamilton-Jacobi Theorie ausgeführt werden.

* * *

Anhang. Wiederkehr-Theorem von Poincaré, statistischer Ergodensatz und quasiperiodische Strömung auf dem Torus

In diesem Anhang besprechen wir einige wenige Resultate, welche das langzeitliche Verhalten einer Strömung betreffen. Dies ist auch für die statistische Mechanik von einem gewissen Interesse.

Poincaréscher Wiederkehrssatz: Es sei Ω eine Teilmenge des Phasenraumes, welche unter dem symplektischen Fluss ϕ_t invariant ist ($\phi_t(\Omega) \subset \Omega$, für alle $t \in \mathbb{R}$) und für die $\mu(\Omega) < \infty$ sei, wobei μ das Liouvillesche Mass bezeichnet. Dann kehrt die Bahn fast jedes Punktes (bezüglich μ) von Ω unendlich oft in jede seiner Umgebungen wieder.

Beweis: Es sei $B \subset \Omega$ eine beliebige Borelmenge mit $\mu(B) > 0$ und $\tau \in \mathbb{R}_+$ eine Zeiteinheit. Die Menge

$$K_n = \bigcup_{j=n}^{\infty} \phi_{-j\tau}(B), \quad j, n \in \mathbb{Z}_+, \quad (\text{A.1})$$

ist die Menge der Punkte, die zumindest nach n oder mehr Zeiteinheiten nach B kommen. Offensichtlich gilt

$$B \subset K_0, \quad K_0 \supset K_1 \supset \dots \supset K_{n-1} \supset K_n. \quad (\text{A.2})$$

Die Menge $B \cap \left(\bigcap_{n \geq 0} K_n \right)$ besteht aus denjenigen Punkten von B , welche nach beliebig langer Zeit nochmals zurückkehren. Wir zeigen, dass das Mass dieser Menge gleich $\mu(B)$ ist.

Da ϕ_t masserhaltend ist, gilt

$$\mu(K_n) = \mu(\phi_{\tau} K_n) = \mu(K_{n-1}) \quad (\text{A.3})$$

und wegen der Schachtelung (A.2)

$$\begin{aligned} \mu(B \cap (\bigcap_{n \geq 0} K_n)) &= \mu(B \cap K_0) - \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B \cap (K_{i-1} \setminus K_i)) \\ &= \mu(B), \end{aligned}$$

denn $B \cap K_0 = B$ und $K_{n-1} \supset K_n$, sowie (A.3) implizieren

$$\mu(K_{n-1} \setminus K_n) = 0.$$

Das Mass der beliebigen messbaren Menge B ist somit gleich demjenigen ihrer Punkte, welche unendlich oft nach B zurückkommen. \square

Bemerkung: Unter Umständen wird durch die Energieerhaltung im Phasenraum eine zeitinvariante Untermannigfaltigkeit endlichen Volumens bestimmt; für diese trifft dann die Aussage zu.

Schwarzschild'scher Einfangsatz: Es sei Ω eine messbare Menge des Phasenraumes mit $\mu(\Omega) < \infty$. Die Bahn fast jeden Punktes von Ω , welche in Zukunft stets in Ω verbleiben wird, war schon in der Vergangenheit in Ω .

Beweis: Es seien $\Omega_+ = \bigcap_{t > 0} \phi_t(\Omega)$, $\Omega_- = \bigcap_{t < 0} \phi_t(\Omega)$

die Mengen der Punkte, welche immer in Ω bleiben werden, bzw. immer schon in Ω waren. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mu(\Omega_+) &= \mu(\phi_{-s}\Omega_+) = \mu\left(\bigcap_{t \gg -s} \phi_t(\Omega)\right) = \mu\left(\bigcap_{-\infty < t < \infty} \phi_t(\Omega)\right) \\ &= \mu(\Omega_+ \cap \Omega_-) = \mu(\Omega_-), \end{aligned}$$

oder $\mu(\Omega_+ \setminus \Omega_+ \cap \Omega_-) = \mu(\Omega_- \setminus \Omega_+ \cap \Omega_-) = 0$. \square

Bahnen, welche aus dem Unendlichen kommen und dann in Ω eingefangen werden, machen also höchstens eine Nullmenge von Ω aus. Ebenso gilt die zeitumgekehrte Aussage.

Natürlich kann das System auch instabil sein: $\mu(\Omega_+) = 0$.

Der statistische Ergodensatz

Die folgenden Betrachtungen und Resultate sind vor allem im Hinblick auf die statistische Mechanik interessant. Dort möchte man wissen, wie sich ein komplexes System mit sehr vielen Freiheitsgraden im Mittel über "lange" Zeiten durchschnittlich verhält. Dabei sieht man von sehr speziellen Anfangsbedingungen, die zu atypischen Bahnen führen, ab. Leider gibt die Ergodentheorie, obschon sie sich in den letzten Jahrzehnten stark entwickelt hat, dem Physiker auf solche Fragen nur limitierte Antworten. Deshalb hängen die Grundlagen der statistischen Mechanik einigermaßen in der Luft.

Als eine erste Einführung in die Ergodentheorie besprechen wir nun den statistischen Ergodensatz. Das Liouville'sche Mass induziert ein Mass auf der Energiefläche Σ_E , formal gegeben durch^{*)}

$$\mu_E(B) = \# \int_B \delta(H(x) - E) d^f x \quad (\#: \text{ Normierung}). \quad (\text{A.4})$$

Das Mass μ_E sei normiert, $\mu_E(\Sigma_E) = 1$.

) Streng ist dieses folgenermassen definiert. Es sei Ω die Volumenform (5.43) und $dH \neq 0$ auf Σ_E . Ist σ eine $(2f-1)$ -Form, sodass $dH \wedge \sigma = \Omega$, so ist die Form $\mu_E = i^ \sigma$ (i : Injektion von Σ_E in den Phasenraum M) unabhängig von σ . Per definitionem ist die Distribution $\delta(H-E)$:

$$\langle \delta(H-E), f \rangle := \int_{\Sigma_E} f \cdot \mu_E \quad (f: \text{ Testfunktion}).$$

$d\mu_E$ ist das Mass, welches zur Volumenform μ_E auf Σ_E gehört. (Dieses ist nach dem Riesz'schen Darstellungssatz eindeutig bestimmt.)

Unser Ziel ist es, etwas über den zeitlichen Mittelwert

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(\phi_t(x)) dt \quad (\text{A.5})$$

zu erfahren. Wir benutzen Hilbertraum-Methoden und definieren

im Hilbertraum $L^2(\Sigma_E, d\mu_E)$ die linearen Operatoren U_t :

$f \mapsto f \circ \phi_t$, d.h.

$$(U_t f)(x) = f(\phi_t(x)). \quad (\text{A.6})$$

Jedes U_t ist ein unitärer Operator, denn die Invarianz des Masses μ_E unter ϕ_t impliziert

$$\begin{aligned} (U_t f, U_t g) &= \int_{\Sigma_E} \overline{f(\phi_t(x))} g(\phi_t(x)) d\mu_E(x) \\ &= \int_{\Sigma_E} \overline{f(x)} g(x) d\mu_E(\phi_t^{-1}(x)) = \int_{\Sigma_E} \overline{f(x)} g(x) d\mu_E(x) \\ &= (f, g). \end{aligned}$$

Ferner folgt aus $U_t U_{-t} = U_0 = 1$, dass U_t invertierbar ist.

Der zeitliche Mittelwert (A.5) ist gleich

$$\frac{1}{T} \int_0^T (U_t f)(x) dt. \quad (\text{A.7})$$

Es ist einfacher, zuerst das diskrete Analogon

$$\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} U^m f$$

für eine unitäre Transformation U zu untersuchen. Dafür gilt der folgende Satz.

Statistischer Ergodensatz für Kaskaden (von Neumann): Es sei

U ein unitärer Operator des Hilbertraumes \mathcal{H}_y . P bezeichne die Projektion auf den Unterraum $\{\psi \in \mathcal{H}_y : U\psi = \psi\}$. Dann gilt für jedes $f \in \mathcal{H}_y$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U^n f = Pf. \quad (\text{A.8})$$

Beweis: Wir betrachten die (abgeschlossenen) Unterräume

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \{ \psi \mid \psi \in \mathcal{H}_y, U\psi = \psi \} \\ \mathcal{N} &= \overline{\{ \psi - U\psi \mid \psi \in \mathcal{H}_y \}} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

und notieren:

- (i) $\psi \in \mathcal{M} \Leftrightarrow U^* \psi = \psi$ (denn beide Aussagen sind äquivalent zu $U^{-1} \psi = \psi$),
- (ii) $\mathcal{N} = \mathcal{M}^\perp$. [$\varphi \in \mathcal{N}^\perp$ bedeutet $(\psi - U\psi, \varphi) = 0$ für alle ψ , oder $(\psi, \varphi) = (\psi, U^{-1} \varphi)$ für alle ψ ; deshalb ist $\varphi = U^{-1} \varphi$, d.h. $\varphi \in \mathcal{M}$, und umgekehrt.]
- (iii) $U\mathcal{M} = \mathcal{M}$, $U\mathcal{N} = \mathcal{N}$ (trivial!).

Nun sei zunächst $f = g - Ug$, d.h. $f \in \mathcal{N}$. Dann ist

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} U^m f \right\| = \left\| \frac{1}{N} (g - U^N g) \right\| \leq 2 \frac{\|g\|}{N} \xrightarrow{(N \rightarrow \infty)} 0.$$

Durch ein " $\varepsilon/3$ -Argument" folgt also

$$\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} U^m f \rightarrow 0 \text{ für } f \in \mathcal{N}, \text{ d.h. für } Pf = 0.$$

Sei jetzt $f \in \mathcal{M}$, d.h. $Pf = f$. Dann ist trivialerweise

$$\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} U^m f = f,$$

d.h. (A.8) gilt für $f \in \mathcal{M}$ und $f \in \mathcal{N}$ und somit auf $\mathcal{M} \oplus \mathcal{N} = \mathcal{H}_y$. \square

Nun kommen wir zum kontinuierlichen Fall zurück. Zunächst notieren wir, dass die unitäre Gruppe U_t stark stetig ist:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|U_t g - g\| = 0$$

(Übung). Nun setzen wir $U := U_1$ und finden, wenn $[T]$ die Gaußsche Klammer bezeichnet ($[T] \in \mathbb{Z}$, $[T] \leq T$, $[T]+1 > T$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T U_t f \, dt &= \frac{1}{T} \int_0^{[T]} U_t f \, dt + \frac{1}{T} \int_{[T]}^T U_t f \, dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{m=0}^{[T-1]} U^m \int_0^1 U_t f \, dt + \frac{1}{T} \int_{[T]}^T U_t f \, dt \end{aligned}$$

($T > 1$ vorausgesetzt). Nach dem statistischen Ergodensatz für Kaskaden konvergiert der erste Term für $T \rightarrow \infty$. Der zweite Term konvergiert ebenfalls, nämlich gegen 0. Es gibt also ein $f_0 \in L^2(\Sigma_E, d\mu_E)$ mit

$$L^2\text{-}\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f \circ \phi_t \, dt = f_0. \quad (\text{A.10})$$

Man sieht dabei sehr leicht, dass

$$U_t f_0 = f_0 \quad \text{für alle } t. \quad (\text{A.11})$$

Sei also $\mathcal{M} = \{g \mid U_t g = g \text{ für alle } t\}$ und $\mathcal{N} = \mathcal{M}^\perp$, dann gilt der folgende Satz:

Statistischer Ergodensatz für Strömungen: Sei $\{U_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ eine stark stetige unitäre Gruppe. Sei \mathcal{M} wie eben definiert, $\mathcal{N} = \mathcal{M}^\perp$ und P der Projektor auf \mathcal{M} . Dann gilt

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{T} \int_0^T U_t f \, dt - Pf \right\| = 0. \quad (\text{A.12})$$

Definition: Der Fluss ϕ_t ist ergodisch, falls $\dim \mathcal{M} = 1$, d.h. falls $f(\phi_t(x)) = f(x)$, fast überall, nur möglich ist, wenn $f = \text{const}$, fast überall.

Im ergodischen Fall ist Pf in (A.12) eine Konstante C und $C = (1, f) = \int_{\Sigma_E} f(x) \, d\mu_E(x)$.

Für eine ergodische Strömung gilt also

$$\boxed{L^2\text{-}\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f \circ \phi_t dt = \int_{\sum_E} f d\mu_E} \quad (\text{A.13})$$

d.h. das Zeitmittel strebt im Sinne der L^2 -Konvergenz gegen die konstante Funktion $\int_{\sum_E} f d\mu_E$. Das Zeitmittel ist also gleich dem statistischen Mittel über die Energiefläche für das Mass μ_E ("mikrokanonische Gesamtheit").

Mit ganz anderen Methoden lässt sich zeigen, dass in (A.13) die L^2 -Konvergenz durch die punktweise Konvergenz ersetzt werden kann:

Birkhoff'scher Ergodensatz: Es sei T eine masserhaltende Transformation eines Massraumes (Ω, μ) mit $\mu(\Omega) < \infty$. Dann konvergiert für jedes $f \in L^1(\Omega, \mu)$ die Summe

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(T^n x)$$

punktweise fast überall gegen eine Funktion $f^* \in L^1(\Omega, \mu)$. Ferner gilt $f^* \circ T = f^*$, fast überall, und

$$\int_{\Omega} f^* d\mu = \int_{\Omega} f d\mu.$$

Im ergodischen Fall gilt, falls $\mu(\Omega) = 1$, für alle $f \in L^1(\Omega, \mu)$:

$$\boxed{\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(T^n x) = \int_{\Omega} f d\mu \quad \text{fast überall.}} \quad (\text{A.14})$$

Beweis: Siehe [15], Appendix 3, p. 459.

Die Aussage (A.14) wird traditionell seit Boltzmann als Grundlage der statistischen Mechanik betrachtet. Nur kann man für realistische Systeme nicht zeigen, dass sie ergodisch

sind.

Wir geben noch eine andere Charakterisierung eines ergodischen Flusses.

Proposition: Der Fluss ϕ_t ist genau dann ergodisch, wenn für jede messbare Menge $B \subset \Sigma_E$ mit $\phi_t^{-1}(B) = B$, für alle t , entweder $\mu_E(B) = 0$ oder $\mu_E(B) = 1$ folgt.

Beweis: Es sei ϕ_t ergodisch und $\phi_t(B) = B$ für alle t . Dann ist die charakteristische Funktion $f = \chi_B$ eine invariante Funktion und also $\chi_B = \text{const}$ fast überall. Dies impliziert $\mu_E(B) = 0$ oder $\mu_E(B) = 1$.

Umgekehrt gelte die zweite Bedingung und f sei eine invariante Funktion. Dann ist für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Menge $\{x | f(x) < a\}$ unter ϕ_t invariant und folglich muss $f(x) < a$ f.ü., oder $f(x) \geq a$ f.ü. sein. Da dies für jedes a wahr ist, folgt, dass $f(x)$ fast überall eine Konstante ist. \square

* * *

Quasiperiodische Bewegung auf dem Torus

Wir werden später sehen, dass "integrable" Hamiltonsche Systeme immer auf quasiperiodische Bewegungen auf einem Torus führen (vgl. Kapitel 10).

Wir geben zunächst eine präzise

Definition: Es sei T^n der n -dimensionale Torus, $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$ (n mal), und $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \pmod{2\pi}$ die Winkelkoordinaten. Eine quasiperiodische Bewegung ist eine 1-parametrische Gruppe, welche zum dynamischen System

$$\dot{\underline{\varphi}} = \underline{\omega}, \quad \underline{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n) = \text{const} \quad (\text{A.15})$$

gehört.

Der Fluss Φ_t hat offensichtlich die Form

$$\Phi_t(\underline{\varphi}) = (\underline{\varphi} + \underline{\omega}t) = (\varphi_1 + \omega_1 t, \dots, \varphi_n + \omega_n t) \text{ mod } 2\pi. \quad (\text{A.16})$$

Die Frequenzen $\omega_1, \dots, \omega_n$ sind rational unabhängig, falls $(\underline{k}, \underline{\omega}) = 0$ für $\underline{k} \in \mathbb{Z}^n$ impliziert, dass $\underline{k} = 0$ ist. Für diesen Fall beweisen wir den folgenden

Satz von Weyl: Es sei f eine stetige Funktion auf T^n und Φ_t eine quasiperiodische Strömung (A.16) mit rational unabhängigen Frequenzen. Dann existiert das Zeitmittel

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\Phi_t(\underline{\varphi})) dt \quad (\text{A.17})$$

für alle $\underline{\varphi}$ und ist gleich dem Raummittel

$$\langle f \rangle := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} f(\underline{\varphi}) d^n \varphi. \quad (\text{A.18})$$

Beweis: Zunächst gilt der Satz für Funktionen der Form $f = e^{i(\underline{k}, \underline{\varphi})}$, $\underline{k} \in \mathbb{Z}^n$. Für $\underline{k} = 0$ ist dies trivial und für $\underline{k} \neq 0$ gilt $\langle f \rangle = 0$ und wegen

$$\int_0^T e^{i(\underline{k}, \underline{\varphi} + \underline{\omega}t)} dt = e^{i(\underline{k}, \underline{\varphi})} \frac{e^{i(\underline{k}, \underline{\omega})T} - 1}{i(\underline{k}, \underline{\omega})}$$

verschwindet auch das Zeitmittel.

Natürlich gilt damit der Satz auch für alle trigonometrischen Polynome

$$f = \sum_{|\underline{k}| \leq N} f_{\underline{k}} e^{i(\underline{k}, \underline{\varphi})}.$$

Nach dem Stone-Weierstrass Theorem können wir jede (reelle) stetige Funktion f durch trigonometrische Polynome gleich-

mässig beliebig genau approximieren. *) Daraus folgt die Behauptung unmittelbar. (Führe die nötige Epsilontik durch.)

Korollar 1: Für rational unabhängige Frequenzen ist die Trajektorie

$$\Omega(t_0) = \{ \phi_t(\underline{\varphi}) \mid t \geq t_0, \underline{\varphi} \text{ fest} \}$$

in T^n dicht.

Beweis: Es sei $\varphi_0 \in T^n$ und f eine stetige nicht negative Funktion, welche in φ_0 den Wert 1 hat und ausserhalb einer Umgebung U von φ_0 verschwindet. Nach dem obigen Satz kann das Zeitmittel von $t \mapsto f(\phi_t(\underline{\varphi}))$ nicht für alle $\underline{\varphi} \in T^n$ verschwinden. Deshalb muss es für jedes t_0 ein $t > t_0$ geben, sodass $f(\phi_t(\underline{\varphi})) > 0$ ist, d.h. $\phi_t(\underline{\varphi})$ ist in U . Folglich ist $\Omega(t_0)$ dicht. \square

Korollar 2: Falls die Frequenzen rational unabhängig sind, gilt für jedes (Jordan) messbare Gebiet $D \subset T^n$, dass

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\tau_D(T)}{T} = \frac{|D|}{(2\pi)^n} \quad (\text{A.19})$$

ist. Dabei ist $|D|$ das Volumen des Gebietes D und $\tau_D(T)$ ist die Aufenthaltszeit einer Trajektorie $\phi_t(\underline{\varphi})$ im Intervall $0 \leq t \leq T$,

$$\tau_D(T) = \int_0^T \chi_D(\phi_t(\underline{\varphi})) dt$$

(χ_D : charakteristische Funktion von D).

*) Siehe z.B. E. Hewitt, K. Stromberg, "Real and Abstract Analysis", Springer 1965, p. 98.

Beweis: Die charakteristische Funktion χ_D ist Riemann-integrabel ^{*)}, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es zwei stetige Funktionen f_1 und f_2 auf T^n , derart, dass

$$f_1 \leq \chi_D \leq f_2 ,$$
$$(2\pi)^{-n} \int_{T^n} (f_1 - f_2) d^n\varphi < \varepsilon$$

gilt. Da der obige Satz offensichtlich auch für Riemann-integrale Funktionen gilt, gibt die Anwendung auf χ_D die Behauptung (A.19), d.h. jede Trajektorie ist auf dem Torus gleichverteilt. \square

* * *

*) da D Jordan messbar ist.

Kapitel 6. Kleine Schwingungen, parametrische Resonanz und Stabilität von Gleichgewichtslagen

In diesem Kapitel entwickeln wir die Theorie kleiner Schwingungen und illustrieren ihre vielfältigen Anwendungen an einigen Beispielen. Dieselben Methoden lassen sich auch auf die Mechanik kontinuierlicher Systeme und auf die Feldtheorie übertragen.

6.1. Linearisierung, Ljapunovstabilität

Wir interessieren uns im folgenden für das Verhalten eines autonomen dynamischen Systems im \mathbb{R}^n ,

$$\dot{x} = X(x), \quad (6.1)$$

in der Nähe einer Gleichgewichtslage x_0 : $X(x_0) = 0$.

A. Linearisierung um Gleichgewichtslage

Als Physiker wird man zunächst das Problem für kleine Auslenkungen linearisieren. Wir werden sehen, dass in dieser Approximation das Verhalten des Flusses in vielen Fällen qualitativ richtig beschrieben wird. Insbesondere erlaubt uns dann die Linearisierung, Aussagen über das Stabilitätsverhalten der Gleichgewichtslage zu machen.

Setzen wir $\xi = x - x_0$, so ist

$$X(x) = DX(x_0)\xi + \theta(\xi^2) \quad (6.2)$$

und folglich

$$\dot{\xi} = L\xi + \theta(\xi^2), \quad (6.3)$$

mit

$$L := DX(x_0) . \quad (6.4)$$

Nun untersuchen wir zunächst das Stabilitätsverhalten des linearisierten dynamischen Systems

$$\dot{w} = L w , \quad (6.5)$$

mit dem Fluss

$$\phi_t = e^{tL} . \quad (6.6)$$

B. Ljapunovstabilität

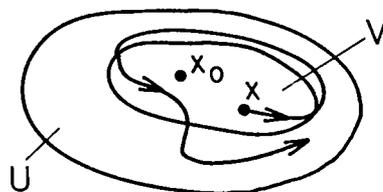
Zunächst benötigen wir einen zweckmässigen Stabilitätsbegriff.

Definition: Eine Gleichgewichtslage x_0 eines Vektorfeldes X ist (Ljapunov-)stabil, wenn es in jeder Umgebung U von x_0 eine vielleicht kleinere Umgebung V von x_0 gibt, sodass folgendes gilt:

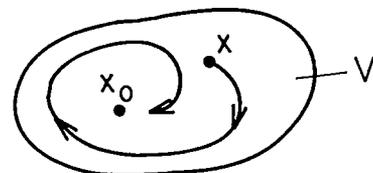
- (i) Der Fluss ϕ_t von X ist für jedes $x \in V$ für alle $t \geq 0$ definiert,
- (ii) $\phi_t(x) \in U$ für alle $x \in V$, $t \geq 0$ (vgl. Fig. 6.1).

Ist die Gleichgewichtslage nicht stabil, so heisst sie instabil (im Sinne von Ljapunov). Die Ruhelage ist asymptotisch stabil, falls sie stabil ist und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x) = x_0 \quad \text{für alle } x \text{ in einer genügend kleinen Umgebung von } x_0 .$$



(stabil)



(asymptotisch stabil)

Fig. 6.1

Für lineare dynamische Systeme (6.5) gilt der folgende plausible

Satz 6.1: Die Nulllösung der linearen Differentialgleichung $\dot{x} = Lx$ ist genau dann stabil, wenn gilt:

(i) Das Spektrum $\sigma(L)$ von L liegt in der linken komplexen Halbebene,

$$\operatorname{Re} \sigma(L) \leq 0,$$

(ii) jedes $\lambda \in \sigma(L)$ mit $\operatorname{Re} \lambda = 0$ ist ein halbeinfacher *) Eigenwert.

Die Nulllösung ist genau dann asymptotisch stabil, wenn

$$\operatorname{Re} \sigma(L) < 0 \tag{6.7}$$

ist.

Beweis: Wir beweisen hier nur, dass aus (6.7) die asymptotische Stabilität folgt. (Für einen vollständigen Beweis des Satzes, siehe z.B. [6], p.222.) Dies ergibt sich unmittelbar aus dem folgenden

Lemma: Gilt $\operatorname{Re} \sigma(L) < \alpha$, so existiert eine Konstante $\beta \geq 0$ mit

$$\|e^{tL}\| \leq \beta e^{\alpha t} \quad \text{für alle } t \geq 0. \tag{6.8}$$

Beweis: Wir betrachten die Komplexifizierung von L auf \mathbb{C}^n , welche wir mit \tilde{L} bezeichnen und denken uns L auf Jordanform transformiert. In einer geeigneten Basis hat danach \tilde{L} die Form:

$$\tilde{L} = D + N, \quad D \text{ Diagonalmatrix, } N \text{ nilpotent, } DN = ND. \tag{6.9}$$

*) d.h. die Vielfachheit von λ ist gleich $\dim[\operatorname{Ker}(L - \lambda I)]$.

In der Diagonale von D stehen die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von \tilde{L} . Ausserdem können wir die Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ so wählen, dass $Ne_j = e_{j-1}$ oder 0 ist. Ersetzen wir e_j durch $\hat{e}_j = \delta^j e_j$ mit $\delta > 0$, so bleibt D unverändert und für N gilt $N\hat{e}_j = \delta \hat{e}_{j-1}$ oder 0 . Dies zeigt, dass wir zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Hilbert-Norm so wählen können, dass $\|N\| \leq \varepsilon$ ist. Ferner ist natürlich

$$\|e^{tD}\| = \max_j |e^{t\lambda_j}| \leq e^{(\alpha - \varepsilon)t},$$

wenn wir ε so klein wählen, dass $\operatorname{Re} \lambda \leq \alpha - \varepsilon$ für alle $\lambda \in \sigma(L)$. Folglich gilt für die gewählte Norm

$$\|e^{t\tilde{L}}\| \leq \|e^{tD}\| \|e^{tN}\| \leq e^{t(\alpha - \varepsilon)} e^{t\|N\|} \leq e^{t\alpha}$$

für $t > 0$.

Nun ist die Restriktion jeder Hilbertnorm von \mathbb{C}^n auf \mathbb{R}^n eine Euklidische Norm (Übung). Ferner ist $\|L\| = \|\tilde{L}\|$. Also gilt (6.8) für eine geeignete Norm. Auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum sind aber alle Normen äquivalent. \square

Beispiele: 1) (mehrdim.) Schwingung mit Dämpfung.

Die Bewegungsgleichung sei für $q = (q_1, \dots, q_f)$

$$\begin{aligned} M \ddot{q} &= -\Omega q - D \dot{q}, \quad M = \operatorname{diag}(m_1, \dots, m_f) > 0, \\ D &= \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_f) > 0, \\ \Omega &= \Omega^T > 0, \end{aligned} \tag{6.10}$$

oder mit $p := M\dot{q}$

$$\dot{q} = M^{-1}p, \quad \dot{p} = -\Omega q - DM^{-1}p.$$

Für $x = (q, p)$ gilt also $\dot{x} = Lx$, wobei

$$L = \begin{pmatrix} 0 & M^{-1} \\ -\Omega & -DM^{-1} \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist $L < 0$ und also gilt (6.7). Deshalb ist nach Satz (6.1) die Nulllösung asymptotisch stabil.

2) Lineare Hamiltonsche Systeme

Für ein lineares Hamiltonsches System ist der Fluss $\phi_t = e^{tL}$ symplektisch, d.h.

$$e^{tL^T} J e^{tL} = J \quad \text{für alle } t. \quad (6.11)$$

Ableitung nach t für $t = 0$ gibt

$$L^T J + J L = 0 \Rightarrow J L J = L^T. \quad (6.12)$$

Deshalb gilt für das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \det(L - \lambda I) = \det[J(L - \lambda I)J] = \det(L^T + \lambda I) \\ &= \det(L + \lambda I) = \chi(-\lambda). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Deshalb ist mit λ auch $-\lambda$ ein Eigenwert von L und zwar mit derselben Multiplizität. Da ferner $\chi(\lambda)$ ein reelles Polynom ist, ist mit λ auch $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert mit derselben Multiplizität. Man sieht nun auch leicht, dass die Multiplizität des Eigenwertes 0 , falls er vorkommt, gerade ist. Diese wichtigen Resultate wollen wir festhalten:

Satz 6.2: Es sei L eine infinitesimal symplektische Transformation, d.h. sie erfülle (6.12). Ist λ ein Eigenwert von L , so sind auch $-\lambda$, $\bar{\lambda}$ und $-\bar{\lambda}$ Eigenwerte mit derselben Multiplizität. Kommt der Eigenwert 0 vor, so hat er gerade Multiplizität.

Für ein lineares Hamiltonsches System ist deshalb die Nulllösung nach Satz 6.1 nur stabil, wenn alle Eigenwerte von L rein imaginär sind. Die Eigenwerte von e^{tL} liegen dann auf dem Einheitskreis. In diesem Fall sagt man, 0 sei ein Zentrum.

C. Prinzip der linearisierten Stabilität

Der folgende wichtige Satz zeigt, dass eine lineare Stabilitätsanalyse in vielen Fällen ausreicht.

Satz 6.3 (Prinzip der linearen Stabilität): Gilt für die Gleichgewichtslage x_0 des Systems (6.1)

$$\operatorname{Re} \sigma(DX(x_0)) < 0, \quad (6.14)$$

so ist x_0 asymptotisch stabil. Gibt es hingegen mindestens einen Eigenwert mit positivem Realteil, so ist x_0 instabil.

Beweis: Siehe den Anhang zu diesem Kapitel, oder [6], § 15.

Dieser Satz hat ungezählte Anwendungen (siehe weiter unten, sowie die Übungen). Auf Grund von Satz 6.2 folgt aus ihm, dass die Gleichgewichtslage x_0 eines Hamiltonschen Systems höchstens dann stabil sein kann, wenn x_0 ein Zentrum ist. In diesem Fall macht aber der Satz 6.3 keine Aussagen über das Stabilitätsverhalten. Dieses hängt dann wesentlich von den Nichtlinearitäten ab und wir stehen i.a. vor einer sehr schwierigen Frage. Wir illustrieren das Zentrumsproblem an einem instruktiven Beispiel:

$$\dot{x} = -y + ax^3, \quad \dot{y} = x + ay^3. \quad (6.15)$$

Die einzige Gleichgewichtslage ist $(0,0)$ und diese ist ein Zentrum. Nun ist aber

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = 2a(x^4 + y^4).$$

Für $a > 0$ nimmt deshalb $x^2 + y^2$ zu und die Orbits laufen von $(0,0)$ weg, d.h. $(0,0)$ ist instabil. (Fig.6.2a).

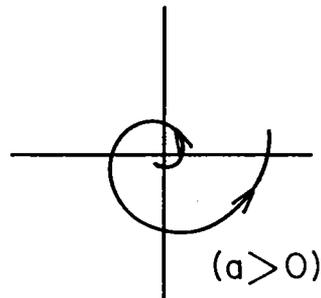


Fig. 6.2a

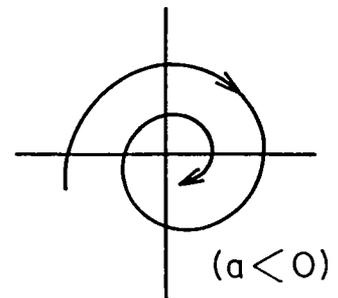


Fig. 6.2b

Ist hingegen $a < 0$, so laufen die Orbits in $(0,0)$ hinein, d.h. $(0,0)$ ist stabil (Fig. 6.2b). Die Linearisierung ist in beiden Fällen aber die gleiche.

D. Ljapunov-Funktionen

In Fällen, wo das Prinzip der linearen Stabilität keine Aussagen macht, hilft manchmal die "direkte Methode" von Ljapunov, welche wir als nächstes besprechen.

Definition: Eine Ljapunovfunktion für den Gleichgewichtspunkt x_0 eines Vektorfeldes X ist eine in einer Umgebung U von x_0 definierte stetige Funktion $V: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $V(x_0) = 0$, $V(x) > 0$ für $x \in U \setminus \{x_0\}$;
- (ii) V ist stetig differenzierbar in $U \setminus \{x_0\}$ und dort

gilt

$$\dot{V} := D_X V \leq 0. \quad (6.16)$$

Die Bedingung (6.16) bedeutet, dass für jede Integralkurve α von X gilt

$$\frac{d}{dt} V \circ \alpha \leq 0 .$$

Deshalb erwartet man Stabilität (vgl. Fig. 6.3)

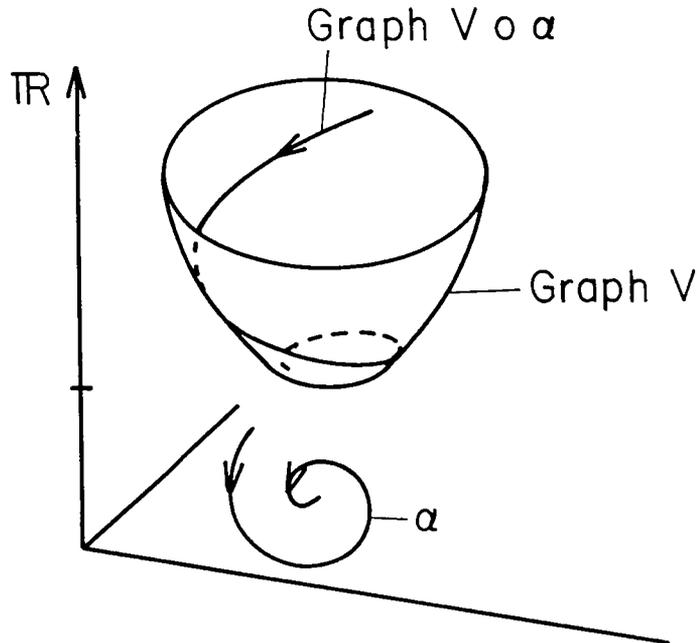


Fig. 6.3

Tatsächlich gilt der

Satz 6.4: Gibt es zur Gleichgewichtslage x_0 eines C^1 -Vektorfeldes X eine Ljapunovfunktion, so ist x_0 stabil. Gilt in (6.16) das strikte Kleinerzeichen (strikte Ljapunovfunktion), so ist x_0 asymptotisch stabil.

Beweis: Siehe den Anhang zu diesem Kapitel, oder [6], § 18.

Beispiele:

1) Gradientensystem. Es sei $X = -\text{grad } V$ und x_0 ein isoliertes Minimum von V . Dann ist x_0 eine asymptotisch stabile Gleichgewichtslage. Zum Beweise wählen wir eine Umgebung U von x_0 so, dass $W(x) := V(x) - V(x_0) > 0$ für $x \in U \setminus \{x_0\}$. Dann ist dort

$$\dot{W} = D_X W = (X, \text{grad } W) = -(\text{grad } W, \text{grad } W) < 0 .$$

Deshalb ist $W: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine strikte Ljapunovfunktion.

2) Hamiltonsche Systeme. Ist x_0 ein isoliertes Minimum der Hamiltonfunktion H , so ist x_0 ein stabiler Gleichgewichtspunkt des Hamiltonschen Systems X_H . In diesem Falle ist nämlich $V(x) := H(x) - H(x_0)$ nach dem Energiesatz eine Ljapunovfunktion:

$$V(x_0) = 0, \quad V(x) > 0 \quad \text{in} \quad U \setminus \{x_0\},$$

$$\dot{V} = \dot{H} = D_{X_H} H = 0.$$

3) Wir betrachten das dynamische System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax - y + kx(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= x - ay + ky(x^2 + y^2), \quad a^2 < 1. \end{aligned}$$

Für die Jacobische im Ursprung $\begin{pmatrix} a-1 \\ 1-a \end{pmatrix}$ hat das charakteristische Polynom die Nullstellen

$$\lambda = \pm i \sqrt{1 - a^2}.$$

Es liegt also ein Zentrum vor. Wir zeigen, dass für $k < 0$

$$V(x, y) := x^2 - 2axy + y^2$$

eine strikte Ljapunovfunktion ist. Zunächst ist nämlich

$$V = (x-ay)^2 + (1-a^2)y^2 > 0, \quad \text{genau wenn} \quad (x, y) \neq 0. \quad \text{Ferner}$$

gilt

$$\text{grad } V = 2(x-ay, y-ax)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\text{grad } V, X) &= (x-ay)(ax-y) + (x-ay)kx(x^2+y^2) + \\ &\quad (y-ax)(x-ay) + (y-ax)ky(x^2+y^2) \end{aligned}$$

$$= k(x^2+y^2)(x^2-2axy+y^2) = k(x^2+y^2) \cdot V(x, y) < 0 \quad \text{für} \quad (x, y) \neq 0.$$

Für $k < 0$ ist also $(0, 0)$ asymptotisch stabil. Ist dage-

gen $k > 0$, so zeigt dieselbe Funktion V , dass der Ursprung

für $t \rightarrow -\infty$ stabil wird, d.h. der Ursprung ist abstossend. Dies ist ein weiteres Beispiel, bei welchem man aus der linearen Approximation über die Stabilität nichts schliessen kann. Aber man findet noch eine Ljapunovfunktion, die über die Stabilität Auskunft gibt.

E. Flussäquivalenz, Linearisierungssatz von Hartman

In diesem Unterabschnitt formulieren wir ein wichtiges Theorem, welches zeigt, dass in der Nähe eines "hyperbolischen" Gleichgewichtspunktes x_0 der Fluss "äquivalent" ist zum linearen Fluss $\exp tDX(x_0)$. Zunächst müssen wir die Begriffe in Anführungszeichen definieren.

Definition: Ein lineares Vektorfeld $x \mapsto Lx$, $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ist hyperbolisch, falls das Spektrum $\sigma(L)$ von L einen leeren Durchschnitt mit der imaginären Achse hat. Der Gleichgewichtspunkt x_0 des Vektorfeldes X ist hyperbolisch, falls $DX(x_0)$ ein lineares hyperbolisches Vektorfeld ist.

Mit Hilfe der Jordanschen Zerlegung kann man leicht zeigen (siehe z.B. [6], p. 278), dass $\sigma(e^L) = e^{\sigma(L)}$ gilt. Der Gleichgewichtspunkt x_0 ist also hyperbolisch, wenn $\exp DX(x_0)$ keine Eigenwerte vom Betrag 1 besitzt.

Definition: Zwei Flüsse φ_t und ψ_t auf M bzw. N heissen (topologisch) äquivalent, wenn es einen orientierungserhaltenden Automorphismus $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und einen Homöo-

morphismus $h:M \rightarrow N$ gibt, derart, dass gilt

$$h \circ \varphi_t = \psi_\alpha(t) \circ h . \quad (6.17)$$

Wird die Zeitvariable nicht geändert, so spricht man von isochroner Flussäquivalenz.

Der angekündigte Satz lautet nun

Satz 6.5 (Grobman, Hartman): Es sei x_0 ein hyperbolischer Gleichgewichtspunkt des Vektorfeldes X . Dann ist der Fluss ϕ_t von X lokal isochron äquivalent zum Fluss des linearen Vektorfeldes $DX(x_0)$.

Beweis: Siehe [6], §19, oder [12], §2.4.

Nach diesem Theorem hat also das Phasenportrait des Vektorfeldes X in der Nähe eines hyperbolischen Gleichgewichtspunktes topologisch die gleiche Struktur wie das Phasenportrait der Linearisierung in der Nähe von 0 .

Nach Satz 6.2 ist deshalb ein hyperbolischer Gleichgewichtspunkt eines Hamiltonschen Systems instabil.

* * *

F. Linearisierung von Lagrangeschen Systemen

Wir betrachten nun Lagrangesche Systeme der speziellen Art

$$\begin{aligned} L(q, \dot{q}) &= T(q, \dot{q}) - U(q) \\ T(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} \sum_{i,k} g_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k , \end{aligned} \quad (6.18)$$

wobei T (für jedes q) eine positiv definite quadratische Form ist. Die Linearisierung des zugehörigen Hamiltonschen Systems um eine Gleichgewichtslage ist (wegen $X_H = J \mathcal{D}H^T$) durch den quadratischen Anteil H_2 von H , in einer Entwicklung um die Gleichgewichtslage, bestimmt.

Für eine Gleichgewichtslage (q_0, p_0) von X_H ist $p_0 = 0$ (d.h. $\dot{q}_0 = 0$) und $\mathcal{D}U(q_0)/\mathcal{D}q = 0$.

H_2 ist aber natürlich die Hamiltonfunktion zum Lagrange-schen System $L_2 = T_2 - U_2$, wobei

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2} \sum_{ij} g_{ij}(q_0) \dot{q}_i \dot{q}_j, \\ U_2 &= \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}(q_0) (q_i - q_{0i})(q_j - q_{0j}). \end{aligned} \quad (6.19)$$

Deshalb stimmen die linearisierten Bewegungsgleichungen zu X_H mit den Euler-Gleichungen zu L_2 überein; L_2 beschreibt also das linearisierte Lagrange-System um eine Gleichgewichtslage (q_0, \dot{q}_0) :

$$\dot{q}_0 = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial q}(q_0) = 0.$$

Bewegungen dieses linearisierten Systems nennt man kleine Oszillationen.

6.2 Kleine Oszillationen

Wir studieren jetzt die kleinen Oszillationen im Detail. Kinetische und potentielle Energie haben also die Form:

$$T = \frac{1}{2}(\dot{q}, A\dot{q}), \quad U = \frac{1}{2}(q, Bq), \quad q \in \mathbb{R}^f, \quad \dot{q} \in \mathbb{R}^f. \quad (6.20)$$

Dabei ist T eine positiv definite quadratische Form. Aus der linearen Algebra wissen wir ^{*)}, dass dann eine lineare Transformation

$$Q = S q, \quad \dot{Q} = S \dot{q} \quad (6.21)$$

existiert, so dass

$$T = \frac{1}{2} \sum_i \dot{Q}_i^2, \quad U = \frac{1}{2} \sum_i \lambda_i Q_i^2. \quad (6.22)$$

Die Zahlen λ_i sind die Eigenwerte der Form B relativ zu A . Offensichtlich erfüllen sie die charakteristische Gleichung:

$$\boxed{\text{Det}(B - \lambda A) = 0}.$$

In den Koordinaten $\{Q_i\}$ zerfällt das Lagrangesche System in n unabhängige Gleichungen

$$\underline{\ddot{Q}_i = -\lambda_i Q_i}. \quad (6.23)$$

Für jedes der 1-dimensionalen Systeme in (18) gibt es drei mögliche Fälle:

*) Mit der symmetrischen, positiven Matrix A können wir folgendes Skalarprodukt in \mathbb{R}^f definieren:

$$\langle x, y \rangle = x^T A y.$$

Nun weiss man (Satz von der Hauptachsen-Transformation), dass bezüglich einer geeigneten orthonormierten Basis (relativ zu $\langle \cdot, \cdot \rangle$) die quadratische Form $x^T B x$ auf diagonale Gestalt gebracht wird.

- (i) $\lambda = \omega^2 > 0$; die Lösung ist $Q = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$
(Oszillation);
- (ii) $\lambda = 0$; die Lösung ist $Q = C_1 + tC_2$ (neutrales Gleichgewicht);
- (iii) $\lambda = -k^2 < 0$; die Lösung ist $Q = C_1 \cos h kt + C_2 \sin h kt$
(Instabilität).

Zu jedem positiven Eigenwert $\lambda = \omega^2 > 0$ gibt es eine charakteristische Oszillation (od. Normalschwingung):

$$q(t) = (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t) \xi, \quad (6.24)$$

wobei ξ ein Eigenvektor zu λ ist:

$$B \xi = \lambda A \xi.$$

Diese Oszillation ist das Produkt der eindimensionalen Oszillation $Q_i = C_1 \cos \omega_i t + C_2 \sin \omega_i t$ ($\omega = \omega_i$) und der trivialen Bewegung $Q_j = 0$ ($j \neq i$). (Gleichung (6.24) ist in den ursprünglichen Koordinaten geschrieben.) Die Zahl ω in (6.24) nennt man die charakteristische Frequenz. Wir nennen aber auch die nicht-positiven Eigenwerte charakteristische Frequenzen ! Offenbar hat, nach dem Gesagten, das System f charakteristische Oszillationen, wobei die Richtungen paarweise orthogonal sind (bezüglich des Skalarproduktes, welches durch die kinetische Energie bestimmt ist).

Betrachten wir eine allgemeine kleine Schwingung $q(t)$, und zerlegen wir die Anfangsbedingung in Richtung der charakteristischen Richtungen ξ_k (zu den Eigenwerten $\lambda_k =: \omega_k^2$), so ergibt sich

$$q(t) = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^f C_k e^{i\omega_k t} \xi_k. \quad (6.25)$$

Diese Formel gilt auch bei mehrfachen Eigenwerten.

Beispiel: Gekoppelte Pendel mit verschiedenen Massen.

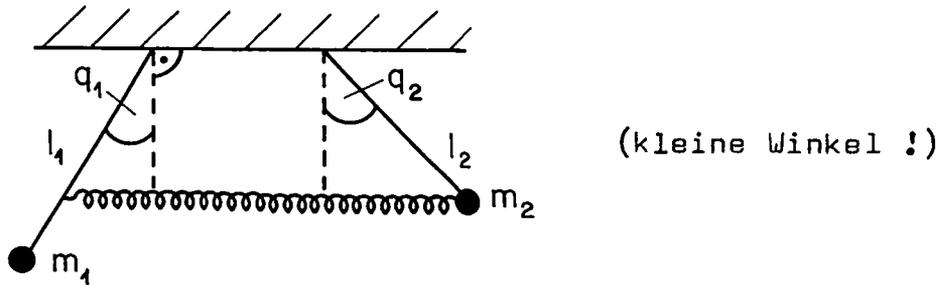


Fig. 6.4

Wir wählen die Einheiten so, dass $g = 1$ ist. Die Wechselwirkung sei harmonisch gleich $\frac{1}{2} \alpha (q_1 - q_2)^2$.

Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2} (m_1 l_1^2 \dot{q}_1^2 + m_2 l_2^2 \dot{q}_2^2) ,$$

pot. Energie:
$$U = m_1 l_1 \frac{q_1^2}{2} + m_2 l_2 \frac{q_2^2}{2} + \frac{\alpha}{2} (q_1 - q_2)^2 ;$$

d.h.
$$A = \begin{pmatrix} m_1 l_1^2 & 0 \\ 0 & m_2 l_2^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} m_1 l_1 + \alpha & -\alpha \\ -\alpha & m_2 l_2 + \alpha \end{pmatrix} .$$

Det $(B - \lambda A) = 0$:
$$a \lambda^2 - (b_0 + b_1 \alpha) \lambda + (c_0 + c_1 \alpha) = 0 ,$$

wobei
$$a = m_1 m_2 l_1^2 l_2^2$$

$$b_0 = m_1 l_1 m_2 l_2 (l_1 + l_2), \quad b_1 = m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2$$

$$c_0 = m_1 m_2 l_1 l_2, \quad c_1 = m_1 l_1 + m_2 l_2 .$$

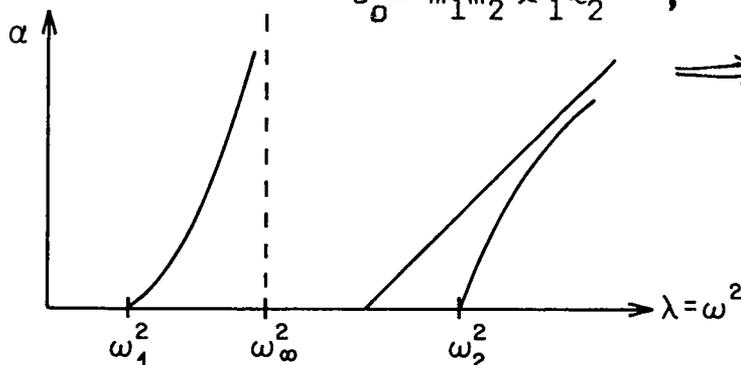


Fig. 6.5 Verhalten von λ als Funktion der Kopplung.

Für $\alpha \rightarrow \infty$: $\omega_2 \rightarrow \infty, \omega_1 \rightarrow \omega_\infty$.

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{l_{1,2}}, \quad \text{für } \alpha \rightarrow 0 ;$$

$$\omega_\infty^2 = \frac{m_1 l_1 + m_2 l_2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2} .$$

Stabilitätsanalyse der Saturnringe nach J.C. Maxwell

J.C. Maxwell (1831 - 1879) hat 1857, als Lösung einer Preisfrage, eine mathematische Theorie für die Stabilität der Saturnringe geliefert. Diese grosse Arbeit (siehe Scientific Papers, Vol. 1, p. 288-376) wurde damals von den Fachleuten aufs höchste bewundert.

Der Saturnring besteht aus einzelnen Brocken, wie wir auf Grund von Beobachtungen wissen. (Siehe z.B. W.H. IP, Space Science Reviews 26, 39 (1980), und 26, 97 (1980).)

Um das Problem rechnerisch behandeln zu können, betrachten wir einen Ring von Körpern gleicher Masse m . Im Gleichgewichtszustand bilden diese im mitrotierenden Bezugssystem ein reguläres Polygon.

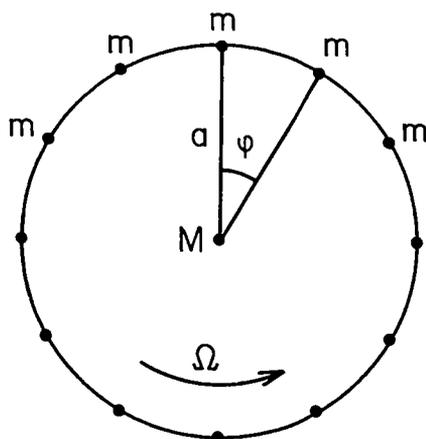


Fig. 6.6

Wir haben zu untersuchen, wann diese Gleichgewichtslage stabil ist. Es genügt, dieses Problem in einer Ebene zu betrachten, da der Ring in der transversalen Richtung offensichtlich stabil ist. (Dies zeigen auch die Rechnungen von Maxwell.)

Die Zahl der Körper sei N und Ω bezeichne die Winkelgeschwindigkeit des Ringes. Dann lautet die Lagrange-Funktion im mitrotierenden System

$$L = \sum_{k=1}^N \left[\frac{1}{2} (\dot{r}_k^2 + r_k^2 \dot{\varphi}_k^2) + \Omega r_k^2 \dot{\varphi}_k + \frac{1}{2} \Omega^2 r_k^2 + \frac{M}{r_k} \right] + \frac{m}{2} \sum_{k \neq \ell} [r_k^2 + r_\ell^2 - 2r_k r_\ell \cos(\varphi_k - \varphi_\ell)]^{-\frac{1}{2}}. \quad (1)$$

Dabei ist M die Masse des Saturns. (Beachte: Im raumfesten System hätte die kinetische Energie den Term $\frac{1}{2} r_k^2 \dot{\varphi}_k^2$; aber $\overline{\varphi}_k = \Omega t + \varphi_k$, $\dot{\overline{\varphi}}_k = \Omega + \dot{\varphi}_k$, woraus sich die 1. Zeile von (1) ergibt.)

Wir benötigen noch einen Ausdruck für Ω . Man beachte in der Fig. die Kraft auf den obersten Satelliten (in der Gleichgewichtslage). Diese ist radial gerichtet und hat die Grösse/Masseneinheit

$$\frac{M}{a^2} + \sum_k \frac{m}{(2a \sin \frac{\varphi_k}{2})^2} \sin \frac{\varphi_k}{2}.$$

Dies muss gleich der Zentrifugalbeschleunigung $a\Omega^2$ sein, d.h. es gilt

$$M + \frac{m}{4} \sum_k \frac{1}{\sin^3 \frac{\varphi_k}{2}} = \Omega^2 a^3$$

oder, da $\frac{1}{2} \varphi_k = k \alpha$, mit $\alpha = \pi/N$,

$$M + \frac{m}{4} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^3 k\alpha} = \Omega^2 a^3. \quad (2)$$

Es ist zweckmässig, die folgenden Bezeichnungen einzuführen

$$K = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^3 k\alpha}, \quad \mu = \frac{m}{M+K}. \quad (3)$$

Dann lautet (2)

$$\underline{\Omega^2 a^3 = M + m K = \frac{m}{\mu}} \quad (4)$$

Nun betrachten wir kleine Auslenkungen vom Gleichgewicht:

$$\varphi_k = k 2\alpha + \psi_k, \quad r_k = a(1 + \varrho_k) \quad (5)$$

und entwickeln (1) bis zur 2. Ordnung in ψ_k, ϱ_k und ihren Ableitungen.

Zunächst betrachten wir die Terme in den einfachen Summe (1. Zeile von (1)). Ihre Entwicklung gibt

$$\text{const.} + \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{1}{2} a^2 \dot{\varrho}_k^2 + \frac{1}{2} a^2 \dot{\psi}_k^2 + \Omega a^2 \dot{\psi}_k + 2 \varrho_k a^2 \dot{\psi}_k + \frac{1}{2} \Omega^2 a^2 \varrho_k^2 + \Omega^2 a^2 \varrho_k + \frac{M}{a} (1 - \varrho_k + \varrho_k^2) \right\}.$$

Darin darf man den Term $\Omega a^2 \sum_k \dot{\psi}_k$ weglassen, da dieser eine totale Zeitableitung ist. Die verbleibenden linearen Terme (in ϱ_k) heben sich mit den linearen Anteilen in der Wechselwirkung von (1) (2. Zeile) auf Grund von (4) (verifiziere dies).

Im folgenden sei $\tau = \Omega t$ und der Punkt bedeute von jetzt an die Ableitung nach der dimensionslosen Zeit

$$: \dot{f} = df/d\tau = \Omega^{-1} df/dt. \text{ Schreiben wir}$$

$$L = L_0 + \Omega^2 a^2 L_2 + \dots,$$

so ist nach dem Gesagten

$$L_2 = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} (\dot{\varrho}_n^2 + \dot{\psi}_n^2) + 2 \varrho_n \dot{\psi}_n + \frac{1}{2} \varrho_n^2 + \frac{1 - \mu K}{\Omega^2 a^3} \varrho_n^2 + \text{quadr. Anteile von } \frac{1}{2} \frac{m}{\Omega^2 a^2} \sum_{k \neq l} \frac{1}{r_{kl}}. \quad (6)$$

Nun berechnen wir die quadratischen Terme von

$$\frac{1}{2} \mu \sum_{k \neq l} a/r_{kl}.$$

Es ist

$$a/r_{kl} = \frac{a}{\sqrt{r_k^2 + r_l^2 - 2r_k r_l \cos(\psi_k - \psi_l)}} = \left\{ (1 + \rho_k)^2 + (1 + \rho_l)^2 - 2(1 + \rho_k)(1 + \rho_l) \cos[2(k-l)\alpha + \psi_k - \psi_l] \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

Darin entwickeln wir den Radikanden bis zur 2. Ordnung.

Mit den Bezeichnungen $\Theta = 2(k-l)\alpha$, $\Delta\psi = \psi_k - \psi_l$ kommt

$$a/r_{kl} \approx \left\{ \frac{(2 \sin \frac{\Theta}{2})^2}{2(1 - \cos \Theta)} + [2(\rho_k + \rho_l)(1 - \cos \Theta) + 2\Delta\psi \sin \Theta] + [\rho_k^2 + \rho_l^2 - 2\rho_k \rho_l \cos \Theta + (\Delta\psi)^2 \cos \Theta + 2(\rho_k + \rho_l)\Delta\psi \sin \Theta] \right\}^{-1/2} \quad (7)$$

Darin benutzen wir die Entwicklung

$$\frac{1}{\sqrt{A+x}} = A^{-\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{1}{2A} x + \frac{3}{8A^2} x^2 + \dots \right]$$

und erhalten für die quadratischen Terme von (7)

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{r_{kl}}\right)^{(2)} &= -\frac{1}{2(2 \sin \frac{\Theta}{2})^3} \left[\rho_k^2 + \rho_l^2 - 2\rho_k \rho_l \cos \Theta + (\Delta\psi)^2 \cos \Theta + 2(\rho_k + \rho_l)\Delta\psi \sin \Theta \right] \\ &\quad + \frac{3}{8(2 \sin \frac{\Theta}{2})^5} \left[(\rho_k + \rho_l)(2 \sin \frac{\Theta}{2})^2 + 2\Delta\psi \sin \Theta \right]^2 \\ &= \frac{1}{2(2 \sin \frac{\Theta}{2})^3} \left\{ -(\rho_k^2 + \rho_l^2) + 2\rho_k \rho_l \cos \Theta - (\Delta\psi)^2 \cos \Theta - 2(\rho_k + \rho_l)\Delta\psi \sin \Theta + 3 \left[(\rho_k + \rho_l) \sin \frac{\Theta}{2} + \Delta\psi \cos \frac{\Theta}{2} \right]^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2(2 \sin \frac{\Theta}{2})^3} \left\{ (\rho_k^2 + \rho_l^2) \left[-1 + 3 \sin^2 \frac{\Theta}{2} \right] - \cos^2 \frac{\Theta}{2} + 2 \sin^2 \frac{\Theta}{2} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \rho_k \rho_l \left[\underbrace{2 \cos \theta + 6 \sin^2 \frac{\theta}{2}}_{2 (\cos^2 \frac{\theta}{2} + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2})} \right] \\
 & + (\Delta \psi)^2 \left[\underbrace{-\cos \theta + 3 \cos^2 \frac{\theta}{2}}_{2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right] \\
 & + \Delta \psi (\rho_k + \rho_l) \left[\underbrace{-2 \sin \theta + 3 \sin \theta}_{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} \right] \\
 = & \frac{1}{16} \left\{ \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} \left(-\frac{\cos^2 \theta/2}{\sin^2 \theta/2} + 2 \right) (\rho_k^2 + \rho_l^2) \right. \\
 & + \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} \left(\frac{\cos^2 \theta/2}{\sin^2 \theta/2} + 2 \right) 2 \rho_k \rho_l \\
 & + \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} \left(1 + \frac{2 \cos^2 \theta/2}{\sin^2 \theta/2} \right) (\phi_k - \phi_l)^2 \\
 & \left. + \frac{\cos \theta/2}{\sin^2 \theta/2} 2 (\rho_k + \rho_l) (\phi_k - \phi_l) \right\} .
 \end{aligned}$$

Damit wird aus (6)

$$\begin{aligned}
 L_2 = & \sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{2} (\dot{\rho}_n^2 + \dot{\psi}_n^2) + 2 \rho_n \dot{\psi}_n \right. \\
 & + \frac{1}{2} \left[3 - 2\mu k + \mu \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{8 \sin k\alpha} \left(-\frac{\cos^2 k\alpha}{\sin^2 k\alpha} + 2 \right) \right] \rho_n^2 \\
 & \quad \left. - \mu \sum \frac{1}{8 \sin k\alpha} \left(\frac{\cos^2 k\alpha}{\sin^2 k\alpha} + 2 \right) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} \mu \sum_{k \neq l} \frac{1}{8 \sin(k-l)\alpha} \left(\frac{\cos^2(k-l)\alpha}{\sin^2(k-l)\alpha} + 2 \right) \rho_k \rho_l \right] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\cos(k-\ell)\alpha}{8 \sin^2(k-\ell)\alpha} (\varrho_k + \varrho_\ell) (\psi_k - \psi_\ell) \\
 & + \frac{1}{8 \sin(k-\ell)\alpha} \left(1 + \frac{2 \cos^2(k-\ell)\alpha}{\sin^2(k-\ell)\alpha} (\psi_k - \psi_\ell)^2 \right) \}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Die zugehörigen Euler-Gleichungen lauten:

$$\begin{aligned}
 - \ddot{\varrho}_n + 2\dot{\varrho}_n + 3\varrho_n + \frac{\mu}{2} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{8 \sin k\alpha} \left(\frac{\cos^2 k\alpha}{\sin^2 k\alpha} + 2 \right) (\varrho_{n-k} + \varrho_{n+k} - 2\varrho_n) \\
 + \frac{\mu}{2} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\cos k\alpha}{8 \sin^2 k\alpha} (\psi_{n+k} - \psi_{n-k}) = 0,
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 - \ddot{\psi}_n - 2\dot{\psi}_n + \frac{\mu}{2} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\cos k\alpha}{\sin^2 k\alpha} (\varrho_{n-k} - \varrho_{n+k}) \\
 + \frac{\mu}{2} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{8 \sin k\alpha} \left(1 + 2 \frac{\cos^2 k\alpha}{\sin^2 k\alpha} \right) (2\psi_n - \psi_{n-k} - \psi_{n+k}) = 0,
 \end{aligned} \tag{10}$$

Die zyklische Gruppe ist eine Symmetriegruppe. Deshalb machen wir den Ansatz ($\ell = 0, 1, 2, \dots, N-1$):

$$\begin{aligned}
 \varrho_n^{(\ell)} = \operatorname{Re} A^{(\ell)} e^{i(\ell \cdot 2\alpha n - \omega_\ell \tau)}; \quad \varrho_{n+N}^{(\ell)} = \varrho_n^{(\ell)} \\
 \psi_n^{(\ell)} = \operatorname{Re} (-i) B^{(\ell)} e^{i(\ell \cdot 2\alpha n - \omega_\ell \tau)}; \quad \psi_{n+N}^{(\ell)} = \psi_n^{(\ell)}
 \end{aligned} \tag{11}$$

(ϱ_n und ψ_n lassen sich immer als Superpositionen von (11) darstellen). Dies setzen wir in die Eulerschen Gleichungen ein.

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}
 P(\ell) &= \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{8} \frac{\cos k\alpha}{\sin^2 k\alpha} \sin 2k\ell\alpha \\
 Q(\ell) &= \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{4} \frac{1}{\sin k\alpha} \left(1 + 2 \frac{\cos^2 k\alpha}{\sin^2 k\alpha} \right) \sin^2 k\ell\alpha \\
 R(\ell) &= \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{4} \frac{1}{\sin k\alpha} \left(2 + \frac{\cos^2 k\alpha}{\sin^2 k\alpha} \right) \sin^2 k\ell\alpha,
 \end{aligned} \tag{12}$$

erhalten wir die folgenden homogenen Gleichungen für $A^{(\ell)}$ und $B^{(\ell)}$:

$$\begin{aligned} [\omega_\ell^3 + 3 - \mu R(\ell)] A^{(\ell)} + [-2\omega_\ell + \mu P(\ell)] B^{(\ell)} &= 0 \\ [-2\omega_\ell + \mu P(\ell)] A^{(\ell)} + [\omega_\ell^2 + \mu Q(\ell)] B^{(\ell)} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Deshalb erfüllen die Frequenzen ω_ℓ Gleichungen

$$\Delta_\ell(\omega) = 0, \quad (14)$$

wobei

$$\begin{aligned} \Delta_\ell(\omega) = [\omega^2 + 3 - \mu R(\ell)][\omega^2 + \mu Q(\ell)] \\ - (2\omega - \mu P(\ell))^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Wir müssen nun untersuchen, unter welchen Bedingungen (14) nur reelle Lösungen für die Frequenzen ω hat.

Zunächst stellen wir fest

$$R(-\ell) = R(\ell), \quad Q(-\ell) = Q(\ell), \quad P(-\ell) = -P(\ell) \quad (16)$$

und folglich

$$\omega_{-\ell} = -\omega_\ell. \quad (17)$$

Sodann ist klar, dass die Mode $\ell = \frac{N}{2}$ (N gerade) die grössten störenden Kräfte erzeugt, da dann benachbarte Körper entgegengesetzt ausgelenkt werden. Wir betrachten als Beispiel $R(\ell)$ (in den Summen (12) bleibt bei $k \rightarrow N-k$ alles gleich):

$$R(\ell) = 2 \times \sum_{k=1}^{[N/2]} \frac{1}{4} \left(\frac{\cos^2 k\alpha}{\sin^3 k\alpha} + \frac{2}{\sin k\alpha} \right) \sin^2 k\ell\alpha.$$

Für grosse N dominieren die tiefsten k in der Summe

$$\begin{aligned} R\left(\frac{N}{2}\right) &= 2 \times \sum_{k=1,3,5,\dots}^{[N/2]} \frac{1}{4} \left(\frac{\cos^2 k\alpha}{\sin^3 k\alpha} + \frac{2}{\sin k\alpha} \right) \\ &\approx \frac{1}{2} \sum_{k=1,3,5,\dots} \frac{1}{(k\alpha)^3} = \frac{1}{2} \left(\frac{N}{\pi}\right)^3 \left(1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \dots\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{N}{\pi}\right)^3 \times 1.0518. \end{aligned}$$

Ebenso findet man $Q \simeq 2 R$. Wir setzen

$$A := \mu R, \quad \mu Q \simeq 2 A,$$

$$A \simeq \frac{1}{2} \underbrace{\mu}_{\simeq \omega M} \left(\frac{N}{r}\right)^3 \times 1.0518 \simeq \frac{1}{2} \frac{N^2}{r^3} \times 1.0518 \frac{\text{Ring-Masse}}{\text{Saturn-Masse}}. \quad (18)$$

Aus (14) wird (für $l = N/2$)

$$\omega^4 - (1 - A) \omega^2 + 2A(3 - A) = 0. \quad (19)$$

Die Bedingung für Stabilität ist

$$(1-A)^2 > 8A(3-A),$$

oder

$$1 > 25.649 A. \quad (20)$$

Setzen wir darin (18) ein, so ergibt sich schliesslich

$$\boxed{N^2 < 2.3 \frac{\text{Saturn-Masse}}{\text{Ring-Masse}}.} \quad (21)$$

Die Beobachtungen zeigen, dass die Ringmasse etwa 10^{-6} der Saturn-Masse beträgt.

Maxwell untersuchte auch die Wechselwirkung von mehreren Ringen. Selbst wenn jeder Ring für sich stabil ist, können die Kopplungen zu Instabilitäten führen. Eine Zusammenfassung der Resultate und Schlussfolgerungen geben die folgenden Schlusspassagen aus Maxwells Originalarbeit.

XIX. *On the Stability of the motion of Saturn's Rings.*

[An Essay, which obtained the Adams Prize for the year 1856, in the University of Cambridge.]

ADVERTISEMENT.

THE Subject of the Prize was announced in the following terms:—

The University having accepted a fund, raised by several members of St John's College, for the purpose of founding a Prize to be called the ADAMS PRIZE, for the best Essay on some subject of Pure Mathematics, Astronomy, or other branch of Natural Philosophy, the Prize to be given once in two years, and to be open to the competition of all persons who have at any time been admitted to a degree in this University:—

The Examiners give Notice, that the following is the subject for the Prize to be adjudged in 1857:—

The Motions of Saturn's Rings.

. The problem may be treated on the supposition that the system of Rings is exactly or very approximately concentric with Saturn and symmetrically disposed about the plane of his Equator, and different hypotheses may be made respecting the physical constitution of the Rings. It may be supposed (1) that they are rigid: (2) that they are fluid, or in part aeriform: (3) that they consist of masses of matter not mutually coherent. The question will be considered to be answered by ascertaining on these hypotheses severally, whether the conditions of mechanical stability are satisfied by the mutual attractions and motions of the Planet and the Rings.

It is desirable that an attempt should also be made to determine on which of the above hypotheses the appearances both of the bright Rings and the recently discovered dark Ring may be most satisfactorily explained; and to indicate any causes to which a change of form, such as is supposed from a comparison of modern with the earlier observations to have taken place, may be attributed.

E. GUEST, *Vice-Chancellor.*
J. CHALLIS.
S. PARKINSON.
W. THOMSON.

March 23, 1855.

Schlussabschnitt von Maxwells Arbeit:

Let us now gather together the conclusions we have been able to draw from the mathematical theory of various kinds of conceivable rings.

We found that the stability of the motion of a solid ring depended on so delicate an adjustment, and at the same time so unsymmetrical a distribution of mass, that even if the exact condition were fulfilled, it could scarcely last long, and if it did, the immense preponderance of one side of the ring would be easily observed, contrary to experience. These considerations, with others derived from the mechanical structure of so vast a body, compel us to abandon any theory of solid rings.

We next examined the motion of a ring of equal satellites, and found that if the mass of the planet is sufficient, any disturbances produced in the arrangement of the ring will be propagated round it in the form of waves, and will not introduce dangerous confusion. If the satellites are unequal, the propagation of the waves will no longer be regular, but disturbances of the ring will in this, as in the former case, produce only waves, and not growing confusion. Supposing the ring to consist, not of a single row of large satellites, but of a cloud of evenly distributed unconnected particles, we found that such a cloud must have a very small density in order to be permanent, and that this is inconsistent with its outer and inner parts moving with the same angular velocity. Supposing the ring to be fluid and continuous, we found that it will be necessarily broken up into small portions.

We conclude, therefore, that the rings must consist of disconnected particles; these may be either solid or liquid, but they must be independent. The entire system of rings must therefore consist either of a series of many concentric rings, each moving with its own velocity, and having its own systems of waves, or else of a confused multitude of revolving particles, not arranged in rings, and continually coming into collision with each other.

Taking the first case, we found that in an indefinite number of possible cases the mutual perturbations of two rings, stable in themselves, might mount up in time to a destructive magnitude, and that such cases must continually occur in an extensive system like that of Saturn, the only retarding cause being the possible irregularity of the rings.

The result of long-continued disturbance was found to be the spreading out of the rings in breadth, the outer rings pressing outwards, while the inner rings press inwards.

The final result, therefore, of the mechanical theory is, that the only system of rings which can exist is one composed of an indefinite number of unconnected particles, revolving round the planet with different velocities according to their respective distances. These particles may be arranged in series of narrow rings, or they may move through each other irregularly. In the first case the destruction of the system will be very slow, in the second case it will be more rapid, but there may be a tendency towards an arrangement in narrow rings, which may retard the process.

We are not able to ascertain by observation the constitution of the two outer divisions of the system of rings, but the inner ring is certainly transparent, for the limb of Saturn has been observed through it. It is also certain, that though the space occupied by the ring is transparent, it is not through the material parts of it that Saturn was seen, for his limb was observed without distortion; which shows that there was no refraction, and therefore that the rays did not pass through a medium at all, but between the solid or liquid particles of which the ring is composed. Here then we have an optical argument in favour of the theory of independent particles as the material of the rings. The two outer rings may be of the same nature, but not so exceedingly rare that a ray of light can pass through their whole thickness without encountering one of the particles.

Finally, the two outer rings have been observed for 200 years, and it appears, from the careful analysis of all the observations by M. Struvé, that the second ring is broader than when first observed, and that its inner edge is nearer the planet than formerly. The inner ring also is suspected to be approaching the planet ever since its discovery in 1850. These appearances seem to indicate the same slow progress of the rings towards separation which we found to be the result of theory, and the remark, that the inner edge of the inner ring is most distinct, seems to indicate that the approach towards the planet is less rapid near the edge, as we had reason to conjecture. As to the apparent unchangeableness of the exterior diameter of the outer ring, we must remember that the outer rings are certainly far more dense than the inner one, and that a small change in the outer rings must balance a great change in the inner one. It is possible, however, that some of the observed changes may be due to the existence of a resisting medium. If the changes already suspected should be confirmed by repeated observations with the same instruments, it will be worth while to investigate more carefully whether Saturn's Rings are permanent or transitional elements of the Solar System, and whether in that part of the heavens we see celestial immutability, or terrestrial corruption and generation, and the old order giving place to new before our own eyes.

6.3 Parametrische Resonanz

Wir studieren nun die Stabilität von Gleichgewichtslagen und periodischen Lösungen für nicht-autonome Systeme

$$\dot{x} = X(x, t) \quad , \quad (6.26)$$

für welche aber die Zeitabhängigkeit periodisch ist,

$$X(x, t + T) = X(x, t) \quad . \quad (6.27)$$

Beispiel: Oszillator mit periodisch variierender Frequenz:

$$\ddot{q} + \omega^2(t) q = 0 \quad , \quad \omega(t + T) = \omega(t) \quad . \quad (6.28)$$

Diese Gleichung ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p \\ \dot{p} &= -\omega^2 q \quad , \quad \omega(t+T) = \omega(t) \quad . \end{aligned} \quad (6.29)$$

Gl. (6.28) ist ein Modell für die Schaukel, die durch ein Pendel variabler Länge $l(t)$ und zugehöriger variabler Frequenz $\omega^2(t) = g/l(t)$ beschrieben sei. Interessant ist hier die Stabilität der Gleichgewichtslage $q = 0$ (tiefster Punkt) und die Möglichkeit des Aufschaukelns. (Kinder lernen dies allerdings ohne die nachfolgende Analyse.)

Es sei $\phi_t = \phi_{t,0}$ der Fluss von X (mit Anfangszeit 0). Da das System nichtautonom ist, gilt i.a. für ϕ_t keine Gruppeneigenschaft: $\phi_t \circ \phi_s \neq \phi_s \circ \phi_t \neq \phi_{t+s}$.

Die Periodizität von X impliziert aber

$$\phi_t \circ \phi_T = \phi_{T+t} \quad (6.30)$$

und speziell

$$(\phi_T)^n = \phi_{nT} \quad . \quad (6.31)$$

Die Abbildung $\varphi := \phi_T$ spielt im folgenden eine wichtige Rolle; wir nennen sie die Poincaréabbildung. Nach (6.30) gilt

$$\phi_{T+t} = \phi_t \circ \varphi. \quad (6.32)$$

Danach ist x_0 genau dann Fixpunkt von φ , wenn die Lösung $\phi_t(x_0)$, mit der Anfangsbedingung x_0 für $t = 0$, periodisch mit der Periode T ist. Ferner ist die periodische Lösung $\phi_t(x_0)$ genau dann Ljapunov stabil ^{*)} (asymptotisch stabil), wenn der Fixpunkt x_0 von φ Ljapunov stabil ^{*)} (asymptotisch stabil) ist.

Für Hamiltonsche Systeme ist $D\varphi$ nach Satz 5.3 symplektisch. Von der Uebungsserie 7 wissen wir deshalb, dass für jeden Eigenwert λ von $D\varphi(x_0)$ auch λ^{-1} , $\bar{\lambda}$ und $\bar{\lambda}^{-1}$ Eigenwerte mit denselben Multiplizitäten sind.

Ist das System (6.27) linear, $X(x,t) = A(t)x$, dann ist natürlich φ linear.

Wir nennen x_0 einen hyperbolischen Fixpunkt von einem Diffeomorphismus φ , falls $D\varphi(x_0)$ ein hyperbolischer Isomorphismus ist, d.h. keine Eigenwerte vom Betrag 1 hat.

Für hyperbolische Fixpunkte eines Diffeomorphismus φ gilt die folgende Version des Hartman-Theorems.

^{*)} Ein Fixpunkt x_0 von φ ist (Ljapunov-)stabil, falls zu jeder Umgebung U von x_0 eine Umgebung $V \subset U$ von x_0 existiert, so dass $\bigcup_{n \geq 0} \varphi^n(V) \subset U$ gilt. Eine periodische Bahn γ ist stabil, falls zu jeder Umgebung U von γ eine offene Umgebung $V \subset U$ von γ existiert, mit

$$\bigcup_{t \geq 0} \phi_t(V) \subset U.$$

Satz 6.6 (Grobman Hartman): Es sei φ ein lokaler Diffeomorphismus und x_0 ein hyperbolischer Fixpunkt von φ .

Sei $A = D\varphi(x_0)$. Dann gibt es Umgebungen $V(x_0)$ von x_0 und $U(0)$ von $0 \in \mathbb{R}^n$ und einen Homöomorphismus $h: U \rightarrow V$, derart, dass gilt

$$h \circ A = \varphi \circ h .$$

Beweis: Siehe z.B. [12], § 2.4.

Für einen symplektischen Diffeomorphismus φ ist deshalb jeder hyperbolische Fixpunkt instabil. Stabilität ist höchstens möglich, wenn x_0 ein Zentrum ist, d.h. alle Eigenwerte von $D\varphi(x_0)$ vom Betrage 1 sind. Im nichtlinearen Fall sind wir dann wieder in einer sehr schwierigen Situation.

Wir betrachten jetzt ein lineares periodisches Hamiltonsches System, z.B. (6.29). Nach dem Gesagten ist die Nulllösung genau dann stabil, wenn alle Eigenwerte von φ auf dem Einheitskreis sind. Im zweidimensionalen Fall gilt für die beiden Eigenwerte λ_1, λ_2 : $\lambda_1 \lambda_2 = \det \varphi = 1$, $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{Sp } \varphi$. Stabilität liegt also genau dann vor, wenn

$$|\text{Sp } \varphi| < 2 \tag{6.33}$$

ist. Leider ist die Berechnung der Spur von φ nur in speziellen Fällen möglich. Durch numerische Integration der Bewegungsgleichung im Intervall $0 \leq t \leq T$ kann man diese aber approximativ bestimmen.

Sind überdies alle $2f$ Eigenwerte verschieden, so ist die Nulllösung stark stabil, d.h. jedes genügend benachbarte lineare Hamiltonsche System ist ebenfalls stabil (Übung).

Instabilitäten können nur auftreten, wenn zwei Eigenwerte zusammenstossen.

Als Beispiel betrachten wir nun die Gleichung

$$\ddot{x} = -\omega^2(1 + \varepsilon a(t)) x, \quad \varepsilon \ll 1, \quad (6.34)$$

mit $a(t+2\pi) = a(t)$, z.B. $a(t) = \cos(t)$.

Die Berechnung von φ ist einfach für $\varepsilon = 0$. Dafür ist die allgemeine Lösung $x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$. Die Lösung mit den Anfangsbedingungen $x = 1, \dot{x} = 0$ ist

$$x = \cos \omega t, \quad \dot{x} = -\omega \sin \omega t$$

und diejenige für die Anfangsbedingungen $x = 0, \dot{x} = 1$ lautet

$$x = \frac{1}{\omega} \sin \omega t, \quad \dot{x} = \cos \omega t.$$

Deshalb lautet die Poincaréabbildung

$$\varphi = \begin{pmatrix} \cos 2\pi\omega & \frac{1}{\omega} \sin 2\pi\omega \\ -\omega \sin 2\pi\omega & \cos 2\pi\omega \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt :

$$|\text{Sp } \varphi| = 2|\cos 2\pi\omega| < 2 \quad \text{für } \omega \neq \frac{k}{2}, \quad k = 0, 1, \dots.$$

Wir schliessen daraus, dass die Instabilitätszonen in der (ω, ε) -Ebene die schraffierten Gebiete in Fig. 6.7 sind, welche die ω -Achse in den Punkten

$$\omega = k/2, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.35)$$

schneiden.

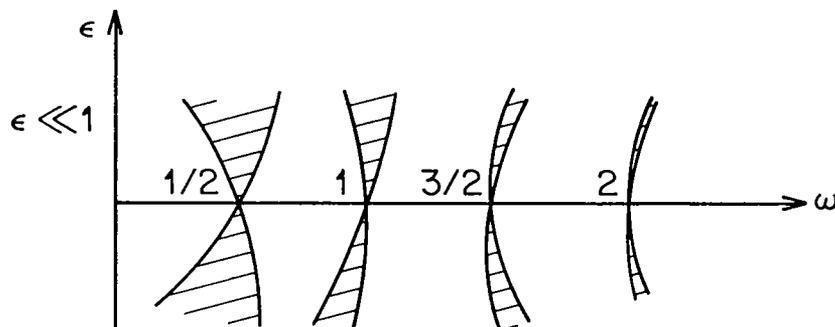


Fig. 6.7

(Die genaue Form der Instabilitätszonen kann man numerisch berechnen.) Die untere Gleichgewichtslage der idealisierten Schaukel ist also instabil bezüglich beliebig kleinen periodischen Änderungen der Länge für $\omega = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$. Dieses Phänomen nennt man parametrische Resonanz. Die Resonanz wird am stärksten für $\omega = \frac{1}{2}$ sein, d.h. wenn die Frequenz \gg der Änderung des Parameters zweimal so gross ist wie die charakteristische Frequenz ω des Systems (oben war $\gg = 1$). Für höhere k in $\omega/\gg = k/2$, sind die Instabilitätszonen sehr eng und ausserdem sind die Instabilitäten schwach. Wird auch Reibung mitgenommen, so entfernen sich die Instabilitätszonen zunehmend schnell von der reellen Achse (vgl. Fig. 6.8).

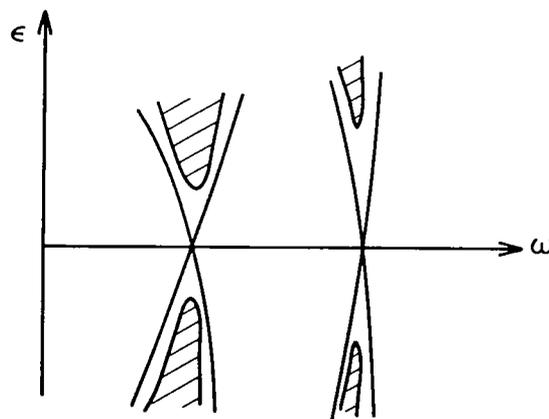


Fig. 6.8

Weitere Beispiele von parametrischer Resonanz werden wir in den Übungen kennenlernen (vgl. auch [4], § 25).

* * *

6.4 Gleichgewichtslagen im restringierten 3-Körperproblem

Wir betrachten zwei Massenpunkte P_1 und P_2 , welche sich in einer Ebene auf Kreisbahnen mit gleichförmiger Geschwindigkeit um ihren gemeinsamen Schwerpunkt S , auf Grund ihrer gegenseitigen Anziehung nach dem Newtonschen Gesetz bewegen (Doppelstern-System, oder Sonne-Jupiter). Ein dritter Probekörper bewege sich im Gravitationsfeld von P_1 und P_2 . Seine Masse wird als verschwindend klein angenommen, so dass er die Kreisbewegung von P_1 und P_2 nicht beeinflusst. Das eingeschränkte 3-Körperproblem besteht in der Aufgabe, die Bewegung dieses Probekörpers zu beschreiben. Leider kann man auch über dieses vereinfachte 3-Körperproblem nur fragmentarische Aussagen machen.

Wir bestimmen zunächst die Lagrangefunktion bezüglich des mitrotierenden Systems. Nach (2.81) ist die kinetische Energie $T = \frac{m}{2}(\dot{\underline{x}} + \underline{\omega} \wedge \underline{x})^2$, wenn $\underline{\omega}$ die Winkelgeschwindigkeit bezüglich des rotierenden Systems ist. Bezeichnet Φ das Newtonsche Potential von P_1 und P_2 , so lautet die Lagrangefunktion (wir dividieren durch m)

$$L = \frac{1}{2} \dot{\underline{x}}^2 + (\underline{\omega} \wedge \underline{x}) \cdot \dot{\underline{x}} - \Phi, \quad (6.36)$$

mit

$$\Phi = \Phi - \frac{1}{2} (\underline{\omega} \wedge \underline{x})^2. \quad (6.37)$$

Der 2. Term ist das Zentrifugalpotential. Der kanonische Impuls ist

$$\underline{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{x}}} = \dot{\underline{x}} + \underline{\omega} \wedge \underline{x} \quad (\underline{p} \neq \dot{\underline{x}}!) \quad (6.38)$$

und damit lautet die Hamiltonfunktion:

$$H = \frac{1}{2} [\underline{p} - \underline{\omega} \wedge \underline{x}]^2 + \phi(\underline{x}) . \quad (6.39)$$

Die Gleichgewichtslagen sind bestimmt durch

$$\dot{\underline{x}} = \underline{p} - \underline{\omega} \wedge \underline{x} = 0 , \quad \nabla \phi(\underline{x}) = 0 . \quad (6.40)$$

Bezüglich des rotierenden Systems ist H autonom. Die Erhaltung von H ist gleichbedeutend mit der Erhaltung des sog. Jacobiintegrals,

$$\frac{1}{2} \dot{\underline{x}}^2 + \phi(\underline{x}) = \text{const.} \quad (6.41)$$

Für einen gegebenen Wert J dieses Integrals sind die möglichen Konfigurationen $= \{ \underline{x} \mid \phi(\underline{x}) \leq J \}$. Deshalb ist die Struktur der Aequipotentialflächen von ϕ wichtig. Diese sind weiter unten in Fig. 6.11 gezeigt.

Die Gleichgewichtspunkte von X_H liegen natürlich in der Bahnebene. Wir beschränken uns im weiteren auf Bewegungen des Testkörpers in der Bahnebene. Nach der Definition des Schwerpunktes und dem 3. Keplerschen Gesetz ist (für die Bezeichnungen vgl. Fig. 6.9):

$$\frac{a_1}{m_2} = \frac{a_2}{m_1} = \frac{G}{\omega^2 (a_1 + a_2)^2} . \quad (6.42)$$

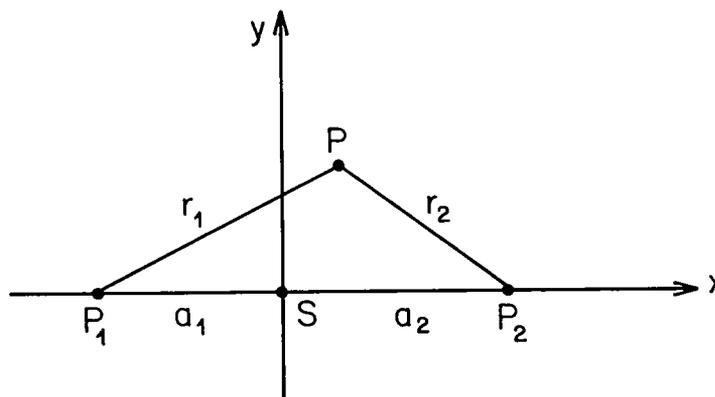


Fig. 6.9

Zur Vereinfachung der Formeln wählen wir die Einheiten von Masse, Länge und Zeit so, dass

$$m_1 + m_2 = 1, \quad a_1 + a_2 = 1, \quad G = 1. \quad (6.43)$$

Ferner schreiben wir noch $m_2 = \mu$, also $m_1 = 1 - \mu$. Dann ist nach (6.42)

$$a_1 = \mu, \quad a_2 = 1 - \mu, \quad \omega = 1 \quad (6.44)$$

und die Hamiltonfunktion (6.39) in der Bahnebene lautet

$$H = \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2) - (x p_y - y p_x) - \frac{1-\mu}{[(x+\mu)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{\mu}{[(x-1+\mu)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}}}. \quad (6.45)$$

Das zugehörige Hamiltonsche Vektorfeld ist

$$\chi_H = (p_x + y, p_y - x, p_y - \phi_{,x}, -p_x - \phi_{,y}). \quad (6.46)$$

Das Newtonsche Potential ϕ ist durch die beiden letzten Terme in (6.45) gegeben. Es ist

$$\phi_{,x} = \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{r_{1-\mu}^3} + \frac{\mu(x-1+\mu)}{r_\mu^3}; \quad \phi_{,y} = \frac{y(1-\mu)}{r_{1-\mu}^3} + \frac{y\mu}{r_\mu^3}, \quad (6.47)$$

wobei

$$\begin{aligned} r_{1-\mu}^2 &:= (x+\mu)^2 + y^2 & (r_{1-\mu} : \text{Abstand von Masse } 1-\mu) \\ r_\mu^2 &:= (x-1+\mu)^2 + y^2 & (r_\mu : \text{Abstand von Masse } \mu). \end{aligned} \quad (6.48)$$

Für die kritischen Punkte gilt

$$p_x = -y, \quad p_y = x \quad (\dot{x} = \dot{y} = 0), \quad (6.49)$$

$$x = (x+\mu)(1-\mu) r_{1-\mu}^{-3} + \mu(x-1+\mu) r_\mu^{-3}, \quad (6.50)$$

$$y = y(1-\mu) r_{1-\mu}^{-3} + y\mu r_\mu^{-3}. \quad (6.51)$$

a) Äquilaterale Lösungen:

Ist $y \neq 0$ so folgt aus (6.51): $1 = (1-\mu)r_{1-\mu}^{-3} + \mu r_{\mu}^{-3}$. Damit wird aus (6.50): $\mu(1-\mu)(r_{1-\mu}^{-3} - r_{\mu}^{-3}) = 0$

$$\Rightarrow r_{\mu} = r_{1-\mu} \longrightarrow r_{\mu} = r_{1-\mu} = 1,$$

unabhängig von μ .

Falls also (P, P_1, P_2) in Fig. 6.9 ein gleichseitiges Dreieck bilden, so ist P ein Gleichgewichtspunkt (Lagrange 1773).

b) kollineare Lösungen:

Ist $y = 0$, so verbleibt nur die Bedingung (6.50), welche drei Lösungen hat, wie man graphisch sieht (Fig. 6.10). Diese

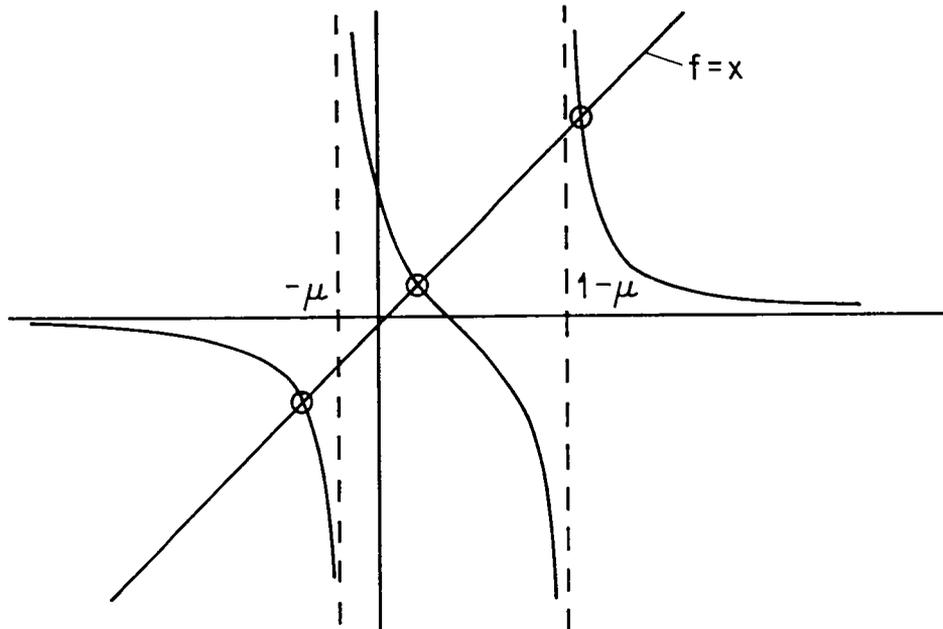


Fig. 6.10. Graphische Lösung von (6.50)

drei kollinearen Lösungen hat Euler 1767 gefunden. Wir werden sehen, dass diese Gleichgewichtslagen instabil sind (Plummer 1901). Die 5 Gleichgewichtspunkte und die Niveaulinien von ϕ sind in Fig. 6.11 gezeigt.

Zur Untersuchung des Stabilitätsverhaltens benötigen wir DX_H . Aus (6.46) folgt

$$DX_H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -\phi_{,xx} & -\phi_{,xy} & 0 & 1 \\ -\phi_{,xy} & -\phi_{,yy} & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.52)$$

Für das zugehörige charakteristische Polynom findet man

$$\chi(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 + \lambda^2(\phi_{,xx} + \phi_{,yy}) - \phi_{,xx} - \phi_{,yy} + (\phi_{,xx}\phi_{,yy} - \phi_{,xy}^2). \quad (6.53)$$

Die äquilateralen Gleichgewichtslagen haben die Werte

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} - \mu, \quad y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \phi_{,xx} &= \frac{1}{4}, \quad \phi_{,xy} = -\frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) \\ \phi_{,yy} &= -\frac{5}{4}. \end{aligned} \quad (6.54)$$

Dies gibt

$$\chi(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1-\mu). \quad (6.55)$$

Die Eigenwerte von DX_H sind also

$$\lambda_{1,2}^2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 27\mu(1-\mu)}. \quad (6.56)$$

Für

$$\mu < \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18} = 0.03852\dots \quad (6.57)$$

(kritischer Routh Wert)

sind alle Eigenwerte imaginär und nicht entartet. Da der quadratische Teil der Hamiltonfunktion (d.h. die Hessesche) indefinit ist (Uebung), ist die Frage der Stabilität sehr schwierig. Erst durch die Arbeiten von Arnold und Moser wurde es in den 60iger Jahren möglich, diese Frage zu beantworten. Folgendes ist wahr (siehe z.B. C.I. Siegel, J.K. Moser, "Lectures on Celestial Mechanics", Springer 1971, § 35): Für das Intervall

$$0 < \mu < \mu_1 := \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{69}}{9} \right) \quad (6.58)$$

sind die äquilateralen Gleichgewichtslagen stabil, bis auf 3 Ausnahmewerte μ_0, μ_2, μ_3 von μ , wobei z.B.

$$\mu_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{45} \sqrt{1833} \right), \quad \mu_3 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{15} \sqrt{213} \right).$$

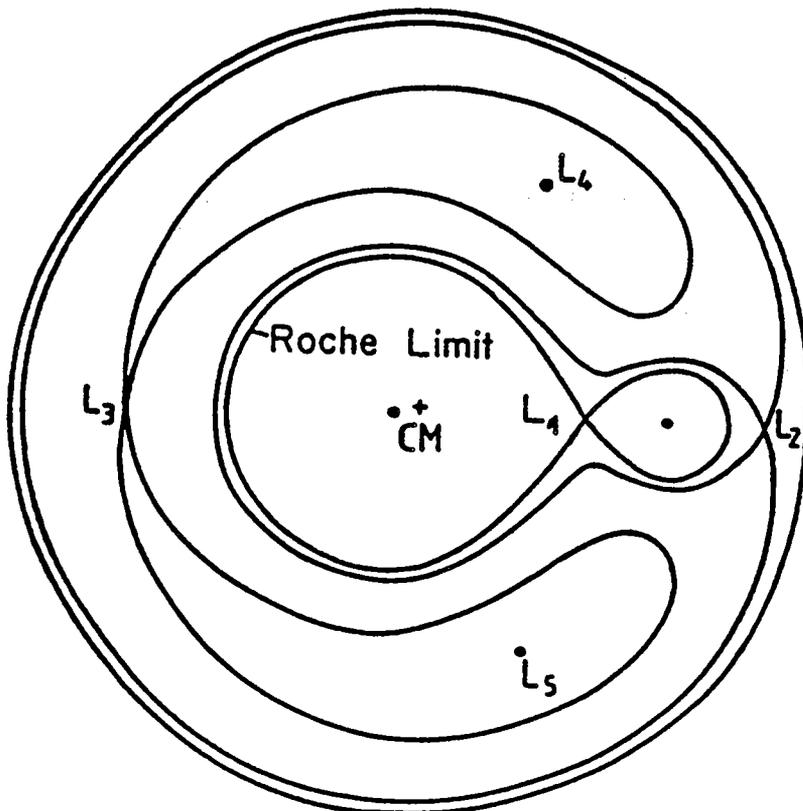


Fig. 6.11. Niveaulinien von ψ in der Bahnebene, Gleichgewichtslagen und Roche-Grenze des restringierten 3-Körperproblems.

Wir untersuchen jetzt die kollinearen Gleichgewichtslagen.

Satz (Plummer 1901): Die Eulerschen Gleichgewichtslagen sind instabil.

Beweis: Benutzen wir an Stelle von ϕ das Potential

$$\psi = \phi - \frac{1}{2} (x^2 + y^2), \quad (6.59)$$

so lautet das charakteristische Polynom (6.53)

$$\chi(\lambda) = \lambda^4 + (4 + \phi_{xx} + \phi_{yy}) \lambda^2 + (\phi_{xx} \phi_{yy} - \phi_{xy}^2). \quad (6.60)$$

Wir zeigen, dass nicht alle Eigenwerte rein imaginär sein können. Für die Instabilität genügt es nach (6.60) zu zeigen, dass das Polynom

$$\hat{\chi}(\xi) = \xi^2 + (4 + \phi_{xx} + \phi_{yy}) \xi + (\phi_{xx} \phi_{yy} - \phi_{xy}^2) \quad (6.61)$$

nicht zwei negativ reelle Wurzeln hat. Wir werden nun zeigen, dass $\hat{\chi}(\xi)$ zwei reelle Wurzeln mit entgegengesetztem Vorzeichen hat

Direkte Rechnung gibt ($\varrho \equiv r_\mu$, $\sigma \equiv r_{1-\mu}$)

$$\begin{aligned} - \phi_{xx} &= 1 - \frac{\mu}{\varrho^3} - \frac{1-\mu}{\sigma^3} + \frac{3\mu}{\varrho^5} (x-1+\mu)^2 + \frac{3(1-\mu)}{\sigma^5} (x+\mu)^2, \\ - \phi_{xy} &= 3y \left\{ \frac{\mu}{\varrho^5} (x-1+\mu) + \frac{1-\mu}{\sigma^5} (x+\mu) \right\}, \\ - \phi_{yy} &= 1 - \frac{\mu}{\varrho^3} - \frac{1-\mu}{\sigma^3} + 3y^2 \left\{ \frac{\mu}{\varrho^5} + \frac{1-\mu}{\sigma^5} \right\}, \end{aligned} \quad (6.62)$$

wobei für $y = 0$: $\varrho = |x-1+\mu|$, $\sigma = |x+\mu|$. Für $y = 0$ ist $\phi_{xy} = 0$ und also

$$\hat{\chi}(\xi) = \xi^2 + (4 + \phi_{xx} + \phi_{yy}) \xi + \phi_{xx} \phi_{yy}. \quad (6.63)$$

Ferner gilt

$$-\phi_{xx} = 1 + 2\Delta, \quad -\phi_{yy} = 1 - \Delta \quad (6.64)$$

mit

$$\Delta = \frac{\mu}{\rho^3} + \frac{1-\mu}{\sigma^3}. \quad (6.65)$$

Wir sehen, dass $-\phi_{xx}$ positiv ist und notieren

$$(4 + \phi_{xx} + \phi_{yy})^2 - 4\phi_{xx}\phi_{yy} = \Delta(9\Delta - 8). \quad (6.66)$$

Die Wurzeln von $\hat{\chi}$ sind demnach reell für $\Delta > 8/9$. Wir werden zeigen, dass $-\phi_{yy} < 0$ ist, weshalb nach (6.64) $\Delta > 1$ sein muss. Da $-\phi_{xx} > 0$ ist und das Produkt der Wurzeln gleich $\phi_{xx}\phi_{yy} < 0$ ist, haben die beiden reellen Wurzeln tatsächlich verschiedene Vorzeichen.

Wir zeigen nun, dass $-\phi_{yy}$ an der Stelle der Eulerpunkte negativ ist.

Nun ist allgemein

$$x^2 + y^2 = \mu\rho^2 + (1-\mu)\sigma^2 - \mu(1-\mu)$$

und folglich

$$\phi(x, y) = U(\rho, \sigma) = -\frac{1}{2} [\mu\rho^2 + (1-\mu)\sigma^2 - \mu(1-\mu)] - \frac{\mu}{\rho} - \frac{1-\mu}{\sigma}. \quad (6.67)$$

Deshalb

$$-\frac{\partial U}{\partial \rho} = \mu\left(\rho - \frac{1}{\rho^2}\right), \quad -\frac{\partial U}{\partial \sigma} = (1-\mu)\left(\sigma - \frac{1}{\sigma^2}\right). \quad (6.68)$$

Da

$$\phi_{,y} = \frac{\partial U}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial y} = y \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial U}{\partial \sigma} \right),$$

so folgt für $y = 0$:

$$\phi_{yy} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial U}{\partial \sigma}. \quad (6.69)$$

Jetzt betrachten wir die drei Gleichgewichtslagen separat.

Für den inneren Lagrangepunkt L_1 in Fig. 6.11 ist $\rho + \sigma = 1$,

also

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0.$$

Da nach der Kettenregel

$$\phi_{,x} = \frac{\partial U}{\partial \varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x}$$

so verschwindet also $\phi_{,x}$ wenn gilt $\partial U / \partial \varrho = \partial U / \partial \sigma$, d.h. nach (6.68)

$$\mu \left(\frac{1}{\varrho^2} - \varrho \right) = (1-\mu) \left(\frac{1}{\sigma^2} - \sigma \right).$$

Damit ist nach (6.69)

$$-\phi_{yy} = - \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\sigma} \right) \frac{\partial U}{\partial \varrho} = \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\sigma} \right) \mu \left(\varrho - \frac{1}{\varrho^2} \right) < 0,$$

da $0 < \varrho < 1$.

Nun betrachten wir den Fall $\varrho = \sigma + 1$. Für diesen gilt $\partial \varrho / \partial x = \partial \sigma / \partial x$. Wenn also $\phi_{,x}$ verschwindet, ist jetzt

$$\frac{\partial U}{\partial \varrho} = - \frac{\partial U}{\partial \sigma}$$

d.h. es gilt

$$\mu \left(\frac{1}{\varrho^2} - \varrho \right) = (1-\mu) \left(\sigma - \frac{1}{\sigma^2} \right).$$

Da wir, ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\mu < 1-\mu$ wählen können, folgt daraus $\sigma < 1 < \varrho$. Also ist

$$-\phi_{yy} = \underbrace{\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\sigma} \right)}_{< 0} \mu \underbrace{\left(\varrho - \frac{1}{\varrho^2} \right)}_{> 0} < 0.$$

Ist schliesslich $\sigma = \varrho + 1$, so erhält man durch Vertauschung von ϱ und σ das gleiche Ergebnis. \square

Die Resultate dieses Abschnittes sind insbesondere für die Astrophysik von engen Doppelsternsystemen (z.B. binäre Röntgenquellen) wichtig. Siehe z.B. N. Straumann: General Relativity and Relativistic Astrophysics, Springer 1984.

Anhang. Beweise der Sätze 6.3, 6.4

=====

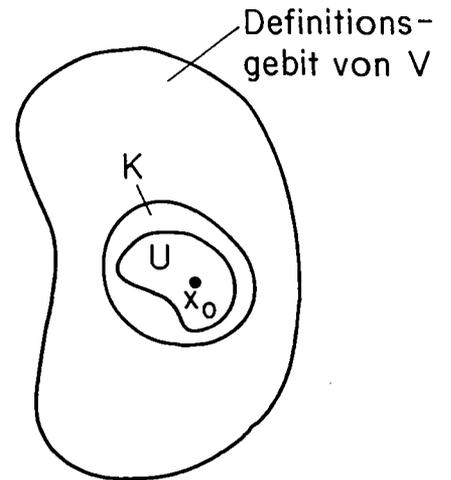
Beweis von Satz 6.4: Wir wählen eine kompakte Kugel $K \ni x_0$ im Definitionsgebiet der Ljapunovfunktion V . Der Wert des Minimums von V auf ∂K sei 2ε und ferner sei

$$U = \{ x \in K \mid V(x) \leq \varepsilon \}$$

U ist kompakt und liegt im Inneren von K (vgl. Fig.). Angenommen α ist eine Integralkurve und $\alpha(0) \in U$, so ist $\alpha(t) \in U$ für alle t , denn solange $\alpha(t) \in V$ ist, gilt

$(V \circ \alpha)' < 0$, also nimmt $V \circ \alpha$ monoton ab. Ist also $V(\alpha(0)) \leq \varepsilon$, so bleibt

$V \circ \alpha \leq \varepsilon$ auf der maximalen Lösung in V ; dann bleibt aber $\alpha(t) \in K$ also $\alpha(t) \in U$, weil $V \geq 2\varepsilon$ auf ∂K . Mit dem Lemma im Anschluss an diesen Beweis folgt, dass $\alpha(t)$ für alle $t \geq 0$ definiert ist (und nach dem Gesagten in U bleibt). Dies beweist die Stabilität.



Nun zeigen wir, dass für eine strikte Ljapunovfunktion $\lim_{t \rightarrow \infty} V(\alpha(t)) = 0$ ist. Daraus folgt dann $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = x_0$, denn sonst gäbe es eine Folge $t_n \rightarrow \infty$, $\alpha(t_n) \rightarrow y \neq x_0$, und daher $V(\alpha(t_n)) \rightarrow V(y) \neq 0$.

Wegen $(V \circ \alpha)' < 0$ fällt $V \circ \alpha$ monoton, und es könnte allenfalls gelten $V(\alpha(t)) \rightarrow \tau > 0$, und dann wäre $V \circ \alpha \geq \tau$. Wählt man δ so klein, dass $V(x) < \tau$ für $|x - x_0| < \delta$, so wäre stets $|\alpha(t) - x_0| \geq \delta$. Aber auf der kompakten Menge $U \cap \{x \mid$

$\{ |x-x_0| \geq \delta \}$ ist $(\text{grad } V, X) < -\chi < 0$, also wäre stets $(V\alpha) \dot{<} \chi$, und es müsste nach endlicher Zeit $V(\alpha(t)) = 0$ sein, womit wir einen Widerspruch konstruiert haben. Also gilt in der Tat $\lim V(\alpha(t)) = 0$. \square

Das Lemma, welches wir im Beweis benutzten lautet:

Lemma: Sei $\alpha: (a,b) \rightarrow M$ eine maximale Lösung der Differentialgleichung (6.1), und $b < \infty$, und ist $K \subset M$ kompakt, so gibt es ein $\tau \in (a,b)$, so dass $\alpha(t) \notin K$ für $t > \tau$.

Entsprechendes gilt natürlich auch für negative t und a .

Für den Beweis siehe [1], S. 153.

Beweis des 1. Teils von Satz 6.3: Wir zeigen, dass aus (6.14) die Existenz einer strikten Ljapunovfunktion folgt, woraus der Satz aus dem eben bewiesenen Satz 6.4 folgt.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $x_0 = 0$ und $L := DX(0)$; ferner sei $\mu = \min |\text{Re } \lambda_i| > 0$. Nun wählen wir wieder eine Basis \hat{e}_j wie auf S. 159, mit einem δ über das wir noch verfügen werden. Bezüglich dieser Basis hat man auf

$\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ die reelle quadratische Form

$$\langle z, w \rangle := \text{Re} \sum_i \bar{z}_i w_i \quad (6.70)$$

und diese ist offenbar positiv definit. Wir benötigen die folgende Ungleichung

$$\langle z, \tilde{L} z \rangle < -\mu/2 \quad \text{für } \|z\| = 1. \quad (6.71)$$

Diese gilt sicher, wenn die Basisvektoren Eigenvektoren von \tilde{L} sind, also der nilpotente Teil in (6.9) verschwindet.

Dann gilt nämlich

$$\langle z, Dz \rangle = \text{Re} \sum_j \lambda_j \bar{z}_j z_j = \sum (\text{Re } \lambda_j) |z_j|^2 < -\mu \|z\|^2.$$

Wählen wir im allgemeinen Fall jetzt δ so, dass $\|N\| < \mu/2$ ist, so finden wir

$$\langle z, \tilde{L}z \rangle = \langle z, Dz \rangle + \langle z, Nz \rangle < -\frac{\mu}{2} \|z\|^2,$$

denn

$$|\langle z, Nz \rangle| \leq \|z\| \|N\| \|z\| < \mu/2 \|z\|^2.$$

Nach dem Mittelwertsatz können wir $X(x)$ folgendermassen schreiben: $X(x) = L(x)x$, mit einer stetig von x abhängigen Matrix $L(x)$, so dass $L(0) = L$ ist. Die Funktion

$$V(z) := \langle z, z \rangle = \sum |z_j|^2 = \sum (x_j^2 + y_j^2) \quad \text{für } z_j = x_j + iy_j$$

ist auch auf \mathbb{R}^n definiert, das \mathbb{R} -linear, aber sehr schief in \mathbb{C}^n liegen mag. Da in den gewählten Koordinaten

$$\text{grad } V = 2(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = 2z$$

ist

$$\langle \text{grad } V(x), X(x) \rangle = 2 \langle x, L(x)x \rangle. \quad (6.72)$$

Wegen (6.71) und der Stetigkeit von $L(x)$ ist auch

$$\langle z, \tilde{L}(x)z \rangle < -\mu/4 \quad \text{für } \|z\| = 1 \quad \text{und } \|x\| < \delta,$$

für ein geeignetes δ . Insbesondere gilt für $x \neq 0$ und $\|x\| < \delta$

$$\left\langle \frac{x}{\|x\|}, L(x) \frac{x}{\|x\|} \right\rangle < -\mu/4$$

und somit nach (6.72)

$$D_x V(x) = 2 \langle x, L(x)x \rangle < -\frac{\mu}{2} \|x\|^2 < 0.$$

Also ist V eine strikte Ljapunovfunktion. \square

