Kapitel II. Materiedominierte Ära

In einer sehr frühen heissen Phase dominierten relativistische Teilchen (Photonen, Leptonen) den Energieinhalt des Universums. Mit zunehmender Abkühlung überwog aber schliesslich die Energiedichte der nichtrelativistischen Materie (Baryonen, massive Neutrinos (?), etc.), für die p/ϱ sehr klein ist. Diese lange Ära wollen wir im folgenden genauer studieren.

1. Dichte des gegenwärtigen Universums

Wir wiederholen zunächst die Grundgleichungen (4.12) und (4.13) für $\Lambda = 0$ [nachträgliche Notiz: das ist nun nicht mehr gerechtfertigt!]

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\varrho \,, \tag{1.1}$$

$$-2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{k}{a^2} = 8\pi G\, p \,. \tag{1.2}$$

Für das derzeitige Universum (Zeit t_0) folgt aus (1.1) und (7.5)

$$\varrho_0 = \frac{3}{8\pi G}\left(H_0^2 + \frac{k}{a_0^2}\right), \tag{1.3}$$

und aus (1.2), sowie (7.6) finden wir

$$p_0 = -\frac{1}{8\pi G}\left[H_0^2(1-2q_0) + \frac{k}{a_0^2}\right]. \tag{1.4}$$

(Grössen zur Zeit t_0 werden mit dem Index "0" versehen.)

Aus (1.3) sehen wir, dass die räumliche Krümmung k/a^2 positiv oder negativ ist, je nachdem ϱ_0 grösser oder kleiner ist als die kritische Dichte:

$$\boxed{\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}} . \qquad (1.5)$$

Mit der Parametrisierung (7.20) ist numerisch

$$\rho_c = 1.88 \times 10^{-29}\ h_0^2\ (g\,cm^{-3})$$
$$= 1.12 \times 10^{-5}\ h_0^2\ (m_p\,cm^{-3}) \qquad (m_p\text{! Protonmasse})$$
$$= 10'540\ h_0^2\ (eV\,cm^{-3}) \qquad (1.6)$$
$$= 2.8 \times 10^{11}\ h_0^2\ M_\odot\ Mpc^{-3} .$$

Nach §I.4 expandiert also das Universum für immer, wenn $\rho_0 \le \rho_c$ ist. Ist hingegen $\rho_0 > \rho_c$, so schliesst sich der gegenwärtigen Expansion eine Kollapsphase an. (Dies ist unabhängig von der Zustandsgleichung (für $\Lambda = 0$).)

Da im derzeitigen Universum die nichtrelativistische Materie dominiert*) (Näheres dazu wird später ausgeführt), dürfen wir in (1.4) den Druck vernachlässigen und bekommen

$$\frac{k}{a_0^2} = (2q_0 - 1)\, H_0^2 . \qquad (1.7)$$

Vergleichen wir dies mit (1.3), so erhalten wir die wichtige Beziehung

$$\boxed{\Omega_0 = 2q_0} \qquad (\text{für } p_0 = 0) , \qquad (1.8)$$

wobei Ω_0 der sog. Dichteparameter ist, der folgendermassen definiert ist

$$\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_c} . \qquad (1.9)$$

*) Wir sehen von exotischen Möglichkeiten (stark entarteter ν-See, etc.) ab.

Für $q_0 > \frac{1}{2}$ ($\varrho_0 > \varrho_c$) ist das Universum positiv gekrümmt, während für $q_0 < \frac{1}{2}$ die Krümmung negativ ist. (Für $\Lambda \neq 0$ gilt die Beziehung (1.8) nicht mehr; siehe §II.6.)

Es ist natürlich ausserordentlich schwierig, ϱ_0 durch direkte Beobachtungen zu bestimmen, weil ein Grossteil der Materie (auch von normalen Spiralgalaxien) dunkel ist. Entsprechend ist der Wert von Ω_0 noch immer sehr unsicher. Wir fassen an dieser Stelle die gegenwärtige Situation kurz zusammen und kommen später ausführlicher auf das Thema zurück (siehe §II.8). [Neuester Stand in Kap. V.]

Zunächst lässt sich relativ zuverlässig die leuchtende Materie in Galaxien bestimmen. Dazu benötigt man zuerst die mittlere Leuchtkraft $\mathcal{L}$ pro Volumeneinheit. Ein recht genauer Wert dafür wurde bereits 1958 von J. Oort ermittelt. Der neueste Wert ist[1]

$$\mathcal{L} \simeq 2 \times 10^8 \, h_0 \, L_\odot \, \mathrm{Mpc}^{-3}. \tag{1.10}$$

Die h_0-Abhängigkeit in (1.10) sieht man folgendermassen ein. Nach (I.7.12) hängt die absolute Helligkeit L eines Objektes mit der scheinbaren Helligkeit l für kleine z gemäss

$$L = 4\pi H_0^{-2} z^2 l \propto h_0^{-2} \tag{1.11}$$

zusammen. Ferner ist die Beziehung zwischen intrinsischer Ausdehnung D und Winkelausdehnung δ nach (I.6.1) und (I.7.19) für kleine z:

---

1) G. Efstathiou, J. Silk: Fund. Cosmic Phys. 9, 1 (1983).
" , R.S. Ellis, B.A. Peterson, MNRAS 232, 421 (1988).

$$D = H_0^{-1} z \delta \propto h_0^{-1}. \qquad (1.12)$$

Nun skaliert $\mathcal{L}$ mit h_0 natürlich wie L/D^3, also linear.

Würde man das mittlere Verhältnis von Masse und Leuchtkraft (M/L) kennen, so könnte man ρ_0 berechnen:

$$\rho_0 = \mathcal{L}\,(M/L) = \frac{\mathcal{L}}{L_\odot}\left(\frac{M/L}{M_\odot/L_\odot}\right) M_\odot. \qquad (1.13)$$

Unter Benutzung von

$$\rho_c = 2.8 \times 10^{11}\, h_0^2\, M_\odot\, \mathrm{Mpc}^{-3} \qquad (1.14)$$

ergibt sich mit (1.10)

$$\Omega_0 = 0.64 \times 10^{-3}\, h_0^{-1}\, (M/L)_{\mathrm{solar}}\ ; \qquad (1.15)$$

oder nach M/L aufgelöst

$$M/L \simeq 1500\, \Omega_0 h_0\, (M_\odot/L_\odot). \qquad (1.15')$$

Für den kritischen Wert $\Omega_0 = 1$ müsste also M/L mindestens etwa $700\, M_\odot/L_\odot$ betragen ($h_0 \gtrsim \frac{1}{2}$!).

Nun kommt alles auf eine Bestimmung von M/L an. Mit dynamischen Methoden (Rotationskurven, Virialtheorem) findet man für den sichtbaren Teil der Galaxien[1]

$$(M/L)_{\mathrm{vis}} \simeq 28\, h_0\, \frac{M_\odot}{L_\odot}. \qquad (1.16)$$

Die Skalierung mit h_0 ist einfach einzusehen: $M \sim V^2 D/G$ (V: charakteristische interne Geschwindigkeit), also geht M nach (1.12) mit h_0^{-1}; folglich ist mit (1.11) $M/L \propto h_0$.

Setzen wir (1.16) in (1.15) ein, so ergibt sich für den sichtbaren Teil der Materie in Galaxien

$$\Omega_0(\text{sichtbar}) \lesssim 0.01 , \qquad (1.17)$$

unabhängig von h_0. Dieser Wert ist weit unterkritisch.

In den letzten Jahren haben Beobachtungen gezeigt[2], dass Galaxien ausgedehnte dunkle Halos haben, in welchen wesentlich mehr Masse steckt als im sichtbaren Bereich. Für Paare von Galaxien ist $(M/L)_{solar} \simeq 50\, h_0$ und für reiche Haufen findet man im Mittel $(M/L)_{solar} \simeq 650\, h_0$ (vgl. Fig. 1). Wenn diese Werte typisch für Spiralgalaxien, bzw.

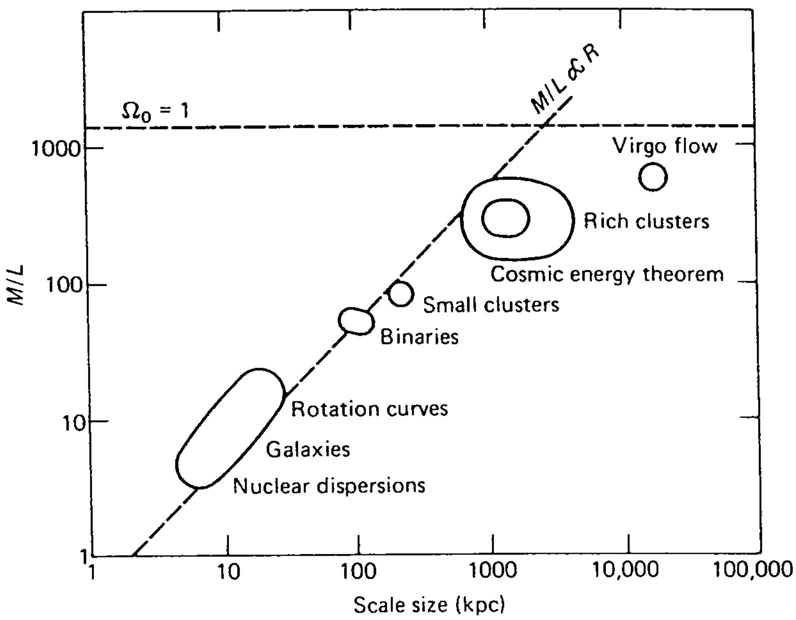


FIGURE II.1.
Typical measured mass-to-light ratios M/L as a function of measuring scale, assuming $H_0 = 100$. Apart from values measured in their nuclei, the M/L values for galaxies are dominated by the unseen heavy halo. The sloping broken line corresponds to M/L increasing with R. The horizontal broken line is the M/L ratio required for an Einstein–de Sitter universe ($\Lambda = 0$, $\Omega_0 = 1$). (From
M. Davis, et al, Ap. J. 238, L113 (1980).)

---

2) Siehe den lesenswerten Artikel von V.C. Rubin in: Kosmologie, Spektrum der Wissenschaft (1984). Neuere Daten werden in Kap. 5 gezeigt.

für elliptische Galaxien sind[3], so finden wir[4]

$$\Omega_0(\text{gebundene Paare und Kluster}) \simeq 0.14 \,. \qquad (1.18)$$

Der geschätzte Fehler[4] ist ein Faktor $\simeq 1.5$. Auf alle Fälle ist dieser Anteil unterkritisch. Aber der Vergleich von (1.17) und (1.18) zeigt, dass es sehr viel "verborgene Masse" gibt.

Eine weitere Möglichkeit Ω_0 zu bestimmen, besteht im Studium der Abweichungen von der mittleren Hubble-Expansion durch lokale Verdichtungen. Dies wurde auf den Virgo-Kluster mit seinem ausgedehnten Halo angewandt. A. Sandage[4] gibt den Wert

$$\Omega_0(\text{Virgo Einfall}) = 0.08^{+0.07}_{-0.04} \,. \qquad (1.19)$$

Die beiden Werte (1.18) und (1.19) sind miteinander verträglich und dies legt es nahe, dass dieselbe überwiegend dunkle Materie, welche Paare und Kluster von Galaxien bindet, auch den Einfall gegen den Virgo-Haufen verursacht. Möglicherweise gibt es keine andere dunkle Materie.

Wir werden später in Kap. IV aus dem Vergleich der theoretisch berechneten Big Bang Nukleosynthese der leichten Elemente mit den Beobachtungen einen Wert für den baryonischen Anteil von Ω_0 gewinnen. Die beste

---

3) Spiralgalaxien sind in reichen Haufen wenig anzutreffen, kommen aber häufig in Paaren vor. Elliptische Galaxien sind andererseits vorallem in Klustern zu finden.

4) Dieser Wert wird von A. Sandage in [K4] angegeben.

Schätzung zur Zeit ist (siehe §IV.4):

$$\Omega_0(\text{Baryon}) = (0.10 \pm 0.06)\left(\frac{H_0}{50}\right)^{-2}. \qquad (1.20)$$

Auch dieser Wert ist mit den übrigen Bestimmungen verträglich und es gibt folglich bislang keine überzeugenden empirischen Gründe für exotische Formen von dunkler Materie (massive Neutrinos, etc.). Gleichzeitig sind alle angegebenen Werte für Ω_0 unterkritisch und folglich müsste das Universum für immer expandieren.

In Anbetracht der vielen Unsicherheiten ist jedoch das letzte Wort zu diesem Thema noch lange nicht gesagt. Es ist aber jedenfalls sehr bemerkenswert, dass Ω_0 nicht allzuweit von $\Omega_0 = 1$ entfernt ist. Dies ist umso erstaunlicher, weil $\Omega_0 = 1$, wie wir sehen werden, ein <u>unstabiler</u> Fixpunkt ist. Andererseits wird $\Omega_0 = 1$ durch das Modell des inflationären Universums vorausgesagt (siehe Kap. VIII).

*   *   *

2. Zeitlicher Verlauf des Skalenfaktors

Für $p=0$ ist nach (I.4.16)

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3}. \qquad (2.1)$$

Setzen wir dies in die Friedmann-Gleichung (1.1) ein, so kommt

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{a}{a_0}\right)\right]^2-\frac{8\pi G}{3}\rho_0\frac{a_0}{a}=-\frac{k}{a_0^2}. \qquad (2.2)$$

Anstelle von t führen wir die dimensionslose Zeit $\tau=tH_0$ ein (t in Hubble-Zeiten); ferner sei $x(\tau)=a(t)/a_0$. Beachten wir noch (1.7), so erhalten wir aus (2.2)

$$\boxed{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2-\Omega_0\frac{1}{x}=1-\Omega_0.} \qquad (2.3)$$

Diese Gleichung können wir – im Sinne einer mechanischen Interpretation – als eindimensionale Bewegung eines Teilchens auffassen. Aus der Form des "Potentials" $-\Omega_0\frac{1}{x}$ geht wieder klar hervor, dass das Verhalten von $x(\tau)$ für $\Omega_0>1$ und $\Omega_0<1$ sehr verschieden ist (Skizziere das Phasenporträt).

Aus (2.3) folgt

$$t=H_0^{-1}\int_0^{a/a_0}\left[1-\Omega_0+\frac{\Omega_0}{x}\right]^{-1/2}dx. \qquad (2.4)$$

Die Lösungen von (2.3) stellt man am besten in parametrischer Form dar:

$$a(\eta) = \begin{cases} \dfrac{\Omega_0}{2H_0(\Omega_0-1)^{3/2}}\,(1-\cos\eta)\,, & k=1 \quad (\Omega_0>1) \\ \dfrac{1}{4} H_0^2 a_0^3 \eta^2 \,, & k=0 \quad (\Omega_0=1) \\ \dfrac{\Omega_0}{2H_0(1-\Omega_0)^{3/2}}\,(\cosh\eta-1)\,, & k=-1 \quad (\Omega_0<1) \end{cases} \tag{2.5a}$$

$$t(\eta) = \begin{cases} \dfrac{\Omega_0}{2H_0(\Omega_0-1)^{3/2}}\,(\eta-\sin\eta)\,, & k=1 \\ \dfrac{1}{12} H_0^2 a_0^3 \eta^3 \,, & k=0 \\ \dfrac{\Omega_0}{2H_0(1-\Omega_0)^{3/2}}\,(\sinh\eta-\eta)\,, & k=-1\,. \end{cases} \tag{2.5b}$$

Offensichtlich gilt $dt/d\eta = a(\eta)$; deshalb hat in der η-Zeit die Friedmann-Metrik (I.2.4) die Form

$$g = a^2(\eta)\,[d\eta^2 - h]\,. \tag{2.6}$$

Man nennt deshalb η auch die konforme Zeit.

<u>Übung:</u> Leite (2.5) in systematischer Weise her. Zeige, dass man für $k=+1$ eine Zykloide hat.

Für das <u>Einstein-de Sitter-Modell</u> ($k=0$) gibt (2.5)

$$a(t)/a_0 = \left(\tfrac{3}{2} H_0 t\right)^{2/3}. \tag{2.7}$$

In diesem Fall ist das Alter des Universums

$$t_0 = \frac{2}{3} H_0^{-1}. \tag{2.8}$$

Für $k=+1$ findet man aus (2.5) leicht

$$t_0 = \frac{\Omega_0}{2H_0(\Omega_0-1)^{3/2}}\left[\cos^{-1}\left(\frac{2}{\Omega_0}-1\right) - \frac{2}{\Omega_0}(\Omega_0-1)^{1/2}\right], \quad (k=1) \tag{2.9}$$

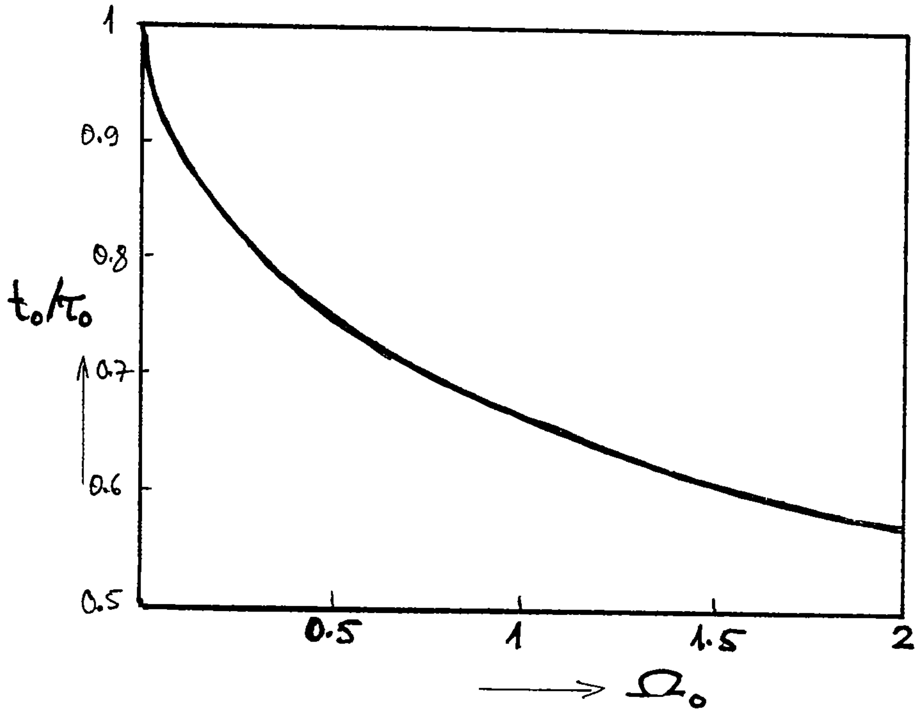
und entsprechend für $k=-1$:

$$t_0 = \frac{1}{H_0}\left[\frac{1}{1-\Omega_0} - \frac{\Omega_0}{2(1-\Omega_0)^{3/2}}\cosh^{-1}\left(\frac{2}{\Omega_0}-1\right)\right], \quad (k=-1) \tag{2.10}$$

Die folgende Tabelle 1 gibt t_0 in Einheiten der Hubble-Zeit $\tau_0 = 1/H_0$ als Funktion von Ω_0.

Ω_0	t_0/τ_0	$\Omega_0 (t_0/\tau_0)^2$
0	1	
0.01	0.980	
0.03	0.955	
0.1	0.896	
0.2	0.847	
0.3	0.809	
0.4	0.783	
0.5	0.755	
0.75	0.688	
1	0.667	0.44
1.5	0.613	0.56
2	0.570	0.65
3	0.499	0.75
4	0.471	0.88
5	0.440	0.97
10	0.314	0.99

Tabelle II.1. Alter des Universums in Einheiten der Hubble-Zeit ($\Lambda=0$)



Graph zu Tabelle 1

Da das Universum nach spätestens 10^6 Jahren materiedominiert ist (siehe § III.2), werden die Werte der Tabelle 1 durch eine realistischere Behandlung der frühen Phasen nur unwesentlich geändert.

Emissionszeit t und Rotverschiebung z einer Quelle hängen nach (2.4) folgendermassen zusammen:

$$t = H_0^{-1} \int_0^{(1+z)^{-1}} \left[1-\Omega_0+\Omega_0/x\right]^{-1/2} dx. \qquad (2.11)$$

Die Rückblickzeit $t_0 - t$ ist für $\Omega_0 = 1$

$$t_0 - t = \frac{2}{3} H_0^{-1}\left(1-\frac{1}{(1+z)^{3/2}}\right). \qquad (2.12)$$

Für andere Werte von $\Omega_0 = 2q_0$ ist diese Zeit in Fig. 2 dargestellt.

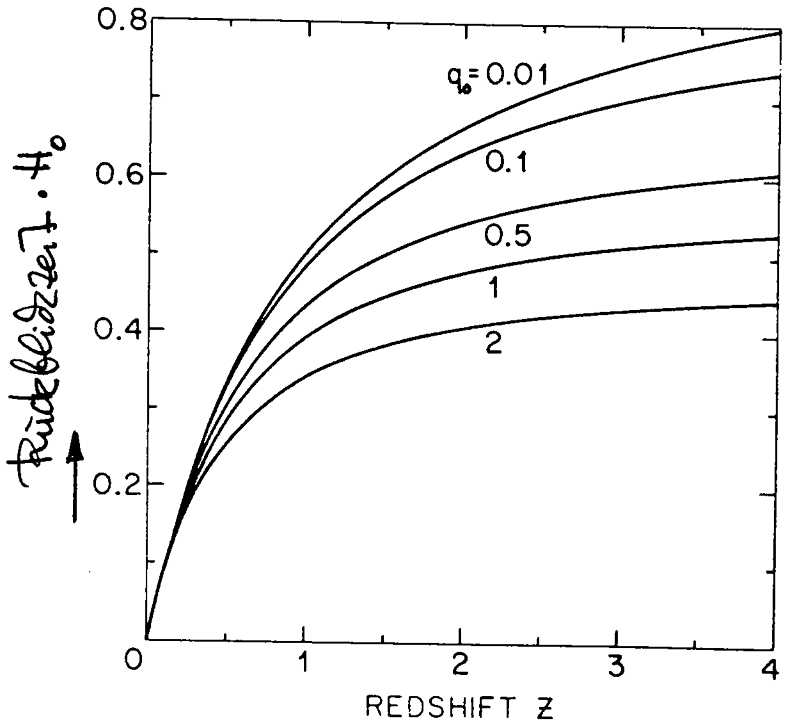


Fig. II.2. Rückblickzeit als Funktion der Rotverschiebung in Einheiten der Hubble-Zeit

---

Übungsaufgabe: Behandle ein materiedominiertes Universum mit $k=1$. Zeige, dass die maximale Ausdehnung und die Dauer einer Periode dieses Modells proportional zur Gesamtmasse anwachsen. Vergleiche a_{max} mit dem Schwarzschild-Radius

---

3. Helligkeitsdistanz und scheinbare Winkelausdehnung als Funktion der Rotverschiebung

Wir bestimmen zunächst die Beziehung zwischen d_L und z. Mit denselben Bezeichnungen wie in §I.7 haben wir nach (I.7.1), (I.7.2) und (2.3)

$$\int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{a_1}^{a_0} \frac{da}{a\dot{a}} = \frac{1}{a_0 H_0} \int_{a_1/a_0}^{1} \frac{dx}{x\,(dx/d\tau)}$$

$$= \frac{1}{a_0 H_0} \int_{(1+z)^{-1}}^{1} \frac{dx}{x\sqrt{1-\Omega_0+\Omega_0/x}}\,. \qquad (3.1)$$

Aus dieser Gleichung erhält man, unter Benutzung von (1.7), in allen Fällen (Übung)

$$\boxed{r_1 = \frac{zq_0 + (q_0-1)\left(-1+\sqrt{2q_0 z+1}\right)}{H_0 a_0 q_0^2 (1+z)}}\,. \qquad (3.2)$$

Nach (I.7.3) ist deshalb

$$\boxed{d_L = \frac{1}{H_0 q_0^2}\left[zq_0 + (q_0-1)\left(-1+\sqrt{2q_0 z+1}\right)\right]}\,. \qquad (3.3)$$

Die Winkelausdehnung δ eines Objektes der intrinsischen Ausdehnung D ist nach (I.6.12)

$$\delta = \frac{D}{r_1\, a(t_1)} . \tag{3.4}$$

Setzen wir hier (3.2) ein, so folgt

$$\boxed{\delta = D\, \frac{q_0^2 H_0 (1+z)^2}{z q_0 + (q_0-1)\left(-1+\sqrt{2q_0 z+1}\right)}} . \tag{3.5}$$

Für kleine z erhalten wir aus (3.3) wieder die modellunabhängige Formel (I.7.11). Der Beginn der Entwicklung von (3.5) ist

$$\delta = \frac{D H_0}{z}\left[1 + \tfrac{1}{2}(1-q_0)z + \dots\right] \quad (z \ll 1). \tag{3.6}$$

Später benötigen wir auch δ für sehr grosse z:

$$\delta = D H_0 q_0 z + \cdots \quad (z \gg 1). \tag{3.7}$$

Das Ergebnis (3.5) ist in Fig. 3 dargestellt.

E3.1

Wir schreiben noch (3.3) auf bolometrische Magnitudine um. Nach (7.17) gilt für den Entfernungsmodul

$$m_{bol} - M_{bol} = 25 + 5 \log_{10}\left[d_L(\mathrm{Mpc})\right] ;$$

also

$$m_{bol} - M_{bol} = 25 + 5\log_{10}\left[\frac{c\,(\mathrm{km/s})}{H_0(\mathrm{km/s/Mpc})}\right] + 5\log_{10}\left\{\frac{1}{q_0^2}\left[z q_0 + (q_0-1)\left(-1+\sqrt{2q_0 z+1}\right)\right]\right\} \tag{3.8}$$

oder

$$m_{bol} - M_{bol} = -45.06 - 5\log_{10}\left[H_0(s^{-1})\right] + 5\log_{10}\left\{\frac{1}{q_0^2}\left[z q_0 + (q_0-1)\left(-1+\sqrt{2q_0 z+1}\right)\right]\right\} \tag{3.8'}$$

Dies ergänzt (I.7.18) (Mattig, 1958).

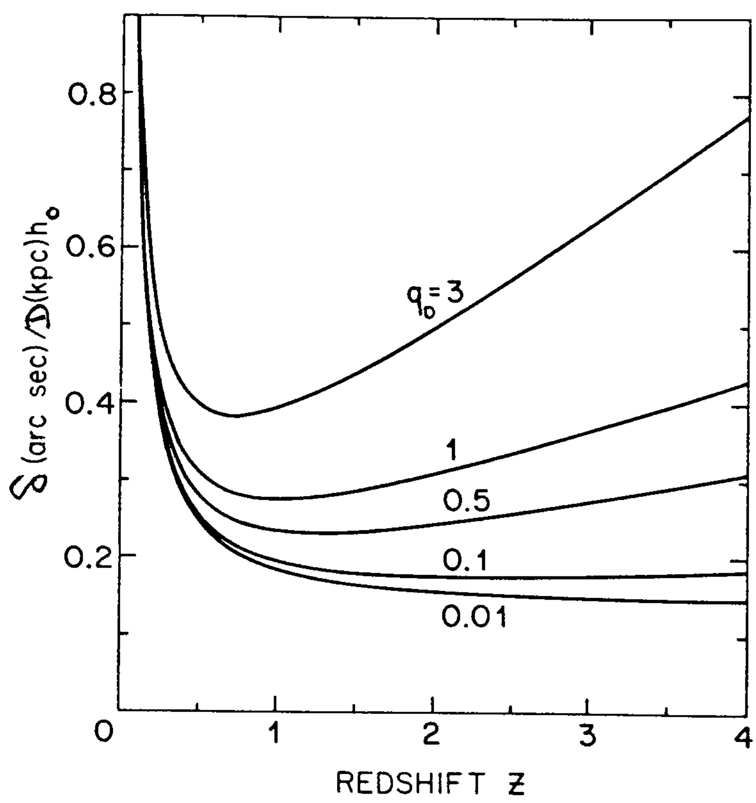


Fig. II.3. Winkelausdehnung in Friedmann-Modellen nach (3.5)

Durch h_0 ausgedrückt lautet (3.8)

$$\boxed{m_{bol} - M_{bol} = 42.38 - 5\log_{10} h_0 + 5\log_{10}\left\{\frac{1}{q_0^2}\left[z q_0 + (q_0-1)\left(-1+\sqrt{2q_0 z+1}\right)\right]\right\}} \qquad (3.9)$$

Für den Vergleich von (3.9) mit den Beobachtungen, muss berücksichtigt werden, dass Teleskope und Detektionssysteme in der Praxis nur auf einen relativ engen Spektralbereich empfindlich sind. Der Effekt der Rotverschiebung führt dann zu einer Korrektur, welche wir nun bestimmen wollen.

Es sei $P(\nu)d\nu$ die abgestrahlte Energie einer Quelle pro Sekunde und Raumwinkel im Frequenzintervall $(\nu, \nu+d\nu)$. Ist $S(\nu_0)\,d\nu_0$, $\nu_0 = (1+z)^{-1}\nu$, der zugehörige Strahlungsfluss auf der Erde, so gilt nach der Definition der Helligkeitsdistanz (I.6.3) (von Absorption sehen wir vorerst ab):

$$S(\nu_0)\,d\nu_0 = \frac{P(\nu)\,d\nu}{d_L^2}\,,$$

also

$$\boxed{S(\nu_0) = \frac{P(\nu_0(1+z))}{d_L^2}(1+z) \overset{(I.7.3)}{=} \frac{P(\nu_0(1+z))\,a(t_1)}{r^2(t_1)\,a_0^3}\,.} \qquad (3.10)$$

Es bezeichne $\Phi(\nu)$ die Empfindlichkeitsfunktion von Teleskop und Detektionssystem*); dann ist die Anzeige

$$S_\Phi = \int S(\nu_0)\Phi(\nu_0)\,d\nu_0 = \frac{1+z}{d_L^2}\int P(\nu_0(1+z))\Phi(\nu_0)\,d\nu_0\,. \qquad (3.11)$$

Die Magnitudines m_Φ, M_Φ zum "Filter" Φ sind wieder wie in (I.7.15) und (I.7.16) definiert. In diesen ausgedrückt lautet (3.11)

$$m_\Phi - M_\Phi = 25 + 5\log\left[\frac{d_L(z)}{1\ \mathrm{Mpc}}\right] + K_\Phi(z). \qquad (3.12)$$

Gegenüber (I.7.17) kommt hier noch die sog. <u>K-Korrektur</u>

$$K_\Phi = -\frac{5}{2}\log\left\{(1+z)\frac{\int P[\nu_0(1+z)]\Phi(\nu_0)d\nu_0}{\int P(\nu_0)\Phi(\nu_0)\,d\nu_0}\right\} \qquad (3.13)$$

hinzu. Mit Hilfe von (optischen und ultraviolett) Beobachtungen von benachbarten Galaxien wurde diese Korrektur für verschiedene Galaxientypen für die gebräuchlichen photometrischen Bänder (z.B. das UBV-System(+)) berechnet.

---

*) Im allgemeinen tragen auch die Erdatmosphäre und die interstellare Extinktion zu $\Phi(\nu)$ bei.

(+) Konsultiere dazu ein Astronomiebuch.

An Stelle von (3.9) haben wir jetzt

$$m_\phi - M_\phi = 42.38 - 5\log_{10} h_0 + 5\log_{10}\left\{\frac{1}{q_0^2}\left[zq_0+(q_0-1)\left(-1+\sqrt{2q_0z+1}\right)\right]\right\} + K_\phi(z)\,. \tag{3.14}$$

In Fig. 4 ist die q_0-Abhängigkeit von (3.14) gezeigt. Aufgetragen ist darin

$$K(z) := 42.38 + 5\log_{10}\left\{\frac{(1+z)^{1/2}}{z}\,\frac{1}{q_0^2}\left[zq_0+(q_0-1)\left(-1+\sqrt{2q_0z+1}\right)\right]\right\}. \tag{3.15}$$

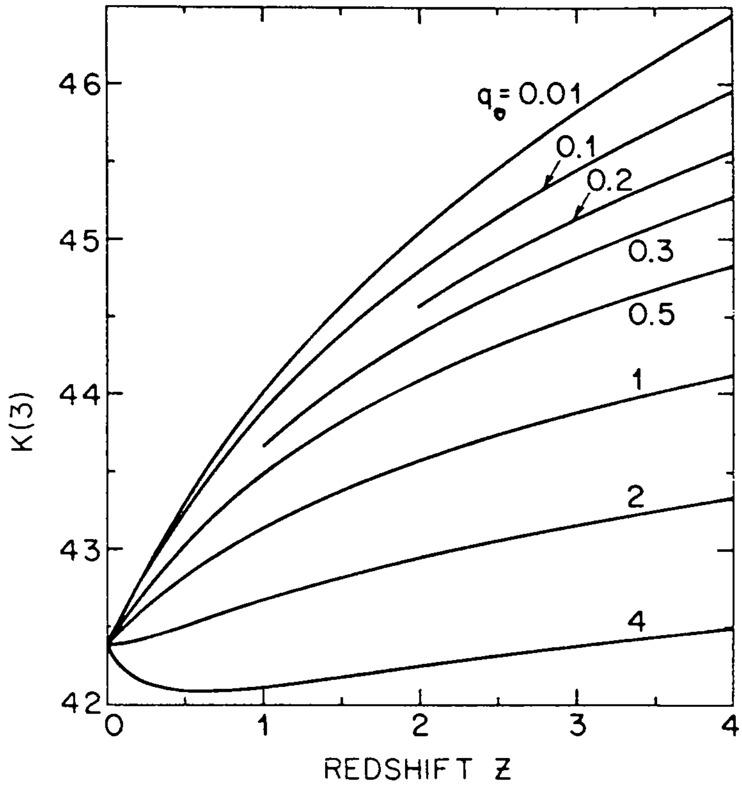
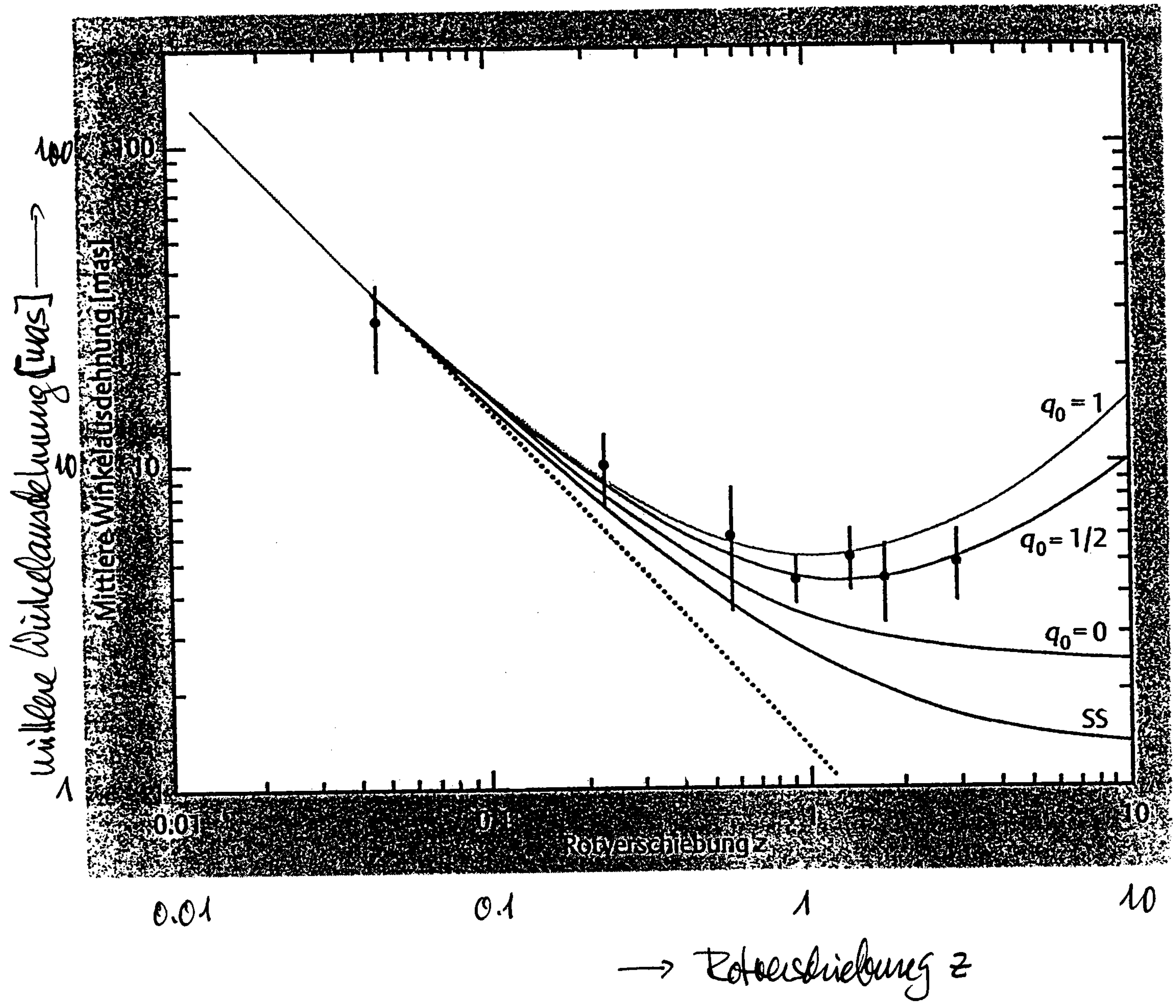


Fig. II.4. Darstellung von K(z), Gl. (3.15)

Auf den Vergleich der m_ϕ-z-Beziehung (3.14) mit den Beobachtungen, werden wir in §II.8 eingehen.

E.3.1 Die Messpunkte im folgenden Diagramm geben Gruppen-mittelwerte der Winkeldurchmesser kompakter Radioquellen wieder, die sich um den jeweiligen z-Wert gruppieren (Kellerman, Nature <u>361</u>, 134 (1993)).



4. Zählung von Quellen (Teil 2)

Auch die Zählungen $N(<z)$, $N(>l)$ der Quellen kann man jetzt für beliebige z ausrechnen.

Ausgangspunkt ist die Gl. (I.8.7). In dieser benutzen wir (3.2) für $r(t_1)$ und wälzen mit Hilfe von (2.11), d.h.

$$dt_1 = -\frac{1}{H_0}\frac{1}{(1+z)^2}\frac{1}{\sqrt{1+2q_0 z}}\,dz \quad , \qquad (4.1)$$

die t_1-Integration auf eine z-Integration ab. Es kommt

$$N(<z) = \int_0^\infty dL \int_0^z dz' \; 4\pi \frac{a_0^2}{(1+z')^2}\,\frac{\left[z' q_0 + (q_0-1)(-1+\sqrt{2q_0 z'+1})\right]^2}{H_0^2\, a_0^2\, q_0^4\,(1+z')^2}$$

$$\cdot\; n(z',L)\,\frac{1}{H_0 (1+z')^2 (1+2q_0 z')^{1/2}} \; ,$$

oder

$$\boxed{N(<z) = \int_0^\infty dL \int_0^z dz' \; 4\pi H_0^{-3} q_0^{-4} (1+z')^{-6} (1+2q_0 z')^{-1/2} \cdot \left[z' q_0 + (q_0-1)(-1+\sqrt{2q_0 z'+1})\right]^2 n(z',L).} \qquad (4.2)$$

E.4.1

Übungsaufgabe: Werte dies für $q_0 = 1/2$ – unter Vernachlässigung von evolutiven Effekten – aus.

Wir bestimmen nun auch noch $N(>S,\nu)$ (siehe S. 45).

Benutzen wir die Beziehung (3.10) zwischen $S(\nu)$ und $P(\nu)$, so erhalten wir genauso wie bei der Herleitung von (I.8.7) für die Zahl der Quellen mit Strahlungsfluss

$>S$ bei der Frequenz ν und Rotverschiebung $<z$

$$N(<z,>S;\nu) = \int_0^\infty dP \int_{\max\{t_z, t_S(P)\}}^{t_0} 4\pi r^2(t_1)\, a^2(t_1)\, n\left(t_1, P, \nu \frac{a(t_0)}{a(t_1)}\right) dt_1 \tag{4.3}$$

mit

$$a(t_z) = \frac{a(t_0)}{1+z}, \tag{4.4}$$

und mit $t_S(P)$ bestimmt durch (beachte (3.10))

$$\frac{r^2(t_S)}{a(t_S)} = \frac{P}{S\, a^3(t_0)}. \tag{4.5}$$

Radiospektren können i.a. durch ein Potenzgesetz

$$P(\nu) \propto \nu^{-\alpha}, \tag{4.6}$$

mit Spektralindex $\alpha \simeq 0.7 \div 0.8$, dargestellt werden. Dann gilt für die Dichte $n(t,P,\nu)$ der Quellen:

$$n(t,P,\nu)\, dP = n\left(t, P\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^\alpha, \nu_0\right) d\left(P\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^\alpha\right),$$

wobei ν_0 eine feste Referenzfrequenz ist. Für n gilt also das Skalengesetz

$$n(t,P,\nu) = \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^\alpha n\left(t, P\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^\alpha, \nu_0\right). \tag{4.7}$$

Ändern wir die Integrationsvariable P in (4.3) zu $P[a(t_0)/a(t_1)]^\alpha$, so erscheint auf beiden Seiten die gleiche Frequenz ν:

$$N(<z,>S;\nu) = \int_0^\infty dP \int_{\max\{t_z, t_{S_\alpha}(P)\}}^{t_0} 4\pi r^2(t_1)\, a^2(t_1)\, n(t_1, P, \nu)\, dt_1, \tag{4.8}$$

wo jetzt $t_{S_\alpha}(P)$ definiert ist durch

$$r^2(t_{S\alpha})\left(\frac{a(t_{S\alpha})}{a(t_0)}\right)^{-1-\alpha} = \frac{P}{S\,a_0^2}\,. \qquad (4.9)$$

Mit denselben Umformungen, welche zu (4.2) führten, erhalten wir jetzt speziell

$$N(>S,\nu) = \int_0^\infty dP \int_0^{z_{S\alpha}(P)} dz\; 4\pi H_0^{-3} q_0^{-4}(1+z)^{-6}(1+2q_0 z)^{-1/2} \cdot \left[z q_0 + (q_0-1)(-1+\sqrt{2q_0 z+1})\right]^2 n(z,P,\nu). \qquad (4.10)$$

Dabei ist $z_{S\alpha}(P)$ die Rotverschiebung zu $t_{S\alpha}(P)$, also nach (4.9) und (3.2) die Lösung der Gleichung

$$(1+z)^{\frac{\alpha-1}{2}} \frac{z q_0 + (q_0-1)(-1+\sqrt{2q_0 z+1})}{q_0^2} = H_0\left(\frac{P}{S}\right)^{1/2}. \qquad (4.11)$$

Übungsaufgabe: Vernachlässige evolutive Effekte und werte die Gleichung für ein Einstein–de Sitter Modell ($q_0 = \frac{1}{2}$) weiter aus. Bringe das Ergebnis in die Form

$$N(>S,\nu) = \frac{4\pi}{3}\int_0^\infty \left(\frac{P}{S}\right)^{3/2} n_0(P,\nu)\, f\!\left(\frac{P}{S}\right) dP\,. \qquad (4.12)$$

Darin ist

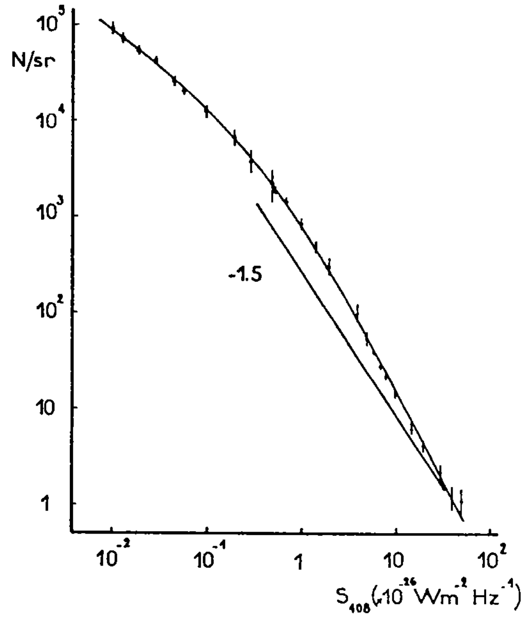
$$f\!\left(\frac{P}{S}\right) = y^{-3(1+\alpha)}\,,$$

wobei y die Lösung von

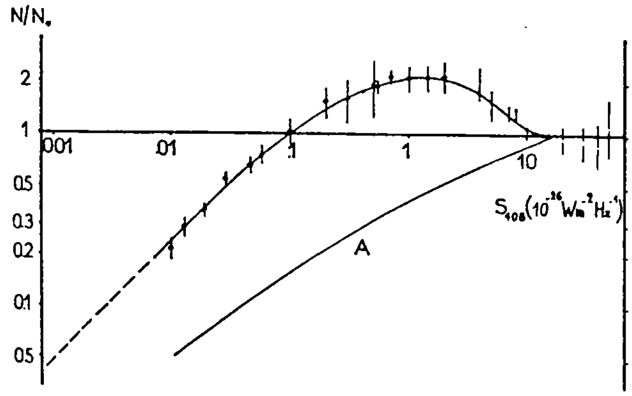
$$y^\alpha(y-1) = \frac{1}{2} H_0\left(\frac{P}{S}\right)^{1/2} \qquad (4.13)$$

ist. Diskutiere qualitativ die S-Abhängigkeit.

$\boxed{\text{E.4.2}}$ Die folgende Figur 5 (nur noch historisch interessant) zeigt die Messungen (siehe M. Ryle, Ann. Rev. Astron. & Ap., 6, 249 (1968)) und in (b) einen Vergleich mit dem Einstein-de Sitter-Modell ohne Evolution. Daraus geht eindeutig hervor, dass evolutive Effekte wichtig sind. Deshalb kann man aus den Zählungen von Quellen keine Information über H_0 und q_0 erhalten.



(a) The counts of radio sources at 408 MHz (from Ref. 132). The straight line represents the Euclidean counts $N \propto S^{-1.5}$.



(b) The counts of radio sources expressed at N/N_0 where N_0 is the predicted number of sources according to the Euclidean counts, $N_0 \propto S^{-1.5}$ (Ref. 132). The solid line (A) shows the predicted variation of N/N_0 for a typical classical world model ($q_0 = \frac{1}{2}, \Lambda = 0$).

Fig II.5

E.4.1 # Quellenzählungen

Aus (4.2) und der m-z-Beziehung (3.9) kann man die Verteilung $N(<m)$ bestimmen. Für kleine m erhält man aus (I.8.16) und (I.7.13)

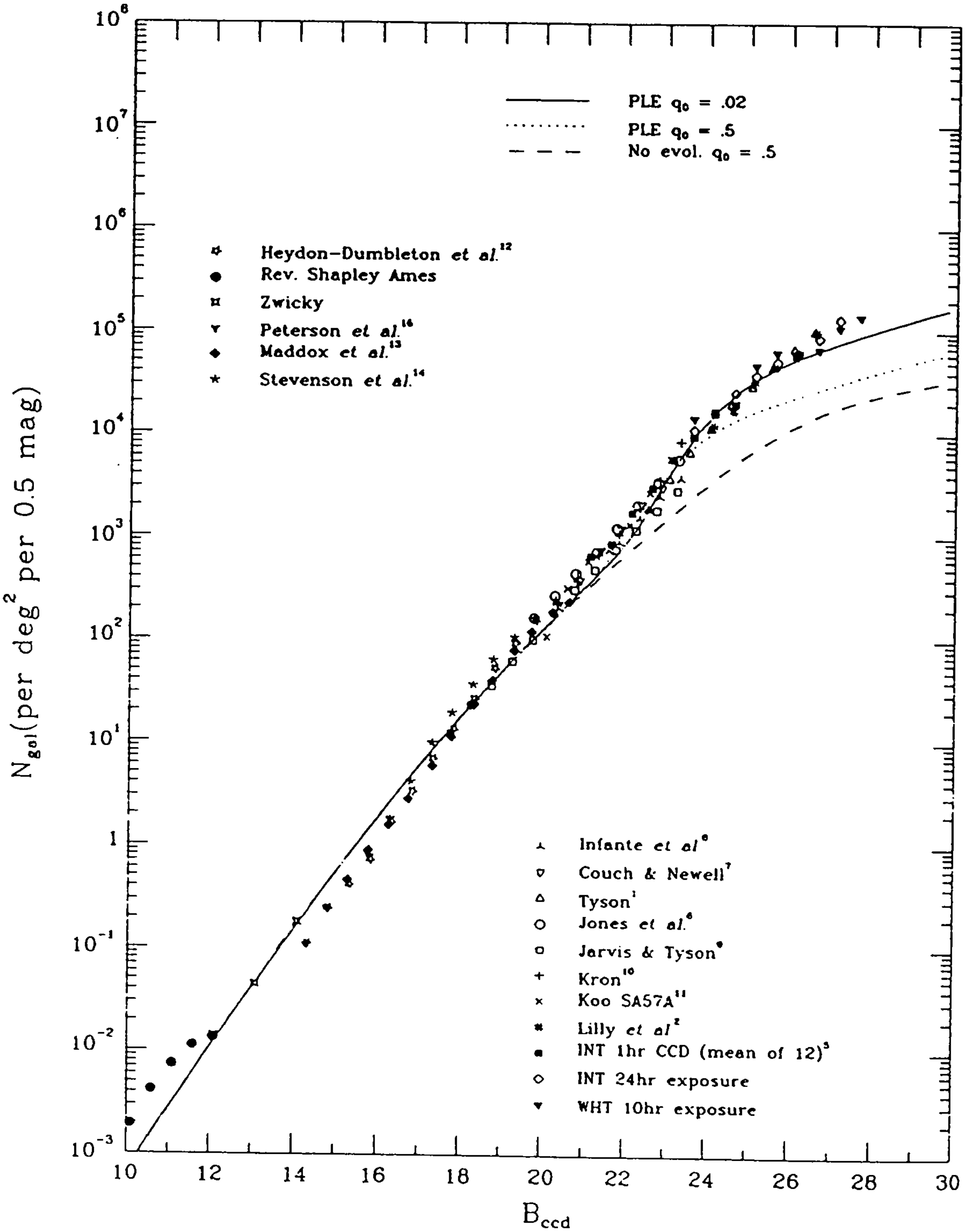
$$N(<m) = \text{const} \int_0^\infty dL \; \frac{4\pi}{3} n(t_0, L) \left(\frac{L}{4\pi}\right)^{3/2} e^{6m/5} + \cdots$$

also

$$\frac{d \ln N}{dm} = 0.6 + \cdots\,. \qquad \text{(E.4.1)}$$

Bereits Hubble versuchte ab 1936 mit Galaxienzählung zwischen verschiedenen Weltmodellen zu unterscheiden. In den letzten Jahren wurde es – vor allem dank CCDs – möglich, Galaxienzählungen bis zur 28. Magnitude im blauen B-Band auszudehnen. Eine Kompilation von relativ neuen Daten ist in der nächsten Figur gezeigt. Die Beobachtungen lassen sich nicht durch unsere Formeln ohne Evolution fitten. Sandage sagte in seinen Saas-Fee Vorlesungen (1993) zu diesen Unternehmungen:

"What has emerged to date in the many papers that survey the problem is that the N(m) count test, so prominent in the early history of the subject, is nearly insensitive to the intrinsic space curvature, but is, nevertheless, very powerful for discovering the evolution, both in density (or new types of galaxies in earlier times) and/or the luminosity evolution in the look-back time. Hence, the N(m) test for the 'world model', dreamt about for so long by the pre-1960 cosmologists, is impotent in the original purpose for which it was devised."



(differential)

Number–counts in the B–band. Various surveys are shown together with models showing the expectations for pure luminosity evolution (PLE) and different values of the cosmological deceleration parameter q_0. Reproduced, with permission, from Metcalfe N., Shanks T., Roche N. & Fong R., *Ann. New York Acad. Sci.*, **688**, 534–538 (1993).

Die zweite Figur zeigt die differentielle Zählung im infraroten K-Band. Der Unterschied zum blauen Band ist frappant. Bei schwachen Magnituden liegt die Zahl der Galaxien unterhalb der Extrapolation von den starken Quellen. Die Evolution in den verschiedenen Farbbereichen ist offensichtlich recht unterschiedlich. Dies beruht vermutlich darauf, dass zumindest eine Unterklasse von Galaxien Perioden von starker Sternbildung durchläuft. (Dies könnte z.B. auf Verschmelzungen (mergers) von Zwerggalaxien beruhen.)

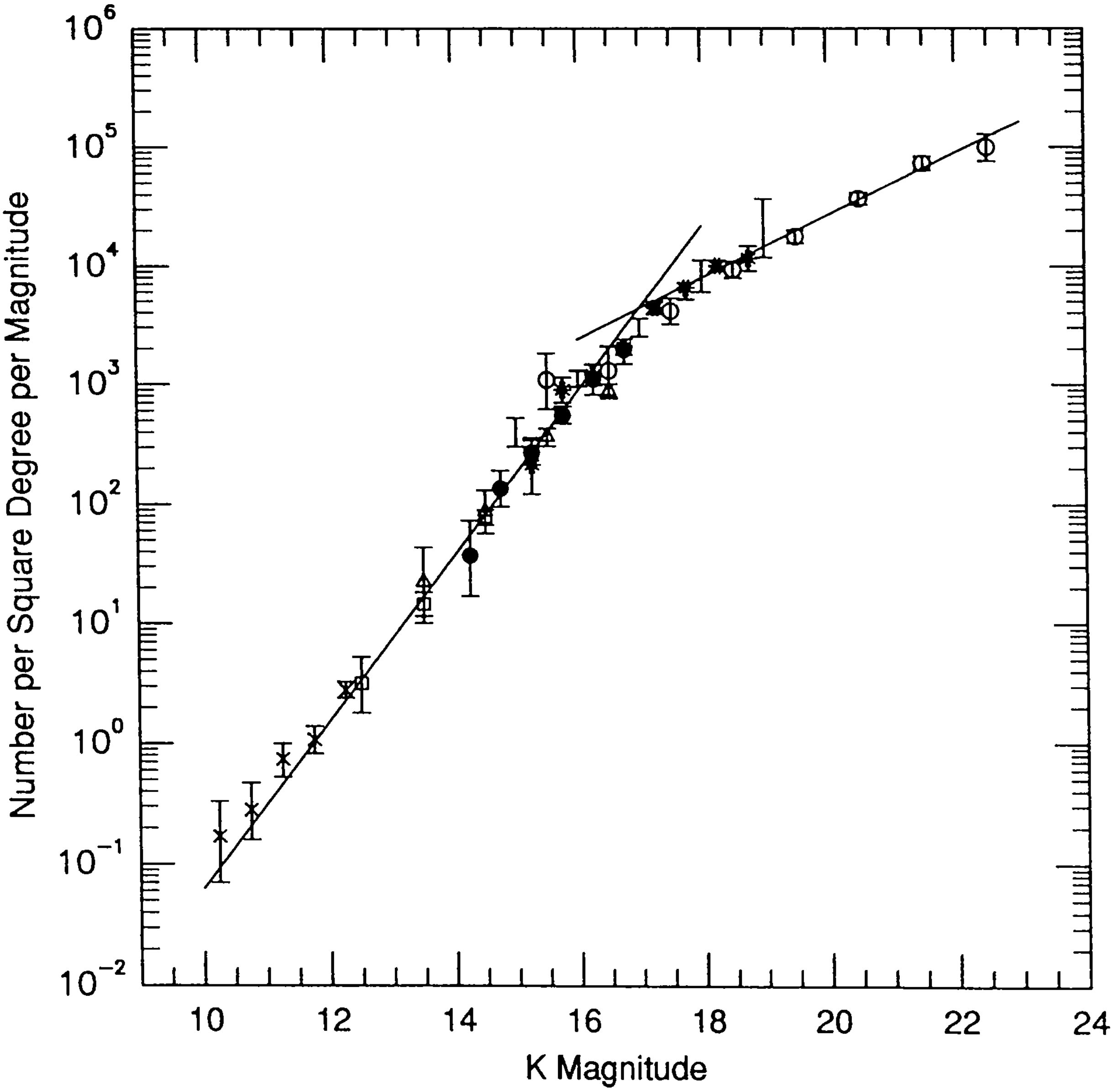


Figure 19.4 Counts of galaxies in the K-band (centred at 2.2 μm). Reproduced, with permission, from Gardner J.P., Cowie L.L., & Wainscoat R.J., *Astrophys. J.*, **425**, L9–L12 (1993).

E.4.2 Wir leiten zunächst einen Ausdruck für die differentielle Version von $N(>S_\alpha,\nu)$ her. Ausgangspunkt ist (4.8) in der Form

$$N(>S,\nu) = \int_0^\infty dP \int_{t_{S_\alpha}(P)}^{t_0} 4\pi r^2(t_1)\, a^2(t_1)\, n(t_1,P,\nu)\, dt_1$$

$$\overset{(4.1)}{=} \int_0^P dP \int_0^{z_{S_\alpha}(P)} dz \,\frac{4\pi D^2(z)}{H_0(1+z)^4}\,\frac{1}{\sqrt{1+2q_0 z}}\, n(z,P,\nu)\,), \qquad (1)$$

wo

$$D := a_0 r(t_1) = \frac{d_L}{1+z}\,. \qquad (2)$$

Dieser Ausdruck hängt von S über die obere z-Integrationsgrenze ab, welche durch (4.11) bestimmt ist. Differentiell erhalten wir deshalb

$$\frac{dN}{|dS|} = \int dP\, \frac{4\pi D^2(z)}{H_0\sqrt{1+2q_0 z}}\;\frac{n(z,P,\nu)}{(1+z)^3}\,\frac{1}{1+z}\,\frac{dz_{S_\alpha}(P)}{|dS|} \qquad (3)$$

Die Gl. (4.9) für $z_{S_\alpha}(P)$ lautet

$$(1+z)^{\frac{\alpha+1}{2}} D(z) = \left(\frac{P}{S}\right)^{1/2} \implies$$

$$\frac{dz}{|dS|} = \frac{D(1+z)}{(\alpha+1)D + 2(1+z)\frac{dD}{dz}}\,\frac{1}{S}\,.$$

Dies setzen wir in (3) ein und ersetzen D mit Hilfe von (4):

$$\frac{dN}{|dS|} = \frac{4\pi}{H_0}\int \frac{P^{3/2}}{S^{5/2}}\;\frac{n(z,P,\nu)}{(1+z)^3}\,\frac{1}{\sqrt{1+2q_0 z}}\;\frac{(1+z)^{-\frac{3}{2}(1+\alpha)}}{(1+\alpha)D + 2(1+z)\frac{dD}{dz}}\, dP. \qquad (6)$$

Da $D = \frac{1}{H_0} z + \cdots$ wird dieser Ausdruck für $z=0$

$$\left.\frac{dN}{|dS|}\right|_{z=0} \equiv \frac{dN_0}{|dS|} = \frac{4\pi}{H_0}\int \frac{P^{3/2}}{S^{5/2}}\, n(0,P,\nu)\,\frac{H_0}{2}\, dP \propto S^{-5/2}. \qquad (7)$$

Das Verhältnis ist also für ein festes P

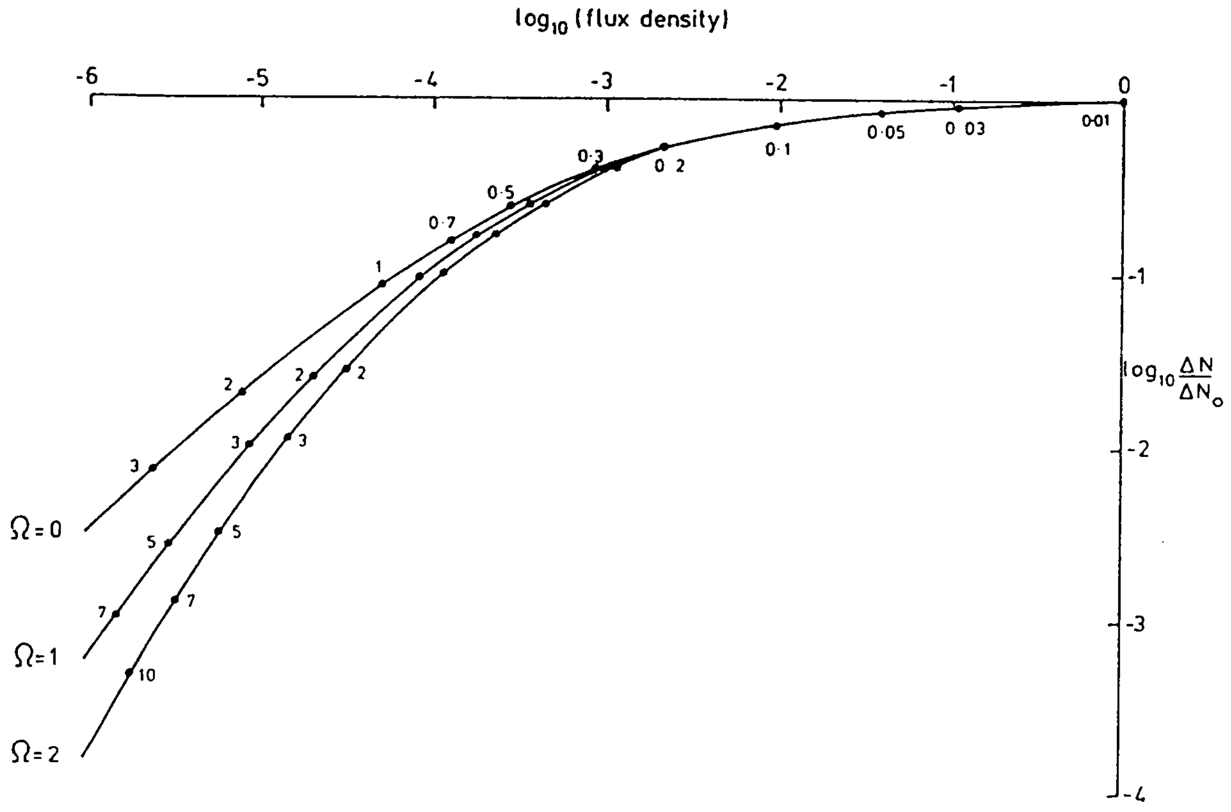
$$\frac{dN}{dN_0} = \frac{1}{H_0}\,\underbrace{\frac{n(z,P,\nu)/(1+z)^3}{n(0,P,\nu)}}_{\text{ohne Evol.}\,=\,1}\,\frac{1}{\sqrt{1+2q_0 z}}\,\frac{2\cdot(1+z)^{-\frac{3}{2}(1+\alpha)}}{(1+\alpha)D + z(1+z)\frac{dD}{dz}}\,. \qquad (8)$$

Dabei ist $z = z_{S_\alpha}(P)$, Gl. (4.11), also nach (4) bestimmt durch

$$d_L(z)\,(1+z)^{\frac{\alpha-1}{2}} = \left(\frac{P}{S}\right)^{1/2}. \qquad (9)$$

Das Resultat (8), ohne Evolution, ist in der nächsten Figur gezeigt. Für $q_0 = \frac{1}{2}$ erhalten wir speziell

$$\frac{dN}{dN_0} = \frac{(1+z)^{-\frac{3}{2}(1+\alpha)}}{(1+\alpha)(1+z)^{1/2} - \alpha}\,. \qquad (10)$$



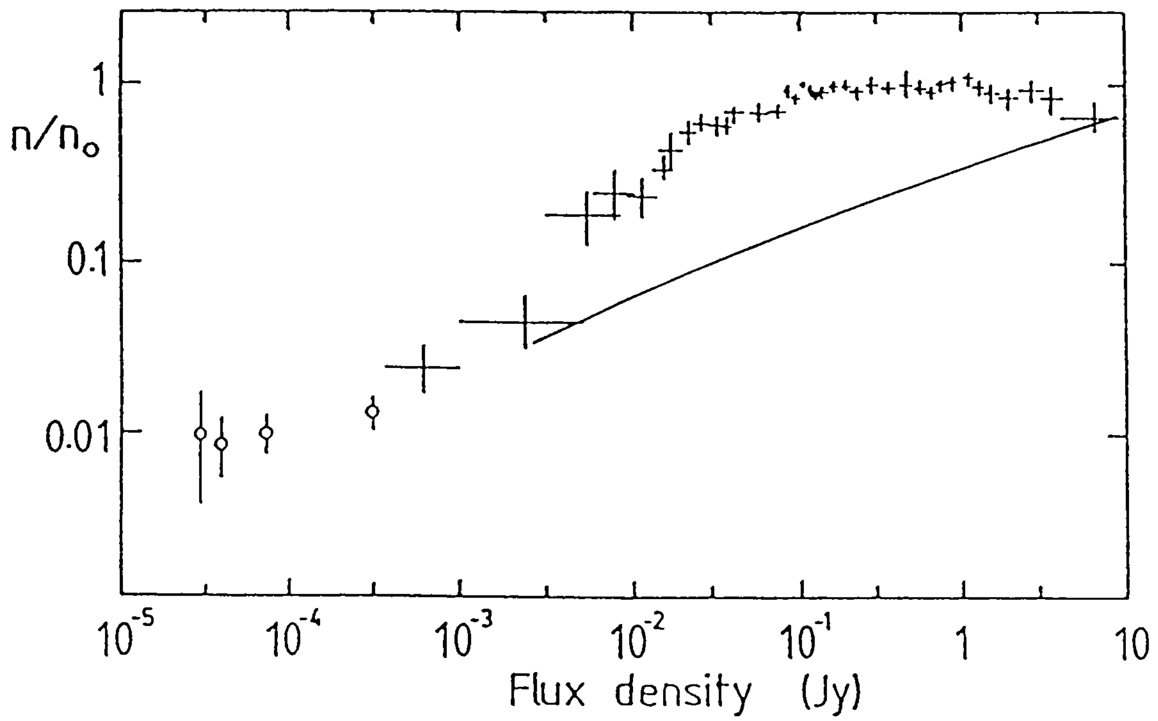
The predicted normalised differential counts of sources for a single luminosity class of source with a power-law spectrum $S \propto \nu^{-0.75}$. The redshifts at which the sources are observed are indicated on each of the curves.

Für die Analyse der Daten muss man den Ausdruck (6) heranziehen. Ohne Evolution wird daraus

$$\frac{dN}{d|S|} = \frac{4\pi}{H_0} S^{-5/2} \int dP\, n(0,P,\nu) \frac{1}{\sqrt{1+2q_0 z}} \frac{(1+z)^{-\frac{3}{2}(1+\alpha)}}{(1+\alpha)D + 2(1+z)\frac{dD}{dz}} \quad (11)$$

Die Verteilung $n(0,P,\nu)$ kann man sich aus Beobachtungen von starken Quellen beschaffen.

Die nächste Figur zeigt das Resultat einer solchen Analyse (Wall 1990). Bei hohen Flussdichten ergibt sich ein Überschuss von schwachen Quellen. Dort gilt ungefähr $N(>S) \propto S^{-1.8}$, d.h. der Abfall ist sogar schwächer als die euklidische Voraussage. Man weiss nun, dass dies auf einer übertüchtigen Population von Radiogalaxien und Quasaren bei $z \sim 1$ beruht (siehe Peacock 1993).



Comparison of the counts of radio sources at 5 GHz with the expectations of uniform world models based upon the radio luminosity function of radio sources determined from complete high flux density samples (After Wall 1990).

5. Horizonte

Wir betrachten einen Beobachter längs der Weltlinie $r=0$. Zu einer gegebenen Zeit kann er nur Signale aus seinem Vergangenheitskegel empfangen. Wird also ein Signal zur Zeit t_1 emittiert, dann kann er es nur empfangen, wenn die radiale Koordinate kleiner ist als r_1, wobei r_1 die radiale (mitbewegte) Koordinate bezeichnet, für die ein dort zur Zeit t_1 abgeschicktes Lichtsignal $r=0$ gerade zur Zeit t erreicht (s. Fig. 6).

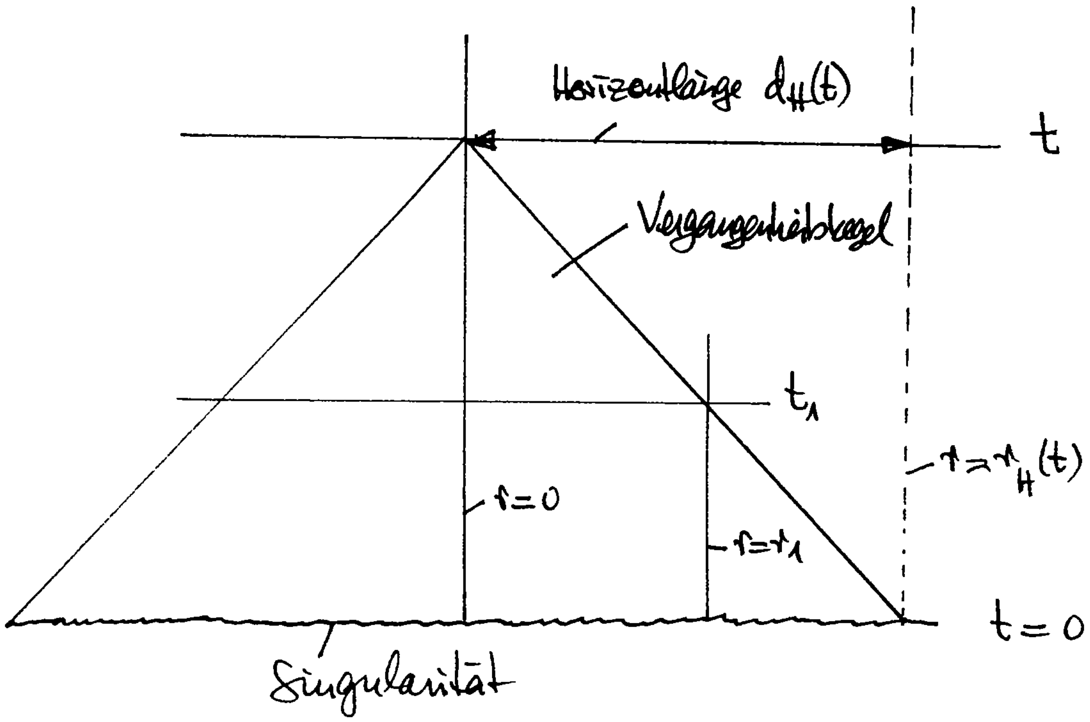


Fig. I.6. Horizontlänge zur Zeit t des Teilchenhorizonts

Nach (I.6.7) ist

$$\int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \int_{t_1}^{t} \frac{dt'}{a(t')} . \qquad (5.1)$$

Falls das t'-Integral für $t_1 \to 0$ konvergiert, so können wir zur Zeit t nur Objekte mit $r < r_H(t)$ "sehen", wobei

$$\int_0^{r_H(t)} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} . \qquad (5.2)$$

Die zugehörige Länge dieses sog. Teilchenhorizonts (Weltlinien-horizonts) zur Zeit t ist, da $g_{rr} = a(t)(1-kr^2)^{-1/2}$,

$$d_H(t) = a(t) \int_0^{r_H(t)} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = a(t) \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} . \qquad (5.3)$$

Wie bei der Umformung in (3.1) erhalten wir

$$d_H(t) = a(t) \int_0^{a(t)} \frac{da}{a\,\dot a} = \frac{a(t)}{a_0 H_0} \int_0^{a(t)/a_0} \frac{dx}{x\,(dx/d\tau)}$$

$$= \frac{a(t)}{a_0 H_0} \int_0^{a(t)/a_0} \frac{dx}{x\,(1-2q_0+2q_0/x)^{1/2}} , \qquad (5.4)$$

oder

$$d_H(t) = \begin{cases} \dfrac{a(t)}{a_0 H_0 \sqrt{2q_0-1}} \cos^{-1}\left[1 - \dfrac{(2q_0-1)\,a(t)}{q_0 a_0}\right] , & k=+1 \\[2ex] \dfrac{2}{H_0} \left(\dfrac{a(t)}{a_0}\right)^{3/2} , & k=0 \\[2ex] \dfrac{a(t)}{a_0 H_0 \sqrt{1-2q_0}} \cosh^{-1}\left[1 - \dfrac{(1-2q_0)\,a(t)}{q_0 a_0}\right] , & k=-1 . \end{cases} \qquad (5.5)$$

Für das Einstein-de Sitter Universum ($q_0 = \frac{1}{2}$) erhalten wir insbesondere $d_H(t_0) = 2/H_0$ (gleich zweimal der Hubble-Radius $1/H_0$). In der Frühzeit der materiedominierten Ära war $a \ll a_0$ und folglich nach (5.4) und (2.5)

$$d_H(t) \simeq H_0^{-1} \left(\frac{q_0}{2}\right)^{-1/2} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{3/2} \simeq 3t . \qquad (5.6)$$

Für $q_0 \leq \frac{1}{2}$ wächst $a(t)$ unbeschränkt an und deshalb wächst $d_H(t)$ nach (5.5) schneller als $a(t)$. Im Laufe der Zeit wird also für $q_0 \leq \frac{1}{2}$ jedes Objekt innerhalb des Teilchenhorizonts zu liegen kommen.

Für $q_0 > \frac{1}{2}$ ist das Universum räumlich endlich mit dem Umfang

$$L(t) = 2\pi a(t). \tag{5.7}$$

Nach (5.5) und (1.7) ist

$$\frac{d_H(t)}{L(t)} = \frac{1}{2\pi} \cos^{-1}\left[1 - \frac{(2q_0-1)\,a(t)}{q_0 a_0}\right]. \tag{5.8}$$

Das maximale $a(t)$ ist nach (2.5) und (1.7)

$$a_{max} = \frac{2q_0}{H_0(2q_0-1)^{3/2}} = \frac{2q_0 a_0}{2q_0-1} \tag{5.9}$$

und der Bruchteil (5.8) wird dort gleich 1/2. Zu diesem Zeitpunkt werden wir also bis zu den "Antipoden" sehen. Im Laufe der Kollapsphase wächst (5.8) monoton und erreicht den Wert 1 bei $a = 0$. (Berechne die jetzigen Werte für (5.7) und (5.8) für $q_0 = 1$ und $h_0 = 1/2$.)

In gewissen kosmologischen Modellen gibt es Ereignisse, die ein Beobachter nie "sehen" kann. Der Rand des über alle Zeiten erfahrbaren Raumzeit Bereiches ist ein sog. Ereignishorizont für den Beobachter.

Ein Ereignis mit $r = r_1$ zur Zeit t_1 wird in $r = 0$ zur Zeit t sichtbar, welche durch (5.1) gegeben ist. Falls das t'–Integral für $t \to t_{max}$ ($t_{max} = \infty$ für $q_0 \leq 1/2$, $\dot{a}(t_{max}) = 0$ für $q_0 > \frac{1}{2}$) divergiert, dann können wir im Prinzip Signale von jedem Ereignis erhalten, wenn wir nur genügend lange warten. Konvergiert aber das Integral, so können wir nur Signale von Ereignissen je erhalten, für die

$$\int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} \leq \int_{t_1}^{t_{max}} \frac{dt'}{a(t')} . \qquad (5.10)$$

Für $q_0 \leq \frac{1}{2}$ wächst $a(t)$ mit $t \to \infty$ wie t ($q_0 < \frac{1}{2}$), bzw. wie $t^{2/3}$ ($q_0 = \frac{1}{2}$). Deshalb divergiert die t'–Integration bei $t = \infty$ und es gibt <u>keinen Ereignishorizont für $q_0 \leq \frac{1}{2}$</u>.

Für $q_0 > \frac{1}{2}$ konvergiert hingegen die t'–Integration für $t = t_{max}$. Ereignisse zur Zeit t_1 sind für $t \leq t_{max}$ nur sichtbar, wenn ihr Abstand nicht grösser ist als

$$d_E(t_1) = a(t_1) \int_{t_1}^{t_{max}} \frac{dt'}{a(t')} . \qquad (5.11)$$

Wie in (5.4) erhalten wir

$$d_E(t_1) = \frac{a(t_1)}{a_0 H_0 \sqrt{2q_0 - 1}} \left\{ 2\pi - \cos^{-1}\left[1 - \frac{(2q_0-1)a(t_1)}{q_0 a_0}\right]\right\} \qquad (5.12)$$

oder

$$d_E(z) = \frac{1}{(1+z) H_0 \sqrt{2q_0 - 1}} \left\{ 2\pi - \cos^{-1}\left[1 - \frac{2q_0 - 1}{q_0(1+z)}\right]\right\} . \qquad (5.13)$$

Beispielsweise ist $d_E(t_0)$ für $q_0 = 1$ gleich $\frac{3\pi}{2}$ $(1/H_0)$.

Übungsaufgaben

1. Für die verschiedenen Grössen, welche in Fig. 7 angedeutet sind, leite man die folgenden Ausdrücke her:

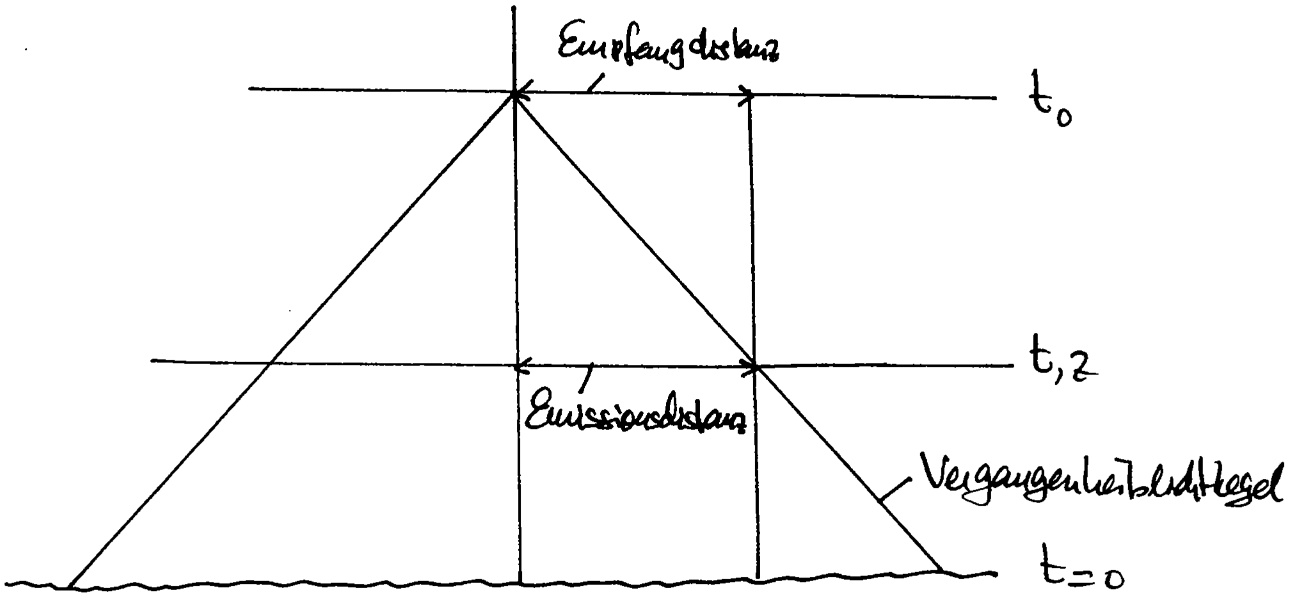


Fig. II. 7

$$\text{Emissions-distanz} = \begin{cases} \dfrac{1}{H_0(1+z)\sqrt{2q_0-1}} \sin^{-1}\left\{ \dfrac{\sqrt{2q_0-1}\,\left[zq_0+(q_0-1)(-1+\sqrt{2q_0z+1})\right]}{q_0^2(1+z)} \right\}, & k=1 \\[2ex] \dfrac{2}{H_0(1+z)}\left[1-\dfrac{1}{\sqrt{1+z}}\right], & k=0 \\[2ex] \dfrac{1}{H_0(1+z)\sqrt{1-2q_0}} \sinh^{-1}\left\{ \dfrac{\sqrt{1-2q_0}\,\left[zq_0+(q_0-1)(-1+\sqrt{2q_0z+1})\right]}{q_0^2(1+z)} \right\}, & k=-1 \end{cases} \tag{5.14}$$

Empfangsdistanz $= (1+z) \cdot$ Emissionsdistanz .

Von nun an sei $\underline{k=0}$!

$$\text{Horizontdistanz damals} = \frac{2}{H_0}\frac{1}{(1+z)^{3/2}} \; ; \tag{5.15}$$

$$\frac{\text{Horizontdistanz jetzt} - \text{Empfangsdistanz}}{\text{Horizontdistanz jetzt}} = \frac{1}{\sqrt{1+z}}\ ; \qquad (5.16)$$

Alter des Universums damals: $t = \frac{2}{3H_0}\frac{1}{(1+z)^{3/2}}$; (5.17)

Alter des Universums heute: $t_0 = \frac{2}{3H_0}$; (5.18)

Rückblickzeit: $t_0 - t = \frac{2}{3H_0}\left(1 - \frac{1}{(1+z)^{3/2}}\right)$; (5.19)

Fluchtgeschwindigkeit damals $= 2\left[\sqrt{1+z} - 1\right]$; (5.20)

Fluchtgeschwindigkeit heute $= 2\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}}\right]$. (5.21)

Skizziere die verschiedenen Funktionen von z.

2. Diskutiere den Ereignishorizont des <u>de Sitter-Universums</u>:

$$g = dt^2 - e^{2t/T}\left[dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2)\right] . \qquad (5.22)$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

6. Friedmann–Lemaître–Modelle für $\Lambda \neq 0$

Wir untersuchen nun materiedominierte Modelle für $\Lambda \neq 0$. Die Friedmann-Gleichung lautet dann nach (I.4.12)

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} . \tag{6.1}$$

Setzen wir hier (2.1) ein, so erhalten wir an Stelle von (2.2) jetzt

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{a}{a_0}\right)\right]^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho_0 \frac{a_0}{a} - \frac{\Lambda}{3}\left(\frac{a}{a_0}\right)^2 = -\frac{k}{a_0^2} . \tag{6.2}$$

Für $t = t_0$ gibt (6.1)

$$H_0^2 + \frac{k}{a_0^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 + \frac{\Lambda}{3} \tag{6.3}$$

und die 2. dynamische Gleichung (I.4.13) gibt für $p_0 = 0$ an Stelle von (1.7)

$$H_0^2(1 - 2q_0) + \frac{k}{a_0^2} = \Lambda . \tag{6.4}$$

ρ_Λ bezeichne die "Vakuumenergiedichte",

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G} , \tag{6.5}$$

und es sei

$$\lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c} = \frac{\Lambda}{3H_0^2} . \tag{6.6}$$

Durch Vergleich von (6.3) und (6.4) erhalten wir jetzt

$$\frac{\Omega_0}{2} - q_0 = \lambda , \quad 1 - \Omega_0 - \lambda = -\frac{k}{a_0^2 H_0^2} . \tag{6.7}$$

Wie in Abschnitt 2 schreiben wir (6.2) dimensionslos ($\tau = H_0 t$, $x(\tau) = a(t)/a_0$) und bekommen statt (2.3)

$$\boxed{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 - \Omega_0 \frac{1}{x} - \lambda x^2 = 1 - \Omega_0 - \lambda} \qquad (6.8)$$
$$(= -k/a_0^2 H_0^2).$$

Je nach Vorzeichen von λ (d.h. von Λ) hat das "Potential"

$$U(x) = -\Omega_0 \frac{1}{x} - \lambda x^2 \qquad (6.9)$$

dieses "mechanischen Problems" ein qualitativ ganz anderes Verhalten. Die "Energie" rechts in (6.8) ist positiv für $k<0$ und negativ für $k>0$. Die qualitativ verschiedenen

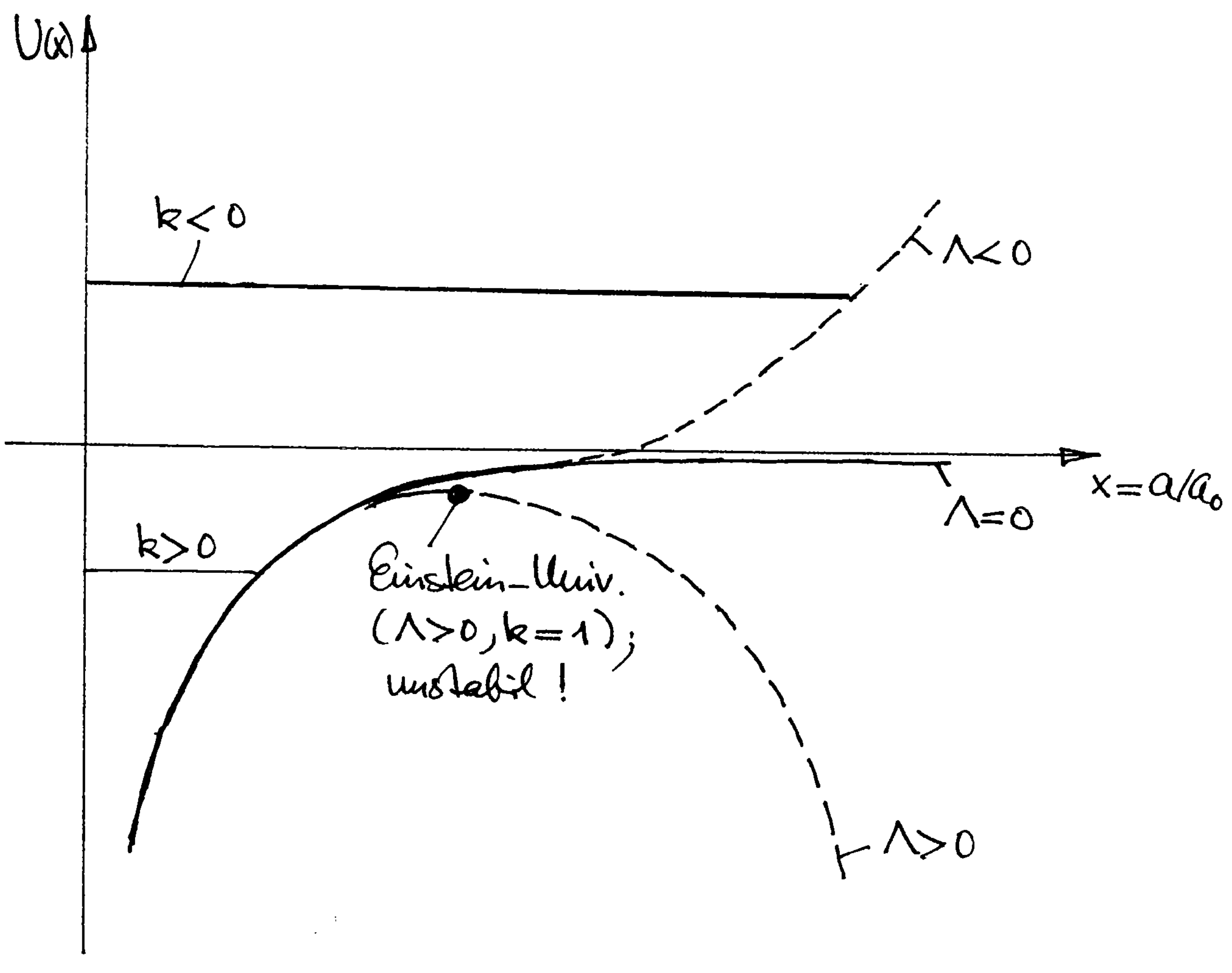


Fig. II.8. Effektives Potential (6.9) von Gl. (6.8)

Möglichkeiten für $a(t)/a_0$ lassen sich aus der Fig. 8 ablesen, in welcher das effektive Potential (6.9) skizziert ist. (Zeichne das zugehörige Phasenportrait.)

Historisch spielte ein Modell von Lemaître*) eine wichtige Rolle. In diesem ist $\Lambda > 0$, $k = 1$ und die Energiekonstante $1 - \Omega_0 - \lambda$ in (6.8) liegt etwas über dem Wert zum Einstein-Universum (s. Fig. 8). Damit ergibt sich qualitativ das Verhalten in Fig. 9.

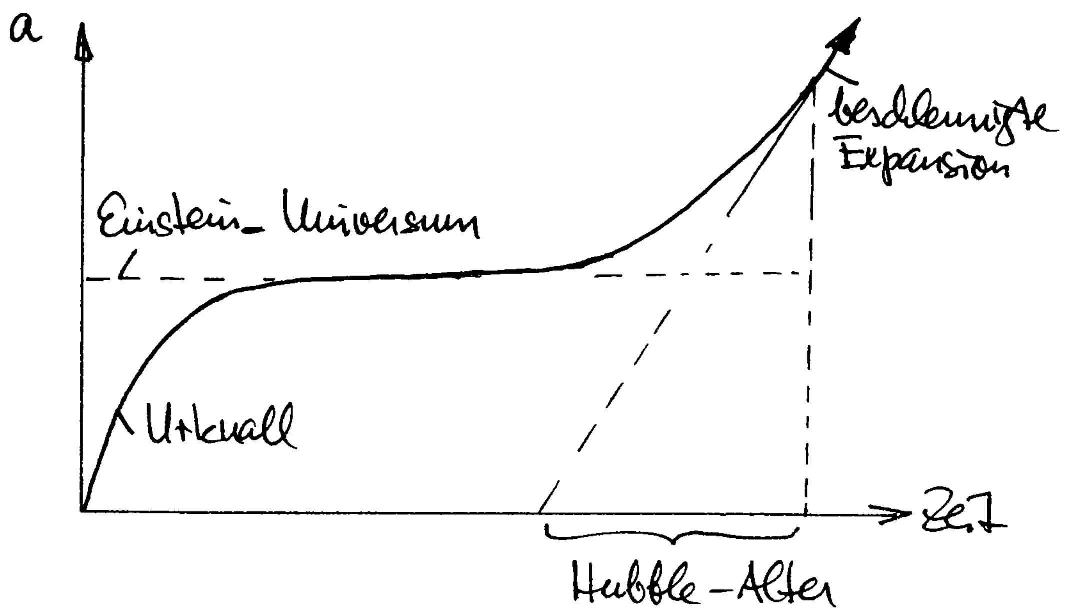


Fig. II.9. Zeitlicher Verlauf des Skalenfaktors im Lemaître-Modell der verzögerten Expansion

Durch geeignete Wahl der Parameter kann man eine lang

*) Lemaître (1894-1966) wurde 1922 zum Priester geweiht. Er publizierte seine wichtigsten Beiträge zur Expansion des Universums im Jahre 1927 (vgl. Einleitung), zur Zeit als er am MIT den Ph.D erlangte. Seine Beiträge blieben zunächst unbeachtet, bis Eddington drei Jahre später auf sie aufmerksam machte und veranlasste, dass Lemaîtres Arbeiten ins Englische übersetzt wurden.

anhaltende Expansionsverzögerung erreichen. In diesem Modell bestimmt die Hubble-Konstante nicht mehr die Zeit, die seit dem Beginn der Expansion vergangen ist. Vielmehr streckt der Λ-Term die Expansionszeit des Universums und das konnte dazu benutzt werden, diese mit dem Sternalter in Einklang zu bringen. Mit der Neubestimmung der Hubble-Konstanten und der modernen Theorie der Elemententstehung lösten sich aber alle Widersprüche der Altersbestimmungen (siehe §II.8) und damit entfiel die Notwendigkeit des Λ-Terms zum zweiten Mal.

Die Idee der verzögerten Expansion für $\Lambda \neq 0$ wurde 1967 im Zusammenhang mit einer vorübergehenden Häufung der Quasarrotverschiebungen bei $z=2$ durch Petrosian, Salpeter und Szekeres für kurze Zeit wiederbelebt (siehe [ZN, §4.2]).

Auf die Problematik des Λ-Terms (Vakuumenergiedichte) werden wir in Kap. VIII eingehen.

Übungsaufgabe: Wie muss man für ein gegebenes Ω_0 den Parameter λ einrichten, dass das Universum auf einer „Kriechlösung" zum Einstein-Universum ist?

---

7. Zur Dunkelheit des nächtlichen Himmels

„Wenn das wahr ist, und wenn jene Sonnen von gleicher Beschaffenheit sind wie die unsrige, weshalb übertreffen dann alle jene Sonnen insgesamt an Glanz nicht unsere Sonne?"

Kepler (1610), in "Dissertation cum Nuncio Sidereo"

Vor der modernen Kosmologie stellte sich für ein unendlich ausgedehntes statisches Universum das folgende Paradoxon, auf welches im Laufe der Zeit verschiedene Gelehrte hingewiesen haben. Im unendlichen Universum, das von Sternen ausgefüllt ist, trifft der Sehstrahl des Beobachters früher oder später auf die strahlende Oberfläche eines Sterns. Deshalb müsste der gesamte Himmel so hell leuchten wie die Oberfläche der Sonne.

Der erste, der auf dieses kosmologische Problem aufmerksam gemacht hat, war J. Kepler im Jahre 1610 in einem Kommentar zu Galilei's Sternboten (Siderius Nuncius). In dieser berühmten Schrift, in welcher Galilei 1610 die Entdeckung der Jupitermonde beschrieb, sagt er zu seinen Beobachtungen der Milchstrasse:

„Auf welchen ihrer Ausschnitte man das Fernrohr auch richten mag, sogleich zeigt sich dem Blick eine ungeheure Menge von Sternen, von denen mehrere ziemlich gross und sehr auffallend sind; die Anzahl der kleinen jedoch ist schlechthin unerforschlich."[4]

Die Erregung, die Kepler bei der Lektüre des Sternboten überfallen hatte, setzte er unmittelbar in eine Abhandlung um; diese im Stil einer Rezension gehaltene Schrift liess er nebst einer Vorrede an den Leser im Mai 1610 unter dem Titel "Dissertatio cum Nuncio Sidereo" (Unterredung mit dem Sternenboten) drucken. Zuvor hatte Kepler eine Abschrift nach Padua geschickt.

Unter dem Eindruck von Galilei's Auflösung der Milchstrasse erörtert Kepler u.a. die Frage der unendlich vielen Welten, wie sie Nikolaus von Cusa vorausgedacht und der zehn Jahre zuvor verbrannte Giordano Bruno in dichterischer Überinterpretation des kopernikanischen Systems zu einer pantheistischen Vision ausgeweitet hatte. Die Unmöglichkeit des dunklen Nachthimmels für ein unendliches Universum überzeugte ihn, dass dieses endlich sei und einen äusseren Rand habe.

Später wurde das Thema wiederholt aufgenommen, nämlich durch: E. Halley (1720), J.-P. Loys de Cheseaux (1744), H. Olbers (1823), J. Herschel (1848). Siehe dazu: E.R. Harrison, American Journal of Physics, 45, 119 (1977).

Für ein expandierendes Universum stellt sich das Problem des dunklen Nachthimmels nicht, denn wegen der Existenz eines Horizonts sehen wir nur eine endliche Zahl von Sternen. Noch viel wichtiger ist, dass die Lebensdauer der Sterne endlich ist. Als erste grobe Schätzung würde man erwarten, dass die Strahlungsintensität I des Nachthimmels durch Galaxien folgende Grösse hat

$$I \sim (\text{mittlere Leuchtkraft pro Volumeneinheit}/4\pi) \cdot \text{Hubbledistanz}. \tag{7.1}$$

Wir geben nun eine verfeinerte Rechnung. Dazu benötigen wir zuerst die Gleichung für die zeitliche Änderung der Strahlungsintensität $I(\nu,t)$. Diese sei homogen und isotrop. Ohne Emissions- und Absorptionsprozesse wäre $a^3(t)\, n_\gamma(\nu(t),t)\, d\nu(t)$ konstant, wenn $n_\gamma(\nu,t)$ die spektrale Anzahldichte der Photonen zur Zeit t bezeichnet. Da $\nu(t),\ d\nu(t) \propto 1/a(t)$, gilt also

$$\frac{d}{dt}\left(a^2(t)\, n_\gamma(\nu(t),t)\right) = 0. \tag{7.2}$$

Nun ist

$$I(\nu,t) = h\nu\, n_\gamma(\nu,t)\ ; \tag{7.3}$$

folglich

$$\frac{d}{dt}\left(a^3(t)\, I(\nu(t),t)\right) = 0\ , \tag{7.4}$$

oder

$$\frac{d}{dt} I(\nu(t),t) = -3\frac{\dot a}{a} I(\nu(t),t). \tag{7.5}$$

Wenn es eine Strahlungsquelle $j(\nu,t)$ $(\mathrm{erg\,cm^{-3}\,s^{-1}\,Hz^{-1}\,ster^{-1}})$

gibt, so haben wir statt dessen (von Absorption wollen wir absehen)

$$\boxed{\frac{d}{dt} I(\nu(t),t) = -3\frac{\dot{a}}{a} I(\nu(t),t) + j(\nu(t),t)} . \tag{7.6}$$

Diese Gleichung hat die Lösung

$$I(\nu,t) = \int_0^t dt' \left(\frac{a(t')}{a(t)}\right)^3 j(\nu(t'),t'). \tag{7.7}$$

Wir setzen

$$j(\nu,t) = n(t)\ L(\nu,t)/4\pi . \tag{7.8}$$

Eigendichte der Quellen — mittlere spektrale Luminosität einer Galaxie zur Zeit t (Evolution!)

E.7.1

Falls die Zahl der Quellen erhalten ist, gilt

$$n(t) = \left(\frac{a(t_0)}{a(t)}\right)^3 n_0 , \quad n_0 := n(t_0) , \tag{7.9}$$

und somit ist die gegenwärtige Intensität

$$I(\nu) = \frac{n_0}{4\pi}\int_0^{t_0} L(\nu(t),t)\, dt \quad ;$$

oder mit

$$\nu(t) = \nu\,\frac{a(t_0)}{a(t)} , \quad d\nu(t) = -\nu(t)\,\frac{\dot{a}}{a}\,dt ,$$

$$I(\nu) = \frac{n_0}{4\pi}\int_\nu^\infty \frac{L(\nu',z)}{\nu'}\,\frac{1}{(\dot{a}/a)}\,d\nu' , \qquad \nu(1+z) = \nu' .$$

Nach (2.4) ist

$$\frac{\dot{a}}{a} = H_0(1+z)\sqrt{1+\Omega_0 z} . \tag{7.10}$$

Damit kommt

$$I(\nu) = \frac{n_0}{4\pi H_0} \int_{\nu}^{\infty} \frac{L(\nu', z=\frac{\nu'}{\nu}-1)}{\nu'} \frac{1}{(1+z)\sqrt{1+\Omega_0 z}} d\nu' ,$$

oder endgültig

$$\boxed{I(\nu) = \frac{n_0}{4\pi H_0} \int_{\nu}^{\infty} \frac{L(\nu', z=\frac{\nu'}{\nu}-1)}{\nu'(\nu'/\nu)} \frac{1}{\sqrt{1+\Omega_0(-1+\nu'/\nu)}} d\nu'} . \tag{7.11}$$

Vernachlässigen wir evolutive Effekte, sowie die langsam variierenden Faktoren im Nenner, so ergibt sich näherungsweise

$$\boxed{I(\nu) \simeq \frac{n_0}{4\pi H_0} \int_{\nu}^{\infty} \frac{L(\nu')}{\nu'} d\nu'} . \tag{7.12}$$

Vergleiche dies mit der groben Schätzung (7.1).

Aus Messungen findet man für das Integral für $\lambda = 5500$ Å etwa den Wert $0.22\, L(\nu = \frac{c}{5500 Å})$ (siehe [P1, p.63]). Damit ergibt sich aus (7.12)

$$\nu I(\nu) \simeq 0.22\, c\nu \frac{n_0 L(\nu)}{4\pi H_0} , \quad \text{für } \nu = \frac{c}{5500 Å} . \tag{7.13}$$

Ferner zeigen die Beobachtungen, dass die Luminosität der Galaxien pro Volumeneinheit im Mittel bei $\lambda = 5500$ Å die folgende Grösse hat (siehe (1.10) $\Delta\nu$ ist die Breite des V-Filters)

$$\Delta\nu \cdot n_0 L(\nu = \frac{c}{5500 Å}) \simeq 1.5 \times 10^8\, h_0 L_\odot\, (Mpc)^{-3} . \tag{7.14}$$

Benutzen wir dies in (7.13), so fällt h_0 heraus und wir erhalten ($\Delta\lambda_{1/2} = 900$ Å):

$$\nu I(\nu) \simeq 2.5 \times 10^{-6} \text{ erg cm}^{-2}\text{s}^{-1}\text{ster}^{-1}$$

$$= 0.37\ S_{10}(V). \qquad (7.15)$$

Dabei bezeichnet $S_{10}(V)$ die äquivalente Zahl von Sternen mit $m_V = 10$ pro(Grad)^2; für den Umrechnungsfaktor findet man aus der Definition

$$\nu I(\nu) = \lambda I(\lambda) = 6.86 \times 10^{-6}\ S_{10}(V) \text{ erg cm}^{-2}\text{s}^{-1}\text{ster}^{-1},$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 5500 \text{ Å}. \qquad (7.16)$$

Es ist schwierig den intergalaktischen Anteil zu bestimmen, denn das integrierte Sternenlicht der Galaxis ist allein etwa 100 $S_{10}(V)$. Obere Schranken sind aber höchstens 5 mal grösser als der geschätzte Wert (7.15).

<u>Übungsaufgabe:</u> Leite aus (7.6) eine Differentialgleichung für die Energiedichte der Strahlung ab und diskutiere ähnlich wie oben deren heutigen Wert.

E.7.1 Hintergrundstrahlung

Ausgehend von (7.7) und (7.8) leiten wir zunächst einen geeigneten allgemeinen Ausdruck für die Hintergrund-Intensitätsverteilung ab.

Es war

$$I(\nu) = \int_0^{t_0} dt \left(\frac{a(t)}{a_0}\right)^3 n(t) \, \frac{L(\nu(t),t)}{4\pi} . \qquad (1)$$

Führen wir statt t die Rotverschiebung ein,

$$dt \overset{(4.1)}{=} -\frac{1}{H_0(1+z)^2\sqrt{1+2q_0 z}} \, dz \quad , \quad \nu(t) = \nu(1+z) ,$$

so erhalten wir als Ausgangspunkt

$$I(\nu) = \frac{1}{H_0}\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty dz \, \frac{n(z)\, L(\nu(1+z),z)}{(1+z)^5 (1+2q_0 z)^{1/2}} . \qquad (2)$$

Die Zahl der Quellen sei erhalten: $n(z) = n_0 (1+z)^3$. Dann wird aus (2)

$$I(\nu) = \frac{n_0}{4\pi H_0}\int_0^\infty \frac{L(\nu(1+z),z)}{(1+z)^2(1+2q_0 z)^{1/2}} \, dz . \qquad (3)$$

Dies ist äquivalent zu (7.11) $[z \leftrightarrow \nu']$. Falls $L(\nu,z)$ unabhängig von z wäre (keine Evolution), dann könnten wir über ν integrieren:

$$I = \frac{n_0 L/4\pi}{H_0} \underbrace{\int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)^3\sqrt{1+2q_0 z}}}_{\frac{2}{5} \text{ für } q_0 = 1/2} \quad , \quad L := \int L(\nu)\,d\nu . \qquad (4)$$

Für ein Potenzgesetz $L(\nu,z) \propto \nu^{-\alpha}$ ist

$$L(\nu(1+z),z) = \frac{L(\nu,z)}{(1+z)^\alpha} .$$

Setzen wir noch

$$\frac{n(z)}{(1+z)^3}\, L(\nu(1+z), z) =: n_0\, L(\nu)\, \frac{1}{(1+z)^{\alpha}}\, f(L, z, \alpha, \text{Typ}, \dots) \qquad (5)$$

f = Evolutionsfunktion
(f=1 ohne Evol.)

so wird aus (3)

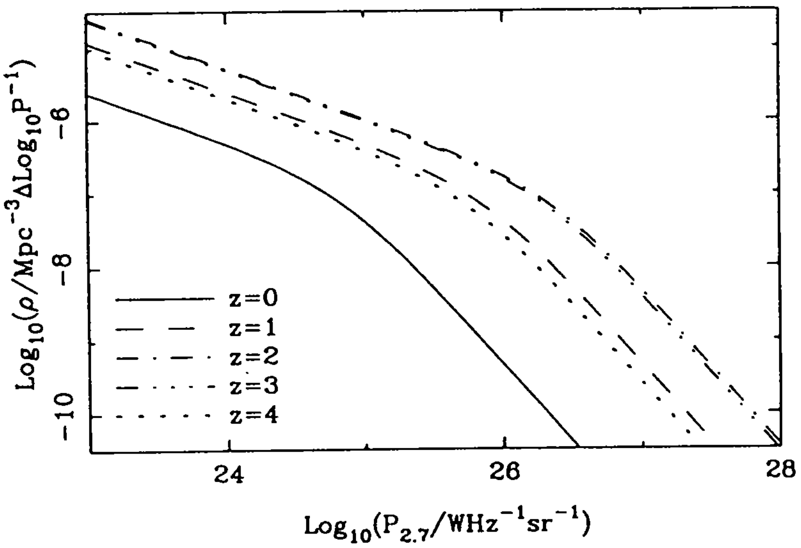
$$I(\nu) = \frac{1}{H_0}\, \frac{L(\nu)\, n_0}{4\pi} \int_0^{\infty} dz\, \frac{f(L, z, \dots)}{(1+z)^{2+\alpha}(1+2q_0 z)^{1/2}}\,. \qquad (6)$$

Bsp. $\Omega_0 = 2q_0 = 1$, $\alpha = 1$; Integration bis z_{max}

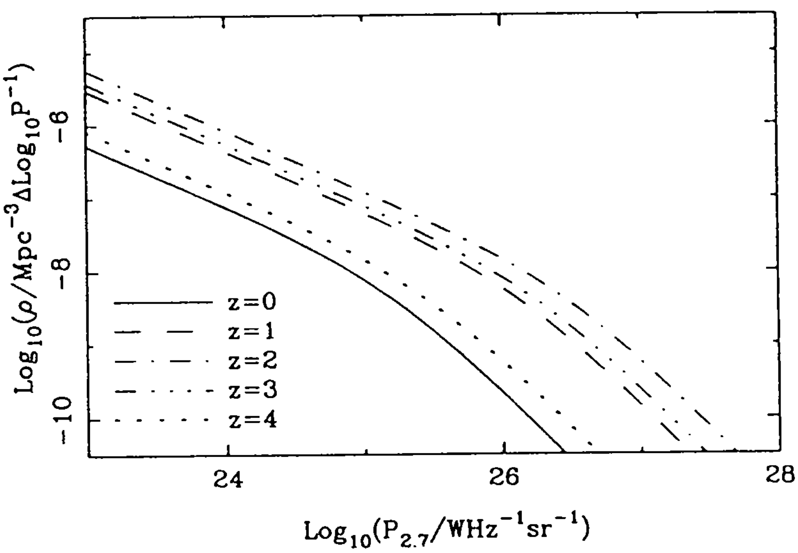
$$I(\nu) = \frac{2}{5H_0}\, L(\nu)\, n_0 \left[1 - (1+z_{max})^{-5/2}\right]. \qquad (7)$$

Formeln der Art (6) sind benutzt worden, um z.B. die Evolution von Radioquellen zu bestimmen. Ein Beispiel einer Studie zeigt die folgende Figur (MNRAS 247, 19 (1990)). Daraus kann man die Entwicklung der (mitbewegten) Luminositäts-funktion entnehmen.

Steep–Spectrum



Flat–Spectrum



Illustrating the evolution of the luminosity function of extragalactic radio sources with steep and flat radio spectra with redshift (or with cosmic epoch). Note that these luminosity functions are presented by per unit *comoving volume* so that the changes in the functions are over and above the changes in number density associated with the expansion of the Universe (Dunlop and Peacock 1990)

8. Grösse und Alter des Universums

"The present Universe is something like the old professor nearing retirement with his brilliant future behind him"[4].

A. Sandage

In diesem Abschnitt gehen wir etwas näher auf die verschiedenen Bestimmungen der dynamischen Parameter H_0, q_0, Ω_0 und Λ ein und geben ergänzende Literaturhinweise.

(!) Bem. (1997). Auf diesem Sektor ist inzwischen viel passiert, aber Vieles ist noch im Fluss.

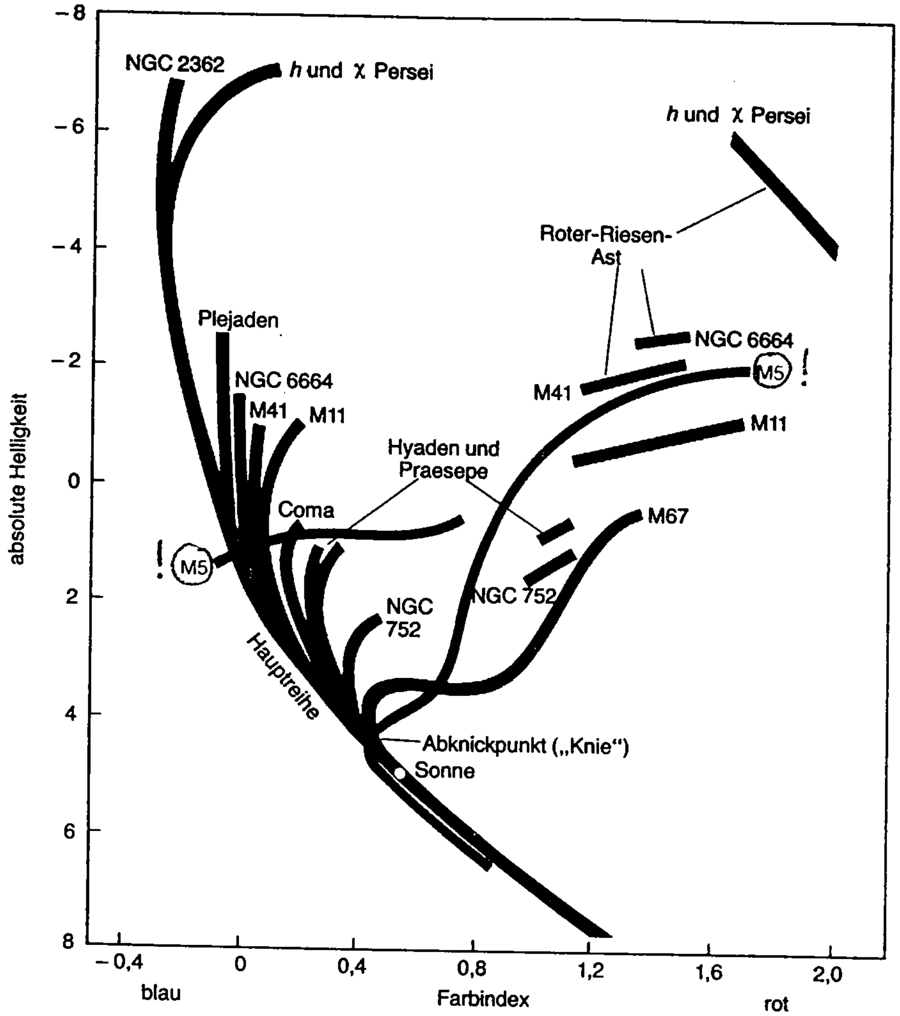
8.1 Altersbestimmungen

Wir zeigen im folgenden, dass drei ganz verschiedene Altersbestimmungen — innerhalb der beträchtlichen Unsicherheiten — untereinander verträglich sind.

a) Alter von Kugelsternhaufen

Kugelsternhaufen bestehen aus "metallarmen" Populations-II-Sternen und gehören zu den ältesten Objekten im Weltall.

Da die Sterne eines Haufens vermutlich alle ungefähr zur gleichen Zeit und am gleichen Ort entstanden sind, spiegelt das Hertzsprung-Russell-Diagramm eines Sternhaufens den Entwicklungspfad der Sterne wieder. Durch Vergleich von theoretischen Entwicklungsmodellen mit der beobachteten Verteilung im H-R-Diagramm ist es möglich, das Alter eines Kugelsternhaufens abzuschätzen. Besonders der <u>Abknickpunkt</u> von der Hauptreihe (siehe Fig. 10) hängt sehr empfindlich vom Alter des Haufens ab.



<u>Fig. II.10.</u> H-R-Diagramme für Sternhaufen. M5 ist ein Kugelsternhaufen (Population II); alle übrigen sind offene Sternhaufen (Population I).

Auf der theoretischen Seite wurden in den letzten Jahren verbesserte Sternmodelle durchgerechnet[1,2], wobei vor allem

1) D. A. Vandenberg, Ap. J. Suppl. Series <u>51</u>, 29 (1983)

2) K. Janes, P. Demarque, Ap. J. <u>264</u>, 206 (1983)

genauere Opazitäten verwendet worden. Zudem wurden mit Hilfe von gerechneten Modellatmosphären die äusseren Randbedingungen genauer berücksichtigt. Wichtig ist, dass sich die Abbiegestelle von der Hauptreihe als unempfindlich auf die Wahl der Parameter in einer Mischwegtheorie für die Konvektion erweist.

Auf der Beobachtungsseite ist eine genaue Photometrie der Kugelhaufen sehr schwierig, da diese alle sehr weit von uns entfernt sind. Ein Beispiel ist in Fig. 11 gezeigt. (In den günstigsten Fällen liegt die scheinbare

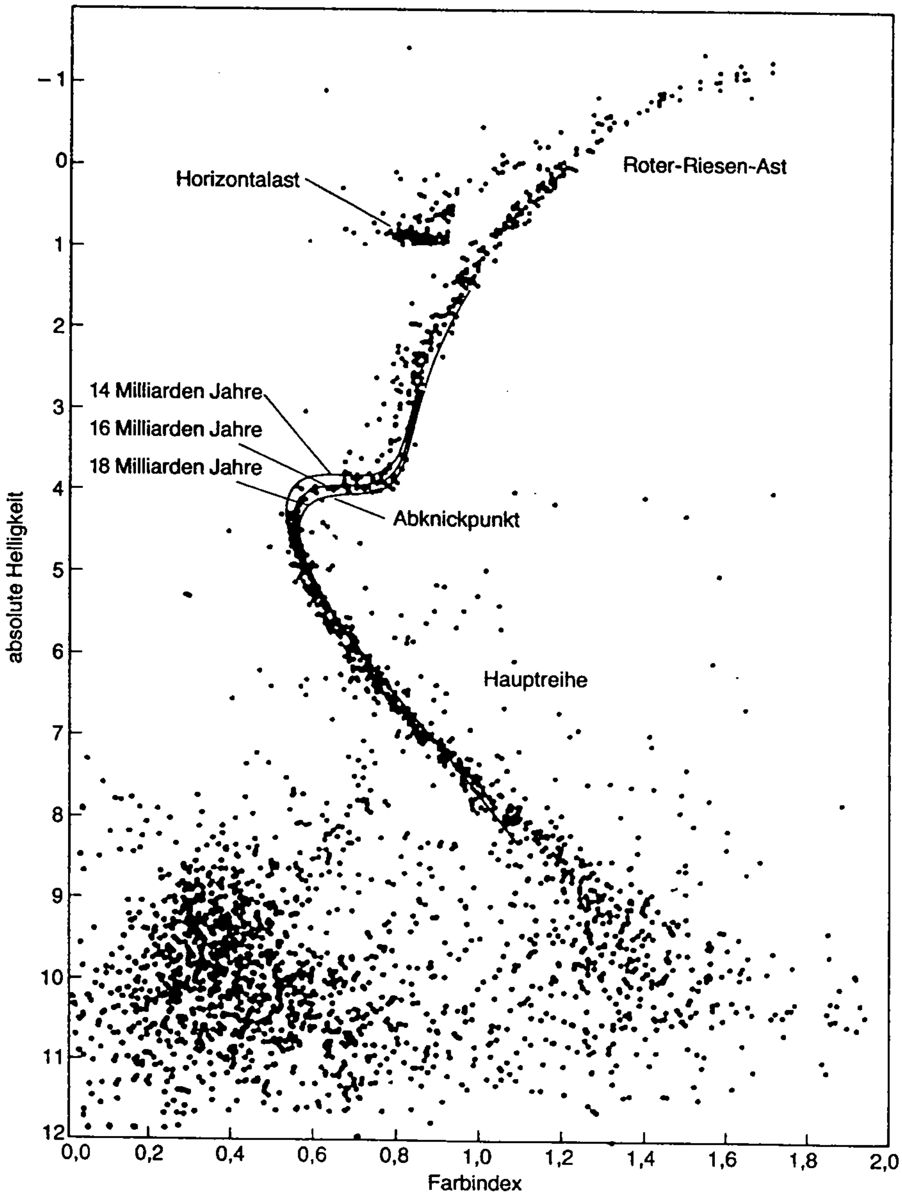


Fig. II.11. H-R-Diagramm für den riesigen Kugelhaufen 47 Tucanae

Helligkeit bei 19^m und 20^m.) Aus diesem Grund sind bis heute erst 15 Kugelhaufen photometriert. (Diese Lage dürfte sich mit dem "Space Teleskop" und neuen Detektionssystemen verbessern.)

Durch Anpassung der Entwicklungswege an die Beobachtungen von 15 Kugelsternhaufen bestimmte Vandenberg[1] das Alter zu

$$\boxed{T_{KH} = (15-18) \times 10^9 \ \mathrm{a}.} \qquad (8.1)$$

Ein Beispiel für diese Anpassung ist in Fig. 11 gezeigt. Wichtig ist, dass das so bestimmte Alter auch von der angenommenen Heliumhäufigkeit der Ausgangselementverteilung abhängt. Es zeigte sich, dass man für 20% ^4He i.a. eine bessere Übereinstimmung bekommt als für 30%. Dies ist im Hinblick auf die Frage der primordialen He-Häufigkeit, welche in Kap. IV diskutiert werden wird, von Bedeutung.

Die Fehler dieser Altersbestimmung sind schwierig anzugeben, da verschiedene Unsicherheiten mitspielen (Entfernung, interstellare Absorption, chemische Zusammensetzung, theoretische Fehler). Eine <u>untere Schranke</u> von $T_{KH} > 13 \times 10^9$ a dürfte jedoch ziemlich zuverlässig sein. Diese Limite gibt bereits interessante Einschränkungen an die Parameter h_0 und Ω_0, wie aus Fig. 12 hervorgeht. So können wir sogar für kleine Werte von Ω_0 auf $h_0 < 3/4$ schliessen. Wäre anderseits $\Omega_0 = 1$ (wie dies durch das inflationäre Modell vorausgesagt wird), so ergibt sich $h_0 \leq 1/2$ (immer $\Lambda = 0$ vorausgesetzt).

Diese Schranken sind konservativ, da t_0 um Etliches grösser sein sollte als T_{KH}. Sandage[3] schätzt, dass die Kugelhaufen etwa 2.3×10^9 Jahre nach dem Urknall gebildet wurden. (Dies entspricht $z \simeq 4$ und das Argument beruht auf einem angeblich realen cut-off in der Quasarverteilung.) Jedenfalls ist T_{KH} verträglich

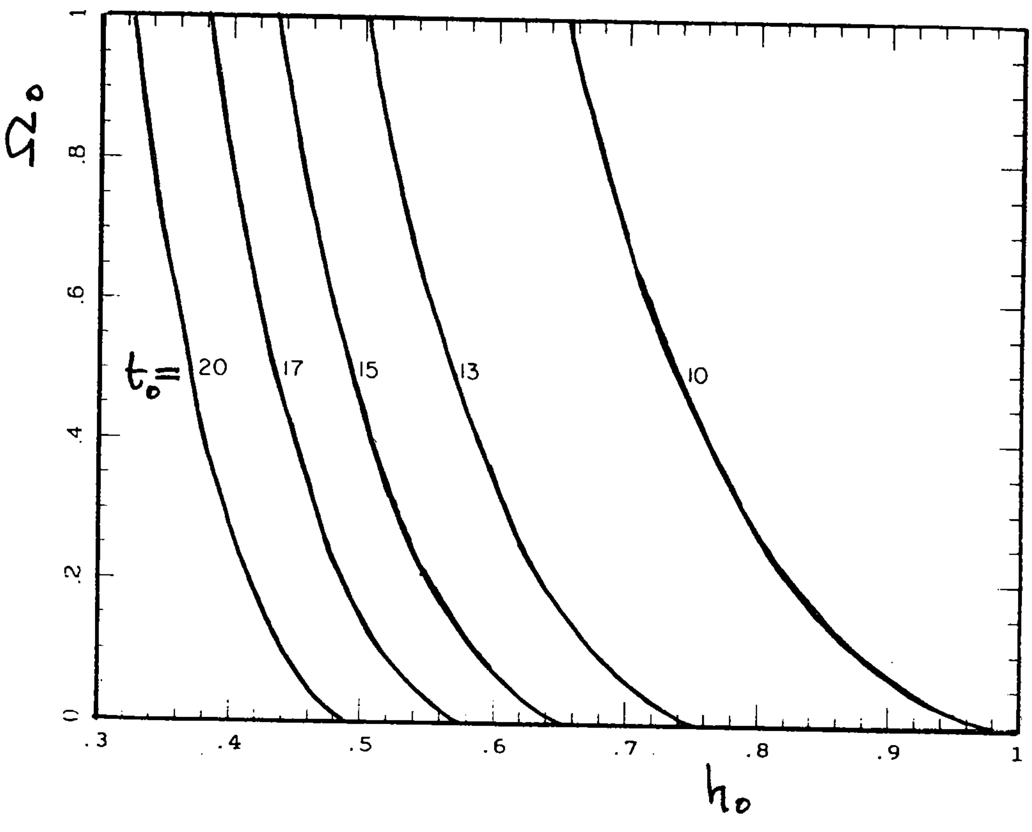


Fig. II.12. Beziehung zwischen h_0 und Ω_0 für verschiedene Werte von t_0 (in Ga) gemäss Gl. (2.8–10)

mit den unabhängigen Bestimmungen von h_0 und Ω_0 (siehe §§8.2–3).

---

3) A. Sandage, Beitrag in [K4].

b) Alter der chemischen Elemente (Nukleokosmochronologie)

Für das Verständnis dieser "kosmischen ^{14}C-Methode" sollte man das folgende qualitative Bild vor Augen haben (Einzelheiten dann folgen).

Mit der Bildung der Galaxien setzte die Nukleosynthese aller Elemente mit $A \geq 12$ – insbesondere auch der schweren Elemente jenseits von Eisen bis hin zu Uran – ein. Da die Bildung der Galaxien noch sehr schlecht verstanden ist (siehe Kap. V), wissen wir nicht, welche Zeit seit dem Urknall verstrichen war. Üblicherweise wird dafür etwa eine Milliarde Jahre angenommen. Die weitere chemische Entwicklung der Galaxis ist natürlich ausserordentlich komplex und wir wissen darüber wenig Quantitatives. Die uns interessierenden "kosmischen Chronometer" – wie z.B. ^{238}U und ^{232}Th – wurden durch rasche Neutroneneinfänge (r-Prozesse) in Supernova-Explosionen gebildet. Mit den heutigen Kenntnissen der Kernphysik können die relativen Häufigkeiten der r-Elemente bei der Bildung recht genau berechnet werden (s. unten). Im folgenden bezeichne T den Zeitraum der kontinuierlichen Synthese von r-Kernen in der Galaxis durch Supernova-Explosionen bis zur Isolation der präsolaren Wolke (vgl. Fig. 13). Nach einer weiteren Zeit Δ, die im Vergleich zu T kurz sein sollte, wird diese Wolke kondensieren. Von da an bis heute ist die Zeit 4.55×10^9 a verstrichen; dies geht aus radioaktiven Datierungen von Meteoriten sehr genau hervor (s. unten).

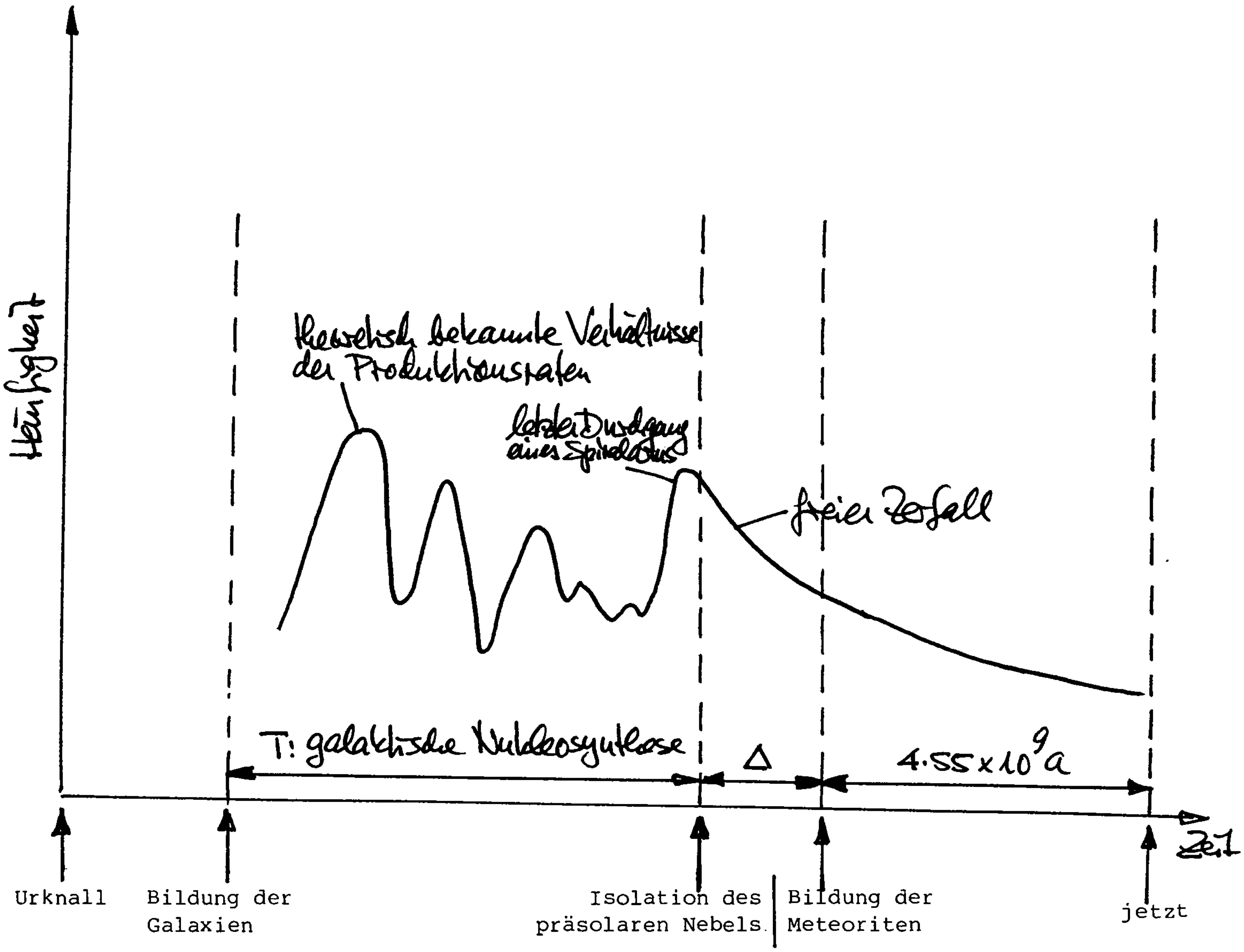


Fig. II.13. Schematische Geschichte der kosmischen Chronometer

Das Alter T_G der Galaxis ist

$$T_G = T + \Delta + 4.55 \times 10^9 \, a . \qquad (8.2)$$

Nun geht es vorallem darum, die Zeit T zu bestimmen. Dazu verwendet man Kerne, deren Halbwertzeiten viel grösser als Δ sind. Besonders gute Kandidaten sind z.B.

$$^{238}U : \quad T_{1/2} = 4.47 \times 10^9 \, a$$

$$^{232}Th : \quad T_{1/2} = 1.405 \times 10^{10} \, a . \qquad (8.3)$$

Ihre meteoritisch beobachteten Häufigkeiten werden Anteile aus der gesamten Zeitdauer der Nukleosynthese enthalten und sind praktisch unabhängig von Δ.

Wir kennen also grundsätzlich von theoretischen Rechnungen die Verhältnisse P_i/P_j der Produktionsraten von Chronometer Paaren im r-Prozess und anderseits aus Messungen an Meteoriten die Häufigkeitsverhältnisse $Y_i(T+\Delta)/Y_j(T+\Delta)$ zur Zeit $T+\Delta$ der Kondensation des solaren Materials. Die folgende gebräuchlichen Grössen

$$R_{ij} = \frac{P_i/P_j}{Y_i(T+\Delta)/Y_j(T+\Delta)} \qquad (8.4)$$

können wir also als bekannt ansehen. Um aus diesen die Zeit T extrahieren zu können, benötigt man gewisse Annahmen über die chemische Evolution der Galaxis. Es ist dabei vernünftig, eine kontinuierliche Nukleosynthese anzunehmen, da sehr viele Ereignisse (Supernovae) beitragen und die Durchmischung durch differentielle galaktische Rotation relativ rasch stattfindet.

Die Änderungen der Häufigkeiten $Y_i(t)$ werden durch Differentialgleichungen der Form

$$\frac{dY_i}{dt} = -\lambda_i Y_i + \Phi(Y_i, t) \qquad (8.5)$$

beschrieben [λ_i: Zerfallsraten, Φ: (netto) Produktionsraten]. Für das Material, aus welchem das Sonnensystem entstand, dürfen wir dabei räumliche Homogenität annehmen. In der Praxis vereinfacht man Φ meistens durch den linearen Ansatz in Y_i:

$$\Phi(Y_i;t) = \omega Y_i + P_i\, p(t).$$

Die relativen Produktionsraten $P_i\, p(t)/P_j\, p(t) = P_i/P_j$ sind dabei für alle Quellen konstant (und theoretisch bekannt). Die Ratengleichungen lauten damit

$$\frac{dY_i}{dt} = -(\lambda_i - \omega) Y_i + P_i\, p(t), \tag{8.6}$$

und diese haben die Lösungen ($t=0$ sei der Zeitpunkt des Synthesebeginns):

$$Y_i(t) = e^{-(\lambda_i-\omega)t} \int_0^t e^{(\lambda_i-\omega)u} P_i\, p(u)\, du, \quad t \le T.$$

Für $t > T$ schliesst sich der freie Zerfall an, weshalb

$$Y_i(T+\Delta) = P_i T \langle p\rangle e^{-\lambda_i \Delta} e^{-(\lambda_i-\omega)T} \int_0^T e^{(\lambda_i-\omega)u} \rho(u)\, du, \tag{8.7}$$

wobei

$$\langle p\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T p(u)\, du \tag{8.8}$$

und

$$\rho(u) = \frac{p(u)}{T\langle p\rangle} \tag{8.9}$$

die normierte Produktions-Wahrscheinlichkeitsdichte ist. Damit erhalten wir für die uns interessierende Grösse $T+\Delta$:

$$T+\Delta = \frac{\ln R_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j} + \frac{\ln\left[\Psi_\rho(\omega-\lambda_i)/\Psi_\rho(\omega-\lambda_j)\right]}{\lambda_i - \lambda_j}, \tag{8.10}$$

wobei

$$\varphi_\rho(x) = \int_0^T \rho(u)\, e^{-xu}\, du \qquad (8.11)$$

die Laplace-Transformierte der W-Dichte ρ ist. In dieser steckt die einzige Modellannahme in (8.10) – abgesehen vom Parameter ω, welcher oft null gesetzt wird.

Als Illustration betrachten wir den Grenzfall sehr langlebiger Isotope: $\lambda_i T, \lambda_j T \ll 1$. Dann wird aus (8.10) in 1. Näherung

$$T + \Delta = \frac{\ln R_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j} + \langle \tau \rangle \quad , \qquad (8.12)$$

mit

$$\langle \tau \rangle = \int_0^T u\, \rho(u)\, du \quad , \qquad (8.13)$$

unabhängig von ω. Für das Bsp. $p(t) = \text{const}$ würde man speziell $\langle \tau \rangle = T/2$ erhalten, also

$$T + \Delta = 2\, \frac{\ln R_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j} \,. \qquad (8.14)$$

In der Praxis wählt man für $p(t)$ eine mit einer Zeitkonstante T_R exponentiell abnehmende Funktion über die Zeit T plus einer Spike bei T, welche dem "Durchgang" eines Spiralarms (Dichtewelle) durch die prä-solare Wolke entspricht, in welcher der Bruchteil S der totalen galaktischen Nukleosynthese für einen stabilen Kern beigetragen wird. Dem liegt die Vorstellung zugrunde, dass beim Durchgang der Dichtewelle die Kondensation des Sonnensystems ausgelöst wird. Mit diesen Annahmen erhält man aus (8.10) R_{ij} als Funktion von $T, \Delta\, (\lambda_i, \lambda_j)$ und den Modell-parametern T_R, S. Kennt man also vier Paare von Chronometern mit ihren (theoretischen) Produktionsverhältnissen P_i/P_j und ihre Häufigkeitsverhältnisse $Y_i(T+\Delta)/Y_j(T+\Delta)$ zur Zeit $T+\Delta$ (aus Meteoritendaten), so kann man T, Δ, T_R und S bestimmen.

Man sollte dabei allerdings nicht vergessen, dass das angenommene Modell recht primitiv ist.

Elementenhäufigkeiten von Kosmochronometern zur Zeit der Kondensation des Sonnensystems, welche aus Untersuchungen von Meteoriten gewonnen wurden, sind in Tabelle 2 angegeben.

$\frac{\text{Kern } i}{\text{Kern } j}$	$\frac{Y_i(T+\Delta)}{Y_j(T+\Delta)}$	Autoren
$\frac{^{232}Th}{^{238}U}$	2.50 ± 0.2 2.32	Symbalisty und Schramm (1981) Anders und Ebihara (1982)
$\frac{^{235}U}{^{238}U}$	0.313 ±0.026	Symbalisty und Schramm (1981) Begemann (1980)
$\frac{^{244}Pu}{^{238}U}$	0.035, 0.015, 0.016, 0.005 ± 0.001	Wasserburg et al. (1969), Drozd et al. (1977) Marti et al. (1977) Hudson et al. (1980)
$\frac{^{129}I}{^{127}I}$	$(0.8 \ldots 2.3) \times 10^{-4}$	Jordan et al. (1980)

Tabelle II.2. Elementenhäufigkeiten von Kosmochronometern zur Zeit der Kondensation des Sonnensystems (aus Untersuchungen von Meteoriten)

Nun wollen wir uns noch mit dem theoretischen Problem der Berechnung von R_i/R_j befassen.

Elemente, welche schwerer sind als Eisen, werden durch langsame und schnelle Neutronen-Einfangsreaktionen gebildet. [Für das Folgende spielen die sog. p-Prozesse keine Rolle, da diese neutronenarme Kerne links von der Stabilitätslinie in Fig. 14 aufbauen.] Die Unterscheidung langsam/schnell richtet sich nach dem Verhältnis τ_β/τ_n von β-Halbwertszeiten (τ_β) zu denen für Neutroneneinfänge (τ_n).

Da die Atomkerne nicht beliebig neutronenreich werden können, wird in jeder Isotopenkette nach nur wenigen Neutroneneinfängen ein Atomkern erreicht, der β^--instabil ist. Beim β^--Zerfall erhöht sich die Elementennummer um eine Einheit. Ist nun die Neutronenkonzentration in einer astrophysikalischen Umgebung so niedrig, dass der erste instabile Kern einer Isotopenkette zerfällt, <u>bevor</u> das nächste Neutron eingefangen werden kann, so spricht man vom <u>s-Prozess</u> (slow neutron-capture). In dieser Situation werden durch Neutroneneinfänge mit nachfolgenden β^--Zerfällen immer schwerere Elemente aufgebaut. In Sternen liegen die passenden Bedingungen hauptsächlich während des Helium-Brennens vor. Die Neutronen werden dabei vorallem über Reaktionen wie $^{13}C(\alpha,n)^{16}O$ oder $^{22}Ne(\alpha,n)^{25}Mg$ freigesetzt, mit Dichten der Grössenordnung $10^{10}\,cm^{-3}$.

Auf diese Weise können aber Elemente schwerer als Blei nicht gebildet werden, weil das nächst schwerere Element, Polonium, durch α-Emission zerfällt. Die Aktiniden wie Thorium und Uran werden auf diese Weise also nicht erreicht. Daneben gibt es ausserdem neutronenreiche Isotope schwerer Elemente, die in der Nuklidkarte durch einen β-instabilen Kern von den anderen stabilen Isotopen desselben Elements getrennt sind; Beispiele sind ^{122}Sn und ^{124}Sn. Auch diese Nuklide können im s-Prozess nicht entstehen.

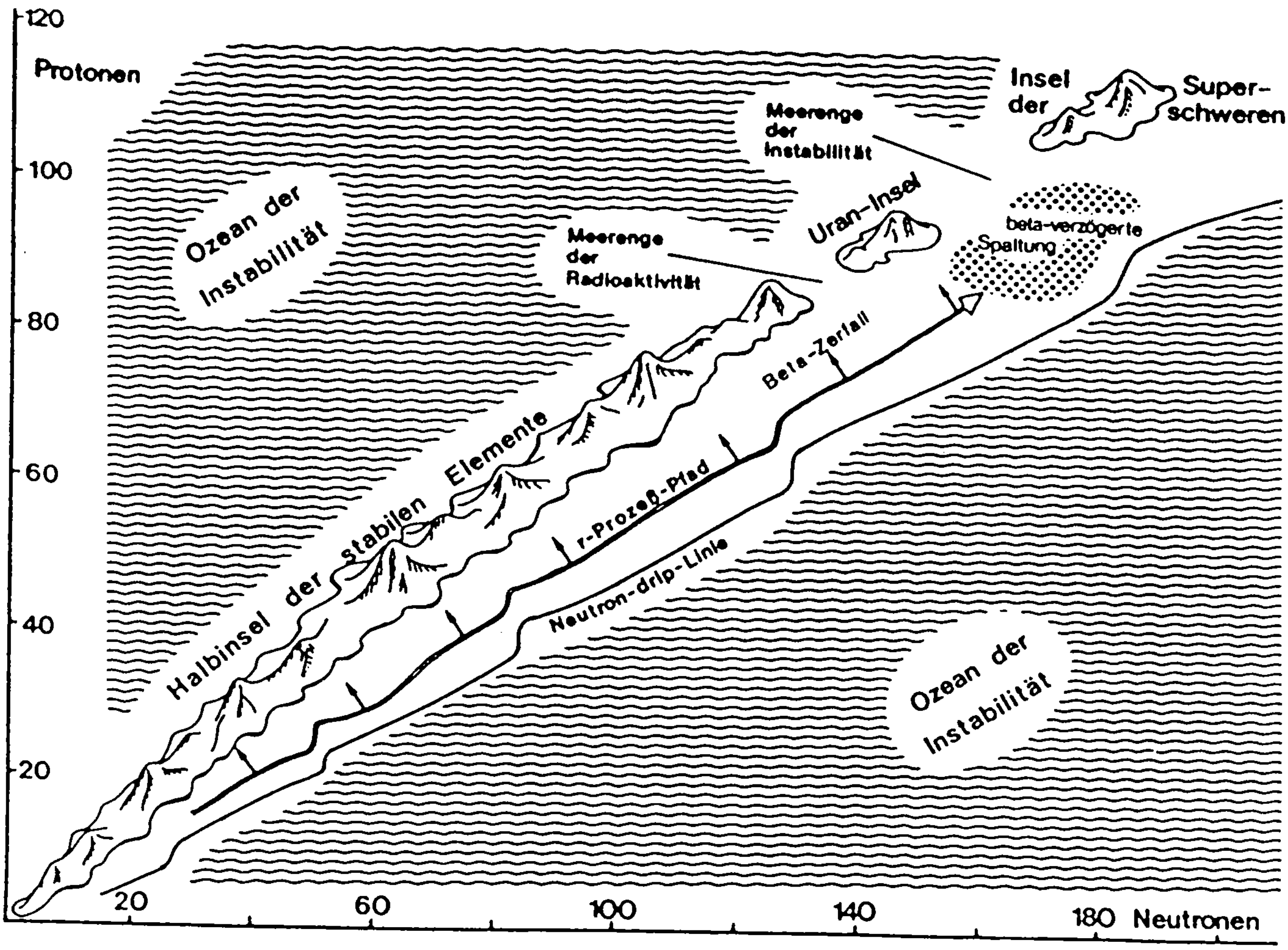


Fig. II.14. Elementensynthese durch raschen Neutroneneinfang — r-Prozess — in schematischer Darstellung

Alle diese Elemente werden durch den r-Prozess gebildet. Dieser läuft dann ab, wenn die Neutronenkonzentration so hoch ist, dass die Zeiten für Neutroneneinfänge sehr viel kürzer sind als die typischen Zeiten der β-Zerfälle. Solche Verhältnisse liegen kurzzeitig bei Supernovaexplosionen (explosives Heliumbrennen) vor. Dann werden sehr schnell ($\tau_n \simeq 10^{-7}$s) Neutronen eingefangen, bis schliesslich die Neutronenseparationsenergie der gebildeten Kerne gleich Null wird (Neutronendrip-Linie in Fig. 14). An dieser Stelle werden die Kerne durch β-Zerfälle (auf der Zeitskala $\tau_\beta \simeq 10^{-2}$s) in solche übergeführt, die eine grössere Neutronenseparationsenergie haben und diese könnten deshalb wieder Neutronen einfangen. In Supernova-Explosionen steht dafür allerdings die Zeit nicht zur Verfügung, da die Neutronenkonzentrationen bereits nach weniger als einer Sekunde zu stark abgefallen sind. Es entsteht so eine sog. r-Elementverteilung, die etwa 20-30 Einheiten rechts von der β-Stabilitätslinie verläuft (siehe Fig. 14). Bei Nachlassen des Neutronenflusses zerfällt dann diese r-Verteilung extrem n-reicher Kerne über β-Zerfall zurück zur Stabilitätslinie. Dabei wird auch die Uraninsel noch erreicht. Bei noch schwereren Kernen bricht aber der r-Prozess-Pfad durch β-verzögerte Spaltung ab, was die Bildung superschwerer Kerne verhindert.

Zur Berechnung der Endverteilung der r-Prozess Kerne benötigt man danach die β-Zerfallseigenschaften von vielen (ca. 6000) neutronenreichen Kernen zwischen β-Stabilitätslinie und Neutron-drip-Linie, also die β-Halbwertszeiten, die Raten für β-verzögerte Neutronenemission und auch die Raten für β-verzögerte Spaltung.

Die besten derzeit existierenden Rechnungen[4),5)] für diese Grössen haben zu Produktionsraten der Kosmochronometer ^{235}U, ^{238}U, ^{244}Pu und ^{232}Th geführt[6)], welche von früher bestimmten Werten durch Fowler und Hoyle etwas abweichen. Die Ergebnisse sind in Tabelle 3 zusammengefasst.

$^{232}Th/^{238}U$	$^{235}U/^{238}U$	$^{244}Pu/^{238}U$	Autoren
1.65	1.65	–	Fowler und Hoyle (1960)
1.90	1.89	0.96	Seeger und Schramm (1970)
1.65	1.42	0.90	Fowler (1972, 1978)
1.70	0.89	0.53	Wene und Johansson (1976)
1.50	1.10	0.40	Krumlinde et al. (1981)
$1.9^{+0.2}_{-0.4}$	$1.5^{+0.5}_{-0.6}$	$0.9^{+0.1}_{-0.2}$	„Standard"-Werte nach Symbalisty und Schramm (1981)
1.39	1.24	0.12	Thielemann, Metzinger, Klapdor (1983)

Tabelle II.3. Produktionsverhältnisse der Kosmochronometer im r-Prozess nach verschiedenen Autoren[6)]

4) H.V. Klapdor, Progr. Part. Nucl. Phys. 10, 131 (1983); Fortschritte der Phys. 33, 1 (1985)
5) K. Grotz, H.V. Klapdor, Phys. Rev. C 30, 2098 (1984), und (1985)
6) F.K. Thielemann et al, Z. Phys. A 309, 301 (1983); Astron. Astrophys. 123, 162 (1983)

Jetzt können schliesslich T und die übrigen Parameter bestimmt werden. Die Tabelle 4 gibt die Resultate[6] für die neuen Produktionsraten der Tabelle 3.

	Meteoritische Häufigkeiten (zur Zeit T+Δ)						
Modell	$^{232}Th/^{238}U$	$^{244}Pu/^{238}U$	$^{129}I/^{127}I$	T*	S	T_R*	Δ*
a)	2.50	0.004	–	16.16	0.062	∞	0.169
		0.005	–	16.10	0.057	∞	0.162
		0.006	1.00	13.93	0.066	21.74	0.153
		0.007	1.40	12.16	0.078	8.77	0.149
		0.008	1.80	10.77	0.090	4.80	0.146
b)	2.32	0.005	–	13.22	0.062	∞	0.158
c)	2.32	0.005	–	16.30	0.065	∞	0.211

*) in Einheiten von 10^9 a,
c) realistischere Behandlung der Kernniveaudichten gegenüber b).

Tabelle II.4.

Parameter des „exponentiellen Modells" galaktischer Evolution abgeleitet aus den berechneten Produktionsraten der Chronometer $^{232}Th/^{238}U$, $^{235}U/^{238}U$, $^{244}Pu/^{238}U$, $^{129}I/^{127}I$ im r-Prozeß und ihren beobachteten Verhältnissen zur Zeit der Kondensation des Sonnensystems

Thielemann et al[6] geben aufgrund dieser Rechnungen die folgenden Werte für T und Δ an:

$$T = \left(16.1^{+2}_{-5}\right) \times 10^9\,a \qquad (8.15)$$

$$\Delta \simeq 0.16 \times 10^9\,a. \qquad (8.16)$$

Für das Alter der Milchstrasse ergibt sich daraus

$$T_G = \left[\,16.1^{+2}_{-5} + 0.16 + 4.55\right] \times 10^9\,a$$

$$= \left(20.8^{+2}_{-5}\right) \times 10^9\,a. \qquad (8.17)$$

Die angegebenen Unsicherheiten in (8.17) sind wohl zu optimistisch eingeschätzt. Von den kernphysikalischen Seiten abgesehen, erhält man eine untere Grenze für $T+\Delta$ (und damit für T_G) für den Extremfall einer einmaligen Nukleosynthese in einem Ereignis. Dann ist $T=0$, $\varrho(t)=\delta(t)$ und Gl. (8.10) gibt

$$T+\Delta = \frac{\ln R_{ij}}{\lambda_i-\lambda_j}\,.$$

(Dies ist der halbe Wert von (8.14)!) Mit den aufgeführten Werten für ^{232}Th und ^{238}U in den Tabellen 2 und 3 findet man $T+\Delta \simeq 6\times 10^9 a$. Eine untere Grenze

$$T_G \gtrsim 10\times 10^9\ a \qquad (8.18)$$

dürfte also unabhängig vom verwendeten Modell der galaktischen Evolution sein.

Dieses beachtliche Ergebnis ist mit den übrigen Altersbestimmungen verträglich.

Der Vollständigkeit halber, wollen wir auch noch kurz auf die radioaktive Altersbestimmung des Sonnensystems eingehen. Diese beruhen auf der folgenden Datierungsmethode des Zeitpunktes, bei dem eine Probe (von Meteoriten, Mondgestein, Erdmineralien) isoliert wurde.

Ein radioaktiver Kern P zerfällt exponentiell und bereichert das Material mit einem Tochterkern D. Zu jedem Zeitpunkt ist die Summe der Häufigkeiten P+D dieselbe,

$$P(t) + D(t) = P_0 + D_0 .$$

Bezieht sich der Index 0 auf die Gegenwart (Zeit t_0 nach der Bildung des Sonnensystems zur Zeit $t=0$), so gilt also wegen $P_0 = P(t) \exp(\lambda(t-t_0))$:

$$P_0 [1 - e^{\lambda(t_0 - t)}] + D_0 - D = 0 .$$

Diese Gleichung dividieren wir durch die Häufigkeit eines stabilen Isotops D_s von D und erhalten

$$\left(\frac{D}{D_s}\right)_{\text{jetzt}} - \left(\frac{D}{D_s}\right)_t = \left(\frac{P}{D_s}\right)_{\text{jetzt}} \left[e^{\lambda(t_0-t)} - 1\right] . \qquad (8.19)$$

Misst man also P/D_s und D/D_s in verschiedenen Proben, oder verschiedenen Einschlüssen derselben Probe, so erhält man nach (8.19) – falls diese gleichzeitig entstanden sind – eine lineare Abhängigkeit, deren Steigung direkt das Alter $(t_0 - t)$ liefert.

Ein typisches Beispiel ist in Fig. 15 gezeigt. Hier ist $P = {}^{87}Rb \xrightarrow{\beta^-} D = {}^{87}Sr$ $(\lambda = 1.39 \times 10^{-11}\, \bar{a}^{-1})$ und das stabile Referenzisotop D_s ist ${}^{86}Sr$. Die gemessenen Punkte für 6 Chondriten liegen tatsächlich auf einer Geraden, was für deren gemeinsamen Ursprung spricht.

Dasselbe Alter erhält man auch für die Daten[7] des Allende Meteoriten (Fig. 16). Dabei wurden die

---

7) T. Kirsten, 'The Origin of the Solar System' (S.F. Dermott ed., Wiley & Sons 1978), p. 267

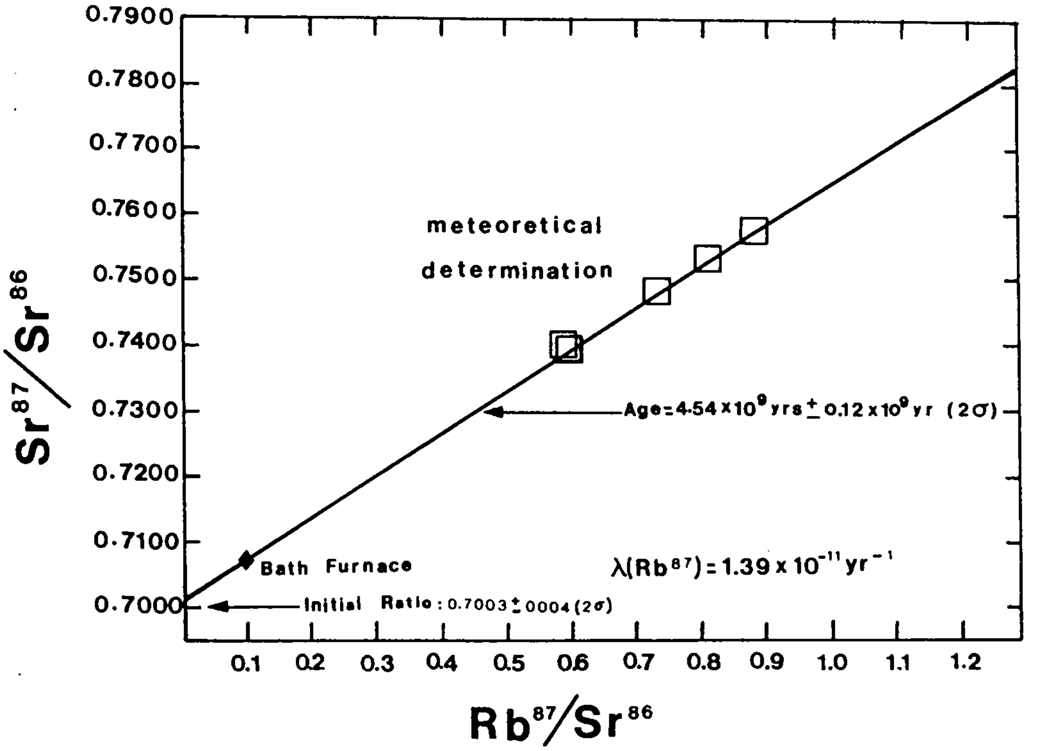


Fig. II.15. ^{87}Rb - ^{87}Sr Evolutionsdiagramm für sechs chondritische Meteoriten

radioaktiven Zerfälle

$$^{238}U \longrightarrow {}^{206}Pb + 8\,{}^{4}He \quad , \quad T_{1/2} = 4.49 \times 10^{9}\,a$$

$$^{235}U \longrightarrow {}^{207}Pb + 7\,{}^{4}He \quad , \quad T_{1/2} = 0.713 \times 10^{9}\,a$$

verwendet (wir geben nur die stabilen Endprodukte der Reihen. Das stabile Referenzisotop I_s ist hier ^{204}Pb. Wiederum liegen die Daten sehr schön auf einer Geraden und dies ermöglicht eine sehr genaue Altersbestimmung:

$$\boxed{T = (4.553 \pm 0.004) \times 10^{9}\,a}$$

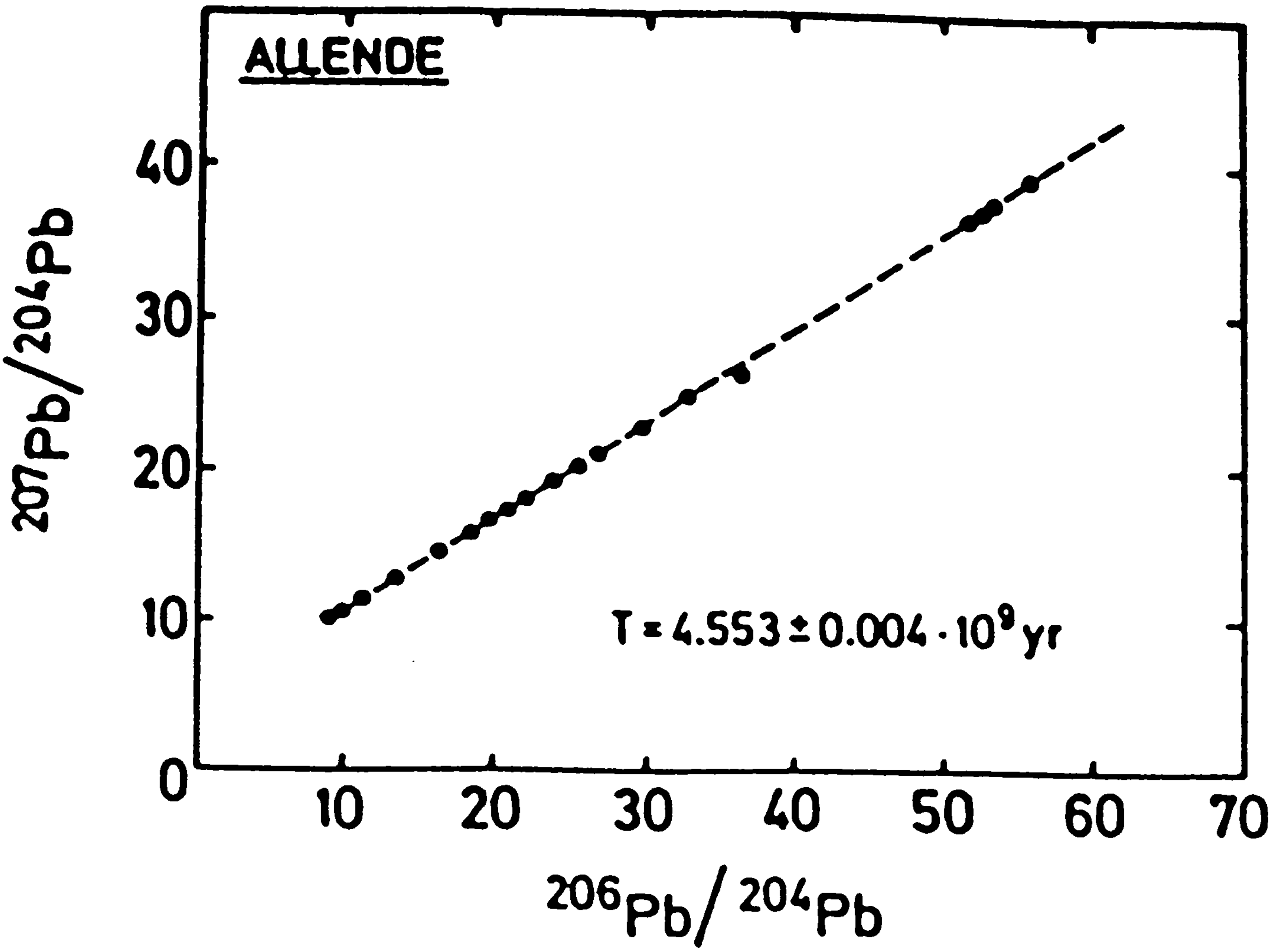


Fig. II.16. ^{207}Pb–^{206}Pb – Isochrone aus verschiedenen Einschlüssen des Allende Meteoriten

Für die dritte Altersbestimmung gemäss Fig. 12 müssen wir uns jetzt den Parametern H_0 und Ω_0 zuwenden.

8.2 Der Hubble – Parameter

"Die Weltlinien der Sterne gehören dann zu einem einzigen divergenten 'Bündel' von ∞^3 geodätischen Linien; ihr Divergieren gegen die Zukunft hin legt Zeugnis ab von einer universellen auseinander-strebenden Tendenz der Materie...."

(H. Weyl, 1923 !)

In der ersten Arbeit Hubbles im Jahre 1929 betrugen die Maximalgeschwindigkeiten der Galaxien um 1200 km/s, was einer Rotverschiebung von $z \simeq 0.004$ entspricht. Für die Bestimmung der Entfernungen wurden die Cepheiden und die hellsten Sterne in den Galaxien als Entfernungs-indikatoren benutzt. Für grössere Entfernungen schlug Hubble 1936 vor, ganze Galaxien als Indikatoren zu benutzen. Auch heute noch benutzt man für die grössten Abstände die hellsten Galaxien von reichen Haufen als "Standardkerzen". (Hubble selbst benutzte die fünft-hellste Galaxie.) Der ursprünglich von Hubble bestimmte Wert von H_0 war etwa 5 bis 10 mal zu gross. Eine erste Reduktion um einen Faktor 2 wurde von Baade vorgenommen, als er 1952 die zwei stellaren Populationen entdeckte. Die zweite Revision erfolgte 1958, als Sandage entdeckte, dass das, was man vorher für helle Sterne in entfernten Galaxien gehalten hatte, sehr helle Bereiche von heissem Gas waren, und diese entfernteren Galaxien daher in noch grösseren Entfernungen lagen.

Die Bestimmung der Hubble-Konstante ist gleichbedeutend mit der ausserordentlich schwierigen Aufgabe, die Entfernungen von entfernten extragalaktischen Systemen zu messen. Die heute gebräuchlichen Methoden und Ergebnisse sind auf angenehme Weise im folgenden kürzlich erschienenen Buch dargestellt (unten als [MR] zitiert):

M.R. Robinson, "The Cosmological Distance Ladder", Freeman & Company 1985.

Aus diesem Buch ist auch Fig. 17 entnommen, in welcher die Bereiche der verschiedenen "Sprossen" der "Distanzleiter" angegeben sind. (Eine knappe Darstellung der Entfernungsbestimmungsmethoden findet man auch in [SW, §14.5].)

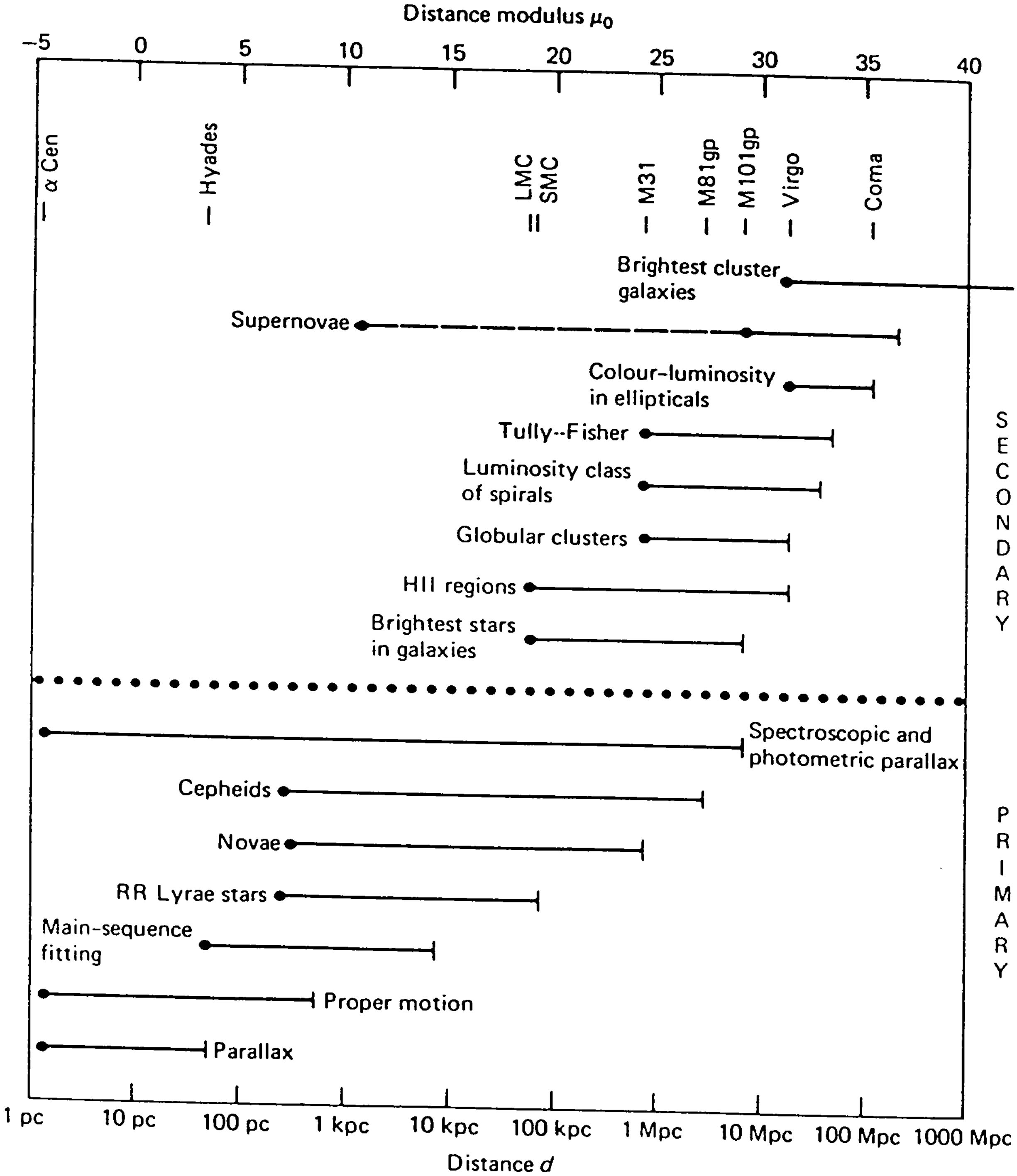
a) Distanzbestimmungsmethoden

Wir machen zu Fig. 17 lediglich ein paar Bemerkungen, damit auch astronomisch weniger Versierte gewisse Vorstellungen der benutzten Methoden und ihrer Unsicherheiten haben.

(i) Für Distanzen bis zu ~ 30 pc funktioniert die direkte (trigonometrische) Messung der Parallaxe, welche erstmals 1838 von Bessel erfolgreich angewandt wurde. Wir benutzen die Gelegenheit, um den Ursprung der Einheit 1 pc zu erläutern. Die Parallaxe p (oft als π bezeichnet) ist der Winkel, unter dem

Fig. II. 17

The cosmological distance ladder, showing the range of distances over which different distance indicators have been applied. The lower half illustrates the indisputably primary methods; the upper half the secondary and tertiary methods. The supernova method has been placed here arbitrarily, since there is still some controversy about its validity as a primary method.



der Erdbahnradius vom Stern aus erscheinen würde, also gleich dem Winkel unter dem uns die grosse Halbachse der elliptischen Bewegung des Sterns auf der Himmelsphäre erscheint. Per Def. entspricht nun 1 parsec der Parallaxe $p = 1''$, d.h.

$$1\,pc = \frac{60 \times 60 \times 360}{2\pi} \text{ astron. Einheiten}$$
$$= 3.086 \times 10^{18}\,cm = 3.26 \text{ Lichtjahre.} \tag{8.20}$$

Einer Parallaxe p'' entspricht also die Entfernung $1/p$ parsec. Parallaxenbestimmungen sind bis heute auf $p \gtrsim 0.04''$ begrenzt. Der Satellit Hipparcos wird es ermöglichen, diese Entfernungsmethode um einen Faktor 3–10 auszudehnen.

(ii) In einem nächsten Schritt benutzt man die Eigenbewegung des Hyaden-Haufens. Die Bewegungsvektoren an der Sphäre zeigen alle auf einen Konvergenzpunkt (Fig. 18)

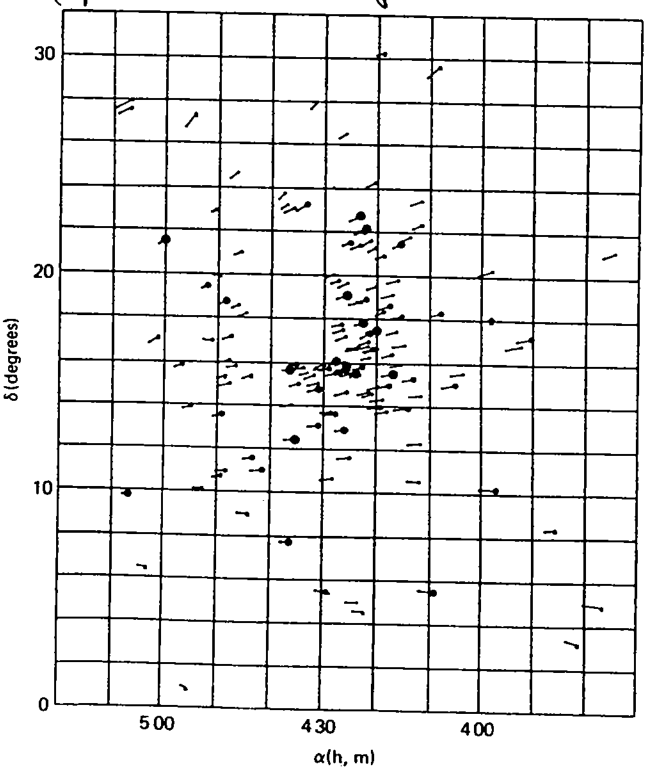


Fig. II. 18. Eigenbewegung der Sterne der Hyaden

Zur näheren Erläuterung betrachten wir zunächst die Eigenbewegung μ eines einzelnen Sterns (gewöhnlich in Bogensekunden pro Jahr angegeben). Diese ist mit der Tangentialkomponente V_t der Sterngeschwindigkeit folgendermassen verknüpft. Ist p die Parallaxe des Sterns in Bogensekunden, so ist μ/p gleich V_t in astronomischen Einheiten pro Jahr, also

$$V_t = \frac{\mu}{p}\,\frac{1.5\times 10^{13}}{3.16\times 10^{7}}\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}}$$

$$= 4.74\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{sec}}\cdot\frac{\mu}{p}\,. \qquad (8.21)$$

Die radiale Komponente V_r kann mit dem Dopplereffekt bestimmt werden.

Haben nun die Sterne eines Haufens alle gleiche Geschwindigkeitsvektoren relativ zur Sonne (die pekuliaren Geschwindigkeiten seien klein), dann zeigen diese alle auf der Himmelssphäre auf einen Konvergenzpunkt, genauso wie parallele Linien durch perspektivische Wirkung am Horizont zusammenzukommen scheinen. Die (mittlere) Geschwindigkeit des Haufens sei $\vec{V}$ (s. Fig. 19). Bezeichnet ϑ den Winkel vom Stern zum Konvergenzpunkt, so ist dies offensichtlich auch der Winkel zwischen $\vec{V}$ und der radialen Richtung zum Stern. Also gilt nach (8.21) $V_r = V\cos\vartheta$, $V_t = V\sin\vartheta = 4.74\,\mu/p$, d.h.

$$p = \frac{4.74\,\mu}{V_r \,\mathrm{tg}\,\vartheta}\,. \qquad (8.22)$$

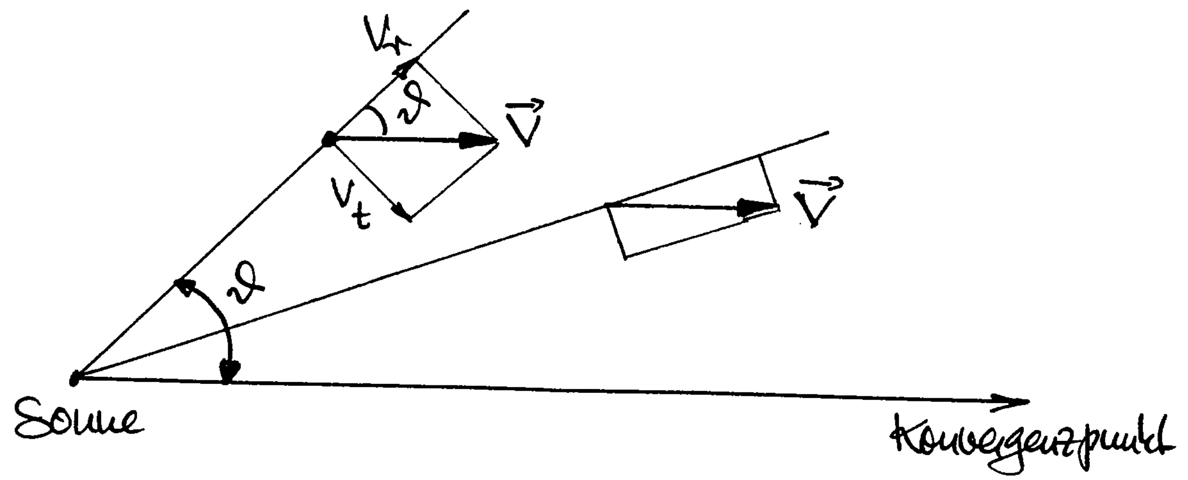


Fig. II.19. Methode der Stromparallaxen

Diese Methode der Stromparallaxen ist an Reichweite und oft auch an Genauigkeit der Methode der trigonometrischen Parallaxe überlegen. Sie wurde dazu benutzt, um die absoluten Helligkeiten ~~des~~ einiger Sterne des Hyaden-Haufens zu bestimmen, welche sich alle noch auf der Hauptreihe befinden.

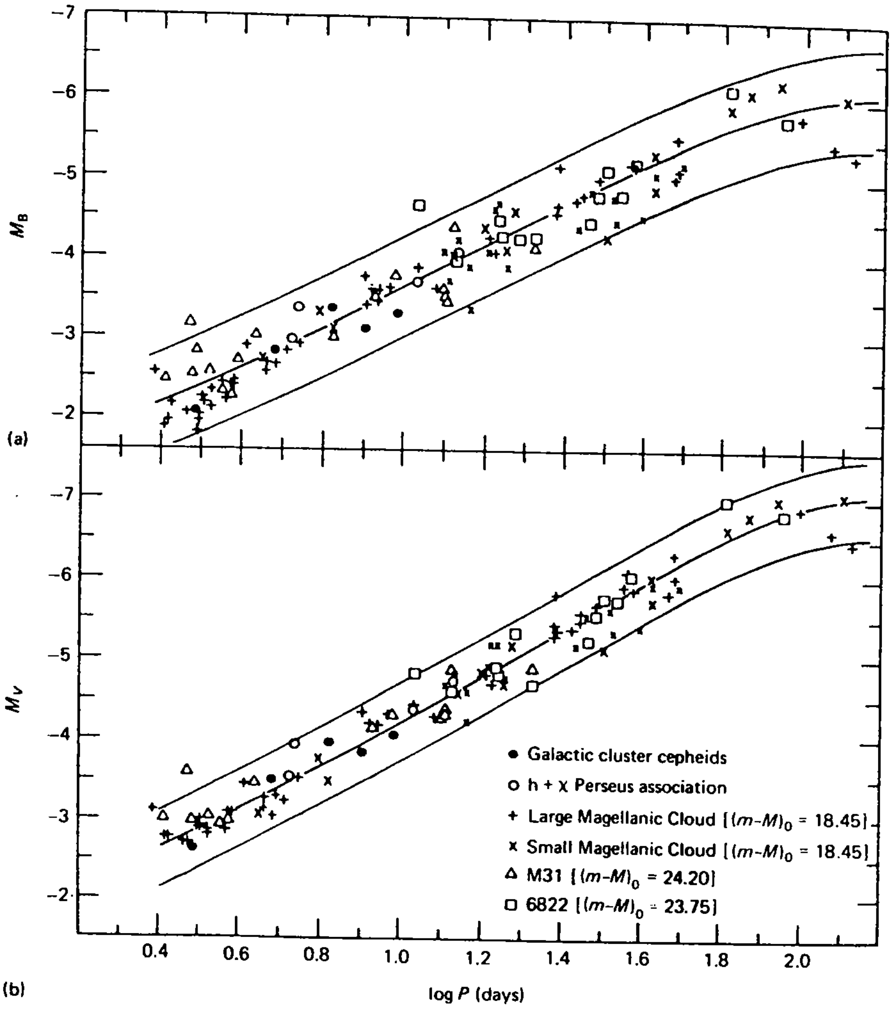
(iii) Der nächste Schritt nach diesen kinematischen Methoden besteht in der Bestimmung des Abstandes zu anderen, weiter entfernten Haufen über den Vergleich scheinbarer Helligkeiten von Hauptreihensternen gleicher Farbe in diesen Sternhaufen mit den Hyaden. (Letztere spielen also in der ganzen Distanzleiter eine wesentliche Rolle.)

(iv) Damit ist es nun möglich, die Periode-Leucht-Farbe-Beziehung der pulsierenden Sterne, welche theoretisch gut verstanden ist, zu kalibrieren. Diese Relation ist für die (klassischen oder δ-) Cepheiden (Population I) in Fig. 20 gezeigt. (Für nähere Erläuterungen sei auf [MR, §3.1] verwiesen.)

Daneben gibt es auch die Haufenveränderlichen

FIGURE II.20

Period–luminosity relation for Cepheids in the Galaxy, Large and Small Magellanic Clouds, M31, and NGC 6822. (a) Absolute blue magnitude M_B at mean light, corrected for interstellar extinction, versus log P. (b) Absolute visual magnitude M_V at mean light versus log P. (From [S3].)



oder <u>RR Lyrae-Sterne</u> mit Perioden von ~0.3 bis 0.9 Tagen. Sie gehören zum Halo und Kern der Milchstrasse und sind in Kugelhaufen anzufinden; es sind also Population II Sterne. (Die Unterscheidung der beiden Typen von Veränderlichen war historisch sehr wichtig, wie bereits bemerkt wurde.)

Im selben Distanzbereich wie die Veränderlichen werden gelegentlich auch Novae verwendet. Diese stellen aber keine guten Einheitskerzen dar, da die beobachteten Eigenschaften sehr breit streuen.

(v) Jetzt sind wir in der Lage, die Abstände zu einigen Galaxien der <u>Lokalen Gruppe</u>, insbesondere von Andromeda, zu bestimmen. Die Methode der Cepheiden funktioniert aber nur bis zu etwas mehr als einem Mpc. (Die Entfernung von Andromeda ist 0.7 Mpc.)

Die Genauigkeit der bis jetzt besprochenen sog. primären Distanzmethoden wird durch die Tabelle 5 illustriert, in welcher die Ergebnisse von verschiedenen Autoren verglichen sind.

TABLE II.5
Comparison of Local Group distance moduli.

Authors	*LMC*	*SMC*	*M31*	*N6822*
Adopted μ_0 ($\mu_{Hya} = 3.30$)*	**18.70**	**19.12**	**24.25**	**23.77**
d, kpc	55	67	710	570
Sandage and Tammann (1974) [S7] ($\mu_{Hya} = 3.03$)	18.59	19.27	24.16	23.95
van den Bergh (1977) [B8] ($\mu_{Hya} = 3.03$)	18.43	18.82	24.02	23.64
de Vaucouleurs (1978) [V3] ($\mu_{Hya} = 3.29$)	18.31	18.62	24.07	23.73
Humphreys (1983) [H10] ($\mu_{Hya} = 3.03$)	18.6	19.0		23.2

* Corrected for line blanketing, $\Delta\mu_0 = -0.15$.

Mit Hipparcos und dem Space-Teleskop wird es möglich sein, verbleibende Unsicherheiten wesentlich zu reduzieren.

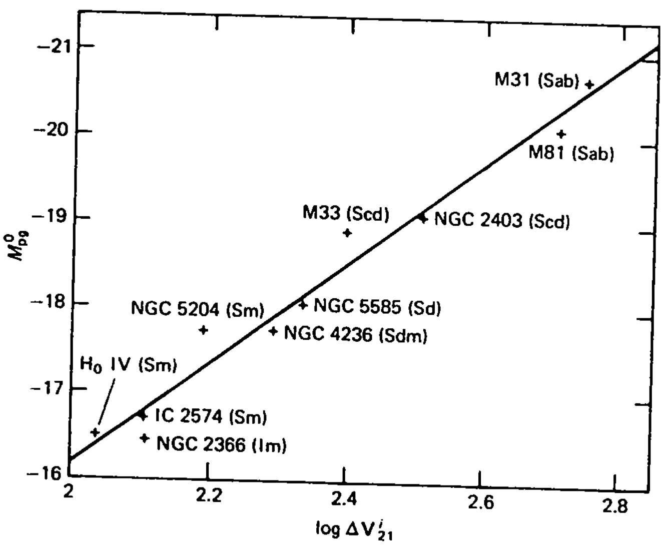
(vi) Nun kommen wir zu den sekundären Distanz-indikatoren, welche auf den Entfernungsbestimmungen zu einigen benachbarten Galaxien fussen.

Eine erste Methode benutzt die Kugelsternhaufen, deren absolute Helligkeiten in M31 (Andromeda) bekannt sind. Kugelsternhaufen kann man z.B. auch in M87, der dominanten elliptischen Galaxie des Virgo-Haufens sehen.

Andere Methoden benutzen die hellsten sichtbaren Sterne, die linearen Ausdehnungen der hellsten HII-Regionen (welche offenbar ziemlich konstant sind), sowie Typ I-Supernovae. Für Einzelheiten verweise ich auf [MR, §§ 3.2, 4.1–3].

In den letzten Jahren hat eine neue Methode zunehmend an Bedeutung gewonnen, welche auf B. Tully und R. Fisher zurückgeht. Im Jahre 1977 entdeckten die beiden eine strenge Korrelation zwischen der absoluten Helligkeit einer Spiralgalaxie und der mittleren Rotationsgeschwindigkeit, welche sich in der Breite der 21 cm Linie manifestiert. Ein Beispiel einer Kalibration der Tully-Fisher-Methode zeigt Fig. 21 [MR, p. 187].

FIGURE II.21 *Revised calibration of optical Tully–Fisher method. Vertical axis is the absolute photographic magnitude of a galaxy M^0_{pg}, corrected for interstellar and internal extinction; horizontal axis is logarithm of the width of the 21-cm line ΔV^i_{21} in kilometers per second, corrected for inclination.*



Zu noch etwas grösseren Entfernungen kommt man mit Hilfe der Korrelation zwischen Farbe und Helligkeit von elliptischen Galaxien [MR, § 4.5].

(vii) Schliesslich muss noch die wichtigste Methode erwähnt werden, welche für die Bestimmung sehr grosser

Distanzen ($\gtrsim 100$ Mpc) benutzt wird. Diese geht davon aus, dass die <u>hellsten Galaxien von reichen Haufen</u> gute Einheitskerzen sind. Jedenfalls zeigt die Beziehung zwischen scheinbarer Helligkeit und Rotverschiebung erstaunlich wenig Dispersion. (Darauf kommen wir in Abschnitt 8.3 zurück, siehe Fig. 25.)

Auf jeder Stufe dieser langen Leiter sind Fehler möglich. Speziell die sekundären Methoden beruhen auf rein empirischen Korrelationen, welche — wie etwa im Falle der HII-Regionen — zu relativ grossen systematischen Fehlern führen. Eine kritische vergleichende Diskussion findet man in [MR, §4.9]. Wir reproduzieren daraus als Illustration die Tabelle 6, welche verschiedene Be-

TABLE II.6

Comparison of recent estimates of the distance modulus to the Virgo cluster.

Method	μ_0	*Authors*
Resolution difference	31.56 ± 0.50	Sandage and Tammann (1976) [S12]
	31.15 ± 0.50	Mould et al. (1980) [M5]
Luminosity class	31.70 ± 0.11	Sandage and Tammann (1976) [S12]
	30.91 – 31.35	Kennicutt (1979) [K2], Mould et al. (1980) [M5]
Luminosity index	31.25 ± 0.14	De Vaucouleurs (1979) [V6]
HII region size	31.99 ± 0.30	Sandage and Tammann (1976) [S12]
	30.93 – 31.47	Kennicutt (1979) [K1], Mould et al. (1980) [M3]
HII region luminosities	31.4 ± 0.25	Kennicutt (1981) [K3]
Globular clusters	31.45 ± 0.50	Sandage and Tammann (1976) [S12]
	31.70 ± 0.30	Hanes (1979) [H3]
	30.90 ± 0.30	Harris and Racine (1979) [H5]
Velocity ratio	31.75 ± 0.42	Sandage and Tammann (1976) [S12]
	31.17 ± 0.35	Mould et al. (1980) [M5]
Color – magnitude diagram	30.73 ± 0.39	Visvanathan (1978) [V9]
Color – magnitude – L_c method	31.52 ± 0.16	Visvanathan and Griersmith (1979) [V12]
Supernovae		
Type I, compared with M101	31.81 ± 0.85	Sandage and Tammann (1976) [S12]
Type I, Baade – Wesselink	32.91 ± 0.80	Sandage and Tammann (1976) [S12], Branch and Pachett (1973) [B11]
Type I, Baade – Wesselink	31.73 ± 0.62	Branch (1979) [B10], Mould et al. (1980) [M5]
Type II	31.35 ± 0.80	Sandage and Tammann (1976) [S12]
	30.53 ± 0.80	Carney (1980) [C1]
Magnitude – surface brightness relation	31.04 ± 0.56	Holmberg (1969) [H7], Mould et al. (1980) [M5]
21-cm infrared method	30.98 ± 0.09	Mould et al. (1980) [M5]

stimmungen des Entfernungsmoduls zum Virgo-Haufen wiedergibt.

b) Bestimmungen der Hubble-Konstante

In Anbetracht der vorangegangenen Diskussion (und erst recht bei genauerer Betrachtung) ist es kaum erstaunlich, dass verschiedene Gruppen zu unterschiedlichen Werten von h_0 im Bereich $\frac{1}{2} \leq h_0 \leq 1$ kommen. Etwas irritierend ist freilich der Umstand, dass die Protagonisten von $h_0 = \frac{1}{2}$ und diejenigen von $h_0 = 1$ nichtüberlappende Fehler angeben.

Da der Lokale Superhaufen relativ grosse pekuliare Geschwindigkeiten hat (s. Abschnitt 8.4), muss man vermutlich zu Distanzen gehen, welche weiter als etwa 40 Mpc vom Virgo-Haufen entfernt sind. Vorallem dann spielt aber der sog. Malmquist-Effekt eine Rolle, der darauf beruht, dass die benutzten Samples (Kataloge) helligkeitsbegrenzt sind. Dieser Effekt wird dann bedeutsam, wenn eine merkliche Dispersion in der Helligkeitsverteilung vorliegt (siehe [MR, Appendix A 17.4]). Auf seine Wichtigkeit hat vorallem Tammann hingewiesen, während diese von de Vaucouleurs heftig bestritten wurde. Einige der Gründe für die unterschiedlichen Werte von H_0 der zwei Hauptgruppen sind in Tabelle 7 aufgeführt.

TABLE II.7

Some of the causes of the difference between Sandage and Tammann's "long" ($H_0 \sim 50$) and de Vaucouleurs's "short" ($H_0 \sim 100$) distance scales.

	Sandage and Tammann		de Vaucouleurs
Method or factor	*1970–1974*	*1982*	*1976–1979*
Interstellar extinction law	Low values		High values
Internal extinction	Neglected in some applications (bright stars, N2403 cepheids)		Included
Cepheids	Use period–luminosity–color relation		Uses period-luminosity relation
RR Lyrae, novae	Used to justify $\mu_{Hya} = 3.03$		Given equal weight to Cepheids
Local Group distances	Based entirely on Cepheids		Based on several methods, including secondary methods (i.e., circular)
Brightest red stars	Not used	Sole secondary indicator	Used
Brightest blue stars	Application to M101 involves extrapolation	Not used	Used
HII region diameters	Systematic error present; application to M101 involves extrapolation	Not used	Sandage–Tammann error corrected
HII rings	Not used	Not used	Almost all galaxies in which indicator has been studied are involved in calibration
HII velocity dispersion	Not used	Not used	Extrapolation in application to M101
Brightest globular clusters	Used to confirm scale		Used
Tully–Fisher method	Used to confirm scale	Not used	Used as linearity test
Supernovae	Used to confirm scale	Type I supernovae sole tertiary indicator	Used as linearity test
Luminosity class or index	Sole tertiary indicator	Not used	Main tertiary indicator (with isophotal diameters)

Verschiedene Bestimmungen von H_0 zeigen die folgenden Figuren 22–24 aus [MR, § 6.1], für deren nähere Diskussion wir auf die Quelle verweisen.

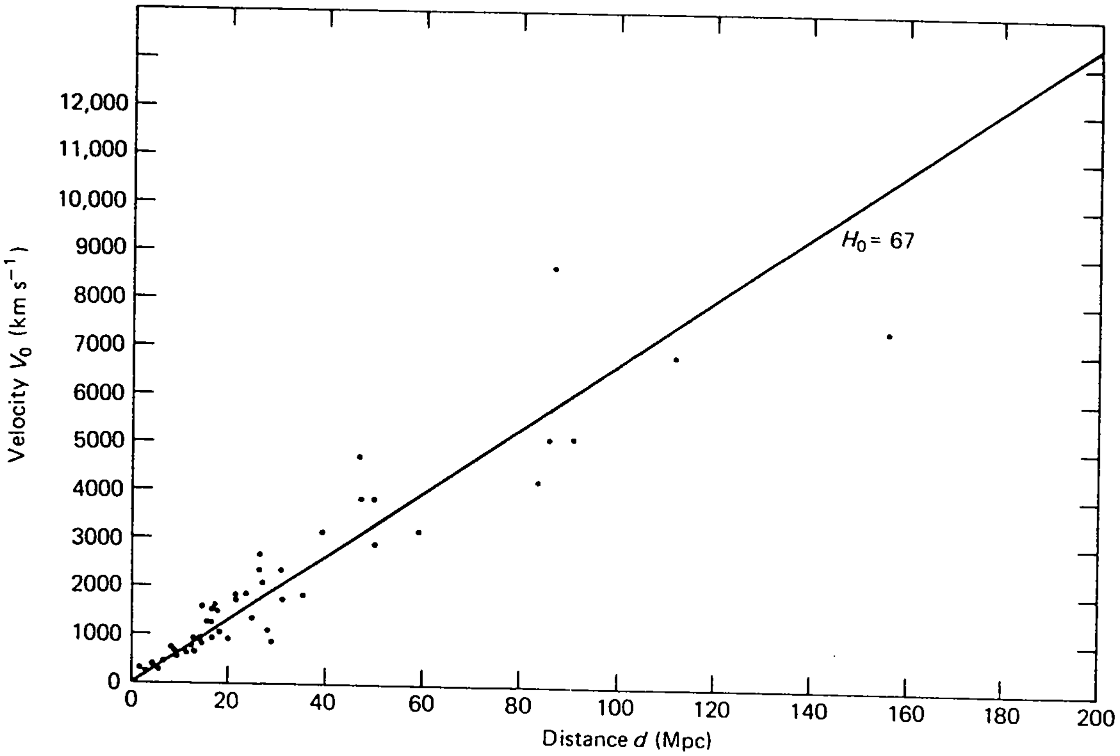


FIGURE II.22

Velocity–distance relation for groups and clusters of galaxies. Velocities corrected for galactic rotation. Data are taken from Table 4.15. Straight line corresponds to $H_0 = 67$ *[Eq. (6.3)].*

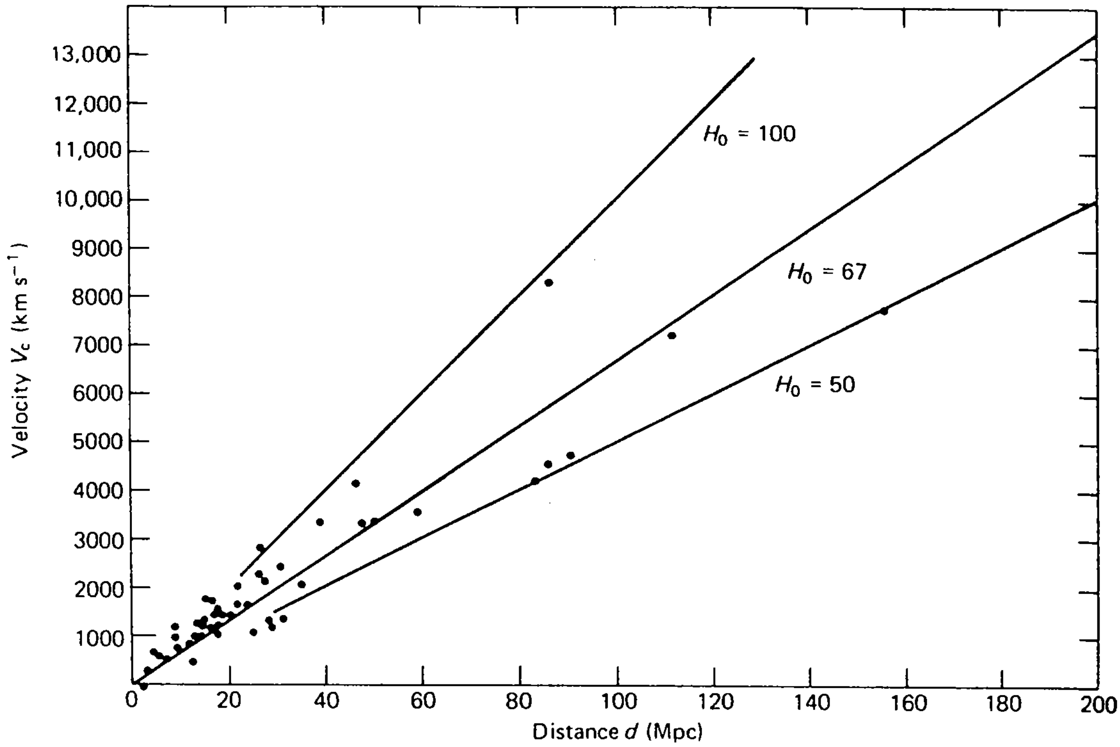


FIGURE II.23

As Fig. 6.1, but velocities corrected also for our Galaxy's absolute motion in space (taken to be 546 km s^{-1} *toward* l = 261°, b = 39°; *Table 5.3). Straight lines correspond to* $H_0 = 67$ *[Eq. (6.3)],*

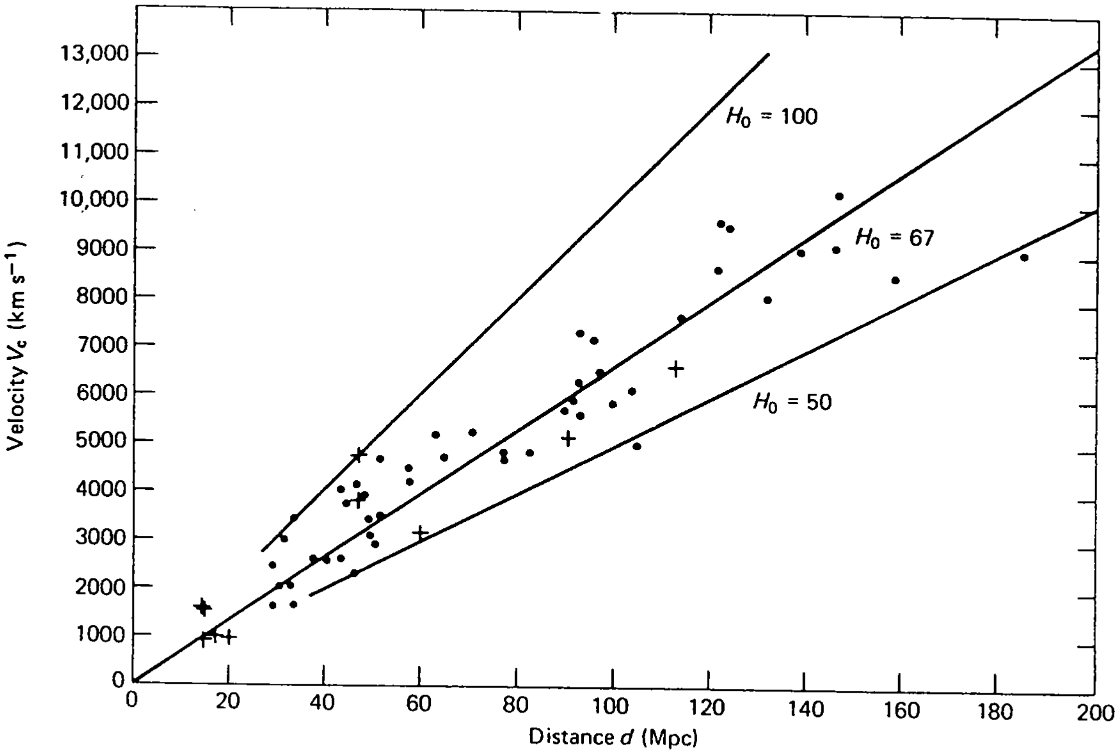


FIGURE II.24

Velocity–distance relation for brightest cluster galaxies. Velocities corrected for galactic rotation and for the Galaxy's absolute motion in space.

Es ist amüsant, dass M. Robinson als "neutraler Schiedsrichter" auf den Kompromisswert

$$H_0 = 67 \pm 15 \text{ km s}^{-1}\,\text{Mpc}^{-1} \qquad (8.23)$$

kommt. Einige der von ihm aufgeführten Unsicherheitsquellen findet man in der Tabelle 8.

TABLE II.8

Factors contributing to uncertainty in H_0.

Possible systematic errors in primary indicators (mag)		*Impact on Local Group distance moduli (mag)*
Distance to Hyades	0.1	0.08
Main-sequence correction due to Hyades abundance	0.15	0.12
Interstellar extinction	0.12	0.12
Internal obscuration	≥ 0.12	≥ 0.12
Abundance effects in Cepheids	$\sim 0.08\ \Delta Y/Y$	$\lesssim 0.01$
	$\sim -0.06\ \Delta Z/Z$	± 0.06
(+similar effects for RR Lyrae stars)		
Net uncertainty in mean Local Group distances		0.2 mag.
Net uncertainty in M81 group distance modulus		0.3 mag.
Net uncertainty in Virgo group distance modulus		0.4 mag.
Net uncertainty in distant groups and clusters		0.5 mag.
Uncertainty in H_0 due to uncertainty in absolute motion of our Galaxy		$\leq 5\%$
Net uncertainty in H_0		$\pm 23\%$

Wir fühlen uns ausser Stande, selber zur heftig geführten Kontroverse Stellung zu beziehen. Es ist zu hoffen, dass mit neuen zukünftigen Möglichkeiten (Space Teleskop, etc.) der Wert von H_0 möglichst genau bestimmt werden kann.

8.3 Helligkeit – Rotverschiebungs-Beziehung und Bremsparameter

"Thus the explorations of space ends on a note of uncertainty. And necessarily so. We are, by definition, in the very center of the observable region. We know our immediate neighborhood rather intimately. With increasing distance, our knowledge fades, and fades rapidly. Eventually, we reach the dim boundary – the utmost limits of our telescopes. There, we measure shadows, and we search among ghostly errors of measurement for landmarks that are scarcely more substantial".

E. Hubble (1936)

Lange bestand die Hoffnung, dass es durch einen Vergleich der Beobachtungen mit den theoretischen Beziehungen (3.9) (Fig. 4) und (3.5) (Fig. 3) zwischen scheinbarer Helligkeit und Rotverschiebung, bzw. Winkelausdehnung und Rotverschiebung, möglich sein sollte, den Bremsparameter q_0 zu bestimmen. Diese Hoffnungen wurden leider nicht erfüllt.

Vorallem Sandage hat sich lange Zeit darum bemüht, die Beobachtungen der m–z–Abhängigkeit bis zu sehr entfernten Galaxien auszudehnen, um die Abweichungen von der Linearität (Fig. 4) zu bestimmen. In Fig. 25 zeigen wir ein Resultat dieser Ausdehnungen[8]. Darin sind die m_V–z-Daten für die hellsten E-Galaxien von 85 Haufen wiedergegeben. Für die scheinbaren Helligkeiten wurden neben der K-Korrektur (siehe p. 60) noch weitere Korrekturen angebracht. Die ausgezogenen Kurven geben die theoretische Beziehung (3.9) für verschiedene Werte von q_0.

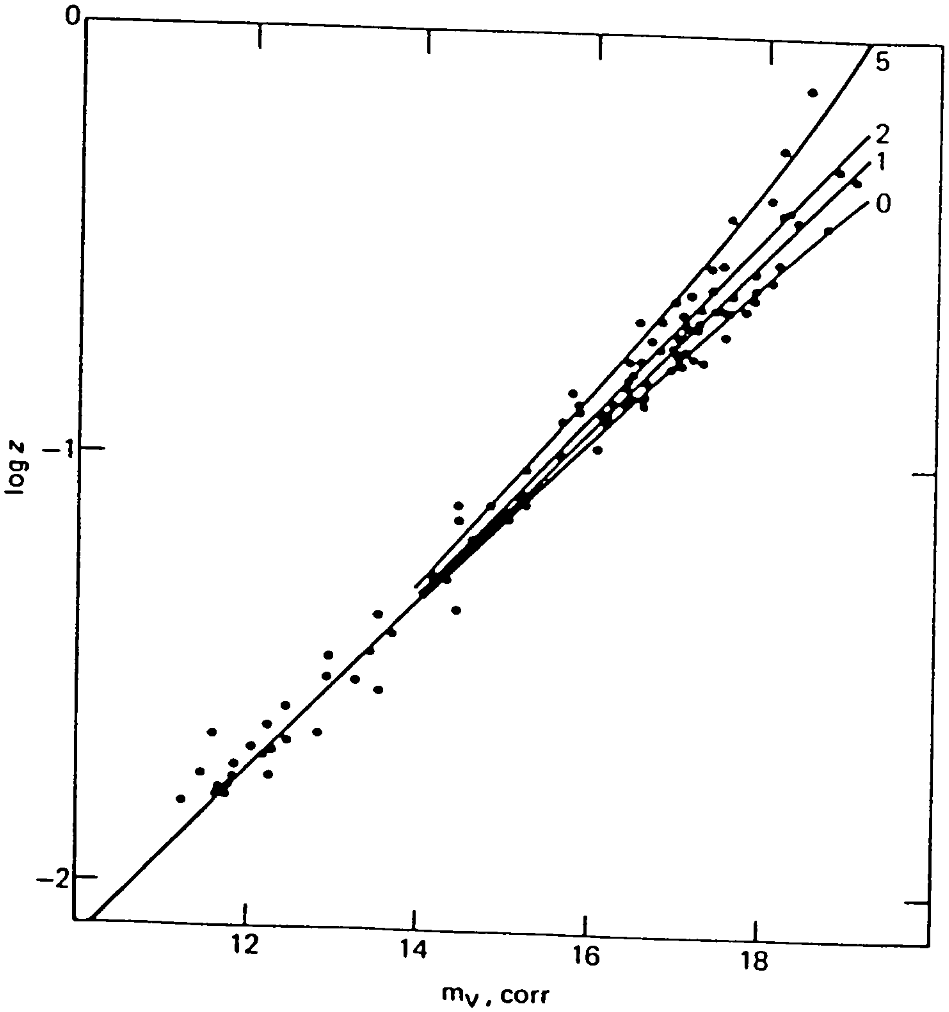


Fig. II.25. Beziehung zwischen scheinbarer (korrigierter) visueller Helligkeit und Rotverschiebung, verglichen mit den theoretischen Kurven für verschiedene Werte von q_0 ($\Lambda = 0$).

8) J. Kristian, A. Sandage und J. Westphal, Ap. J. 221, 383 (1978)

Aus der Abbildung ist ersichtlich, dass die Beobachtungsdaten nicht gestatten, zu bestimmen, ob q_0 grösser oder kleiner als 1/2 ist. Dies verhindert ausserdem eine prinzipielle Schwierigkeit. Das Licht, das von den weit entfernten Galaxien empfangen wird wurde zu einer Zeit ausgesandt, als sich diese im Vergleich zu den nahen Galaxien noch in einem frühen Entwicklungsstadium befanden. Man hat versucht, den Einfluss der Entwicklung der Galaxien auf die Helligkeit und das Spektrum zu berücksichtigen.[9] Wir wissen aber über die Evolution der Galaxien, insbesondere auch in Haufen[10], viel zu wenig, um auf diesem Wege ein zuverlässiges q_0 zu bestimmen. Ein Beispiel einer evolutiven Korrektur ist aus den Figuren 26 und 27 ersichtlich, welche von Sandage aus [K4] stammen.

Grundsätzlich ist es möglich, direkte Informationen über die Entwicklung der Sternpopulationen in Galaxien zu gewinnen, z.B. durch Bestimmung der Farbe als Funktion der Rotverschiebung für gleiche Typen von Galaxien. Bisherige Untersuchungen haben jedoch nicht zu eindeutigen Ergebnissen geführt. Mit dem Space Teleskop wird es vielleicht möglich sein, Galaxien im Frühstadium genauer zu studieren.

---

9) B. Tinsley, Astrophys. J. <u>173</u>, L93 (1972)

10) Eine wichtige Rolle dürfte dabei der "galaktische Kannibalismus" spielen.

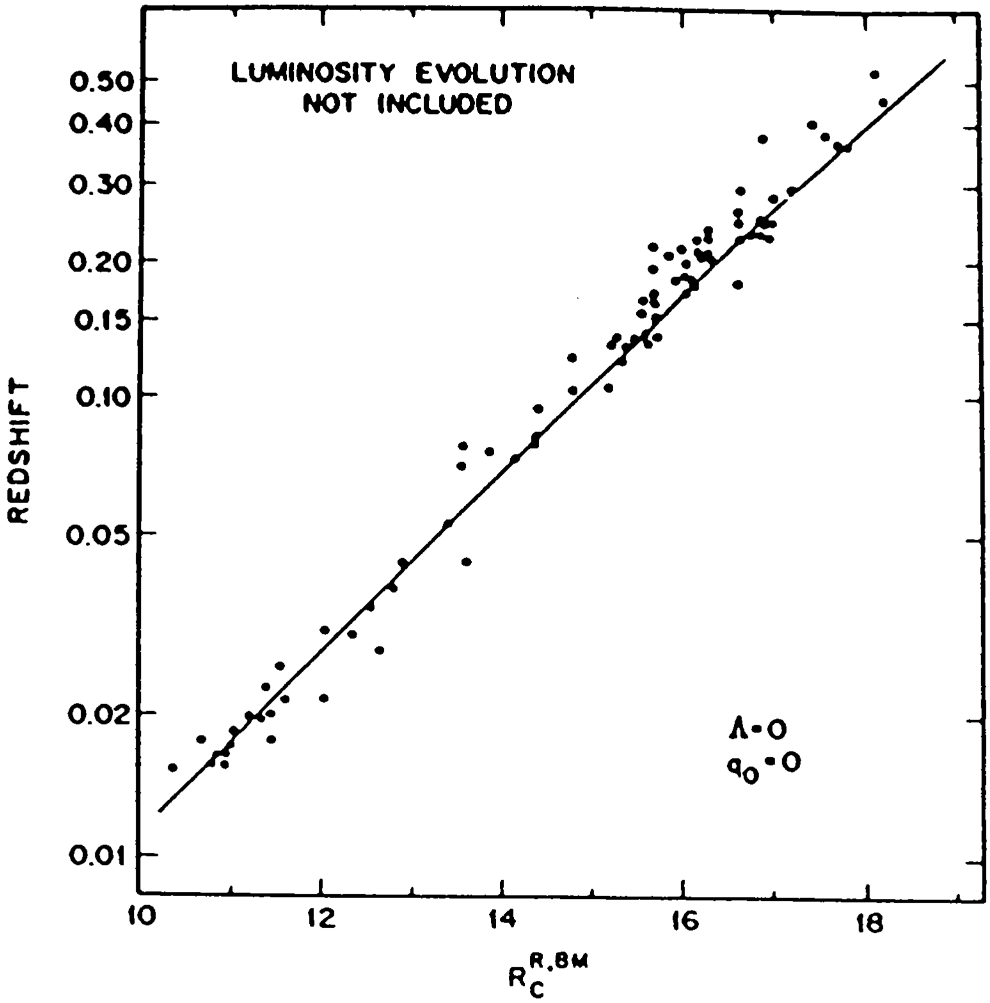


Fig. II.26

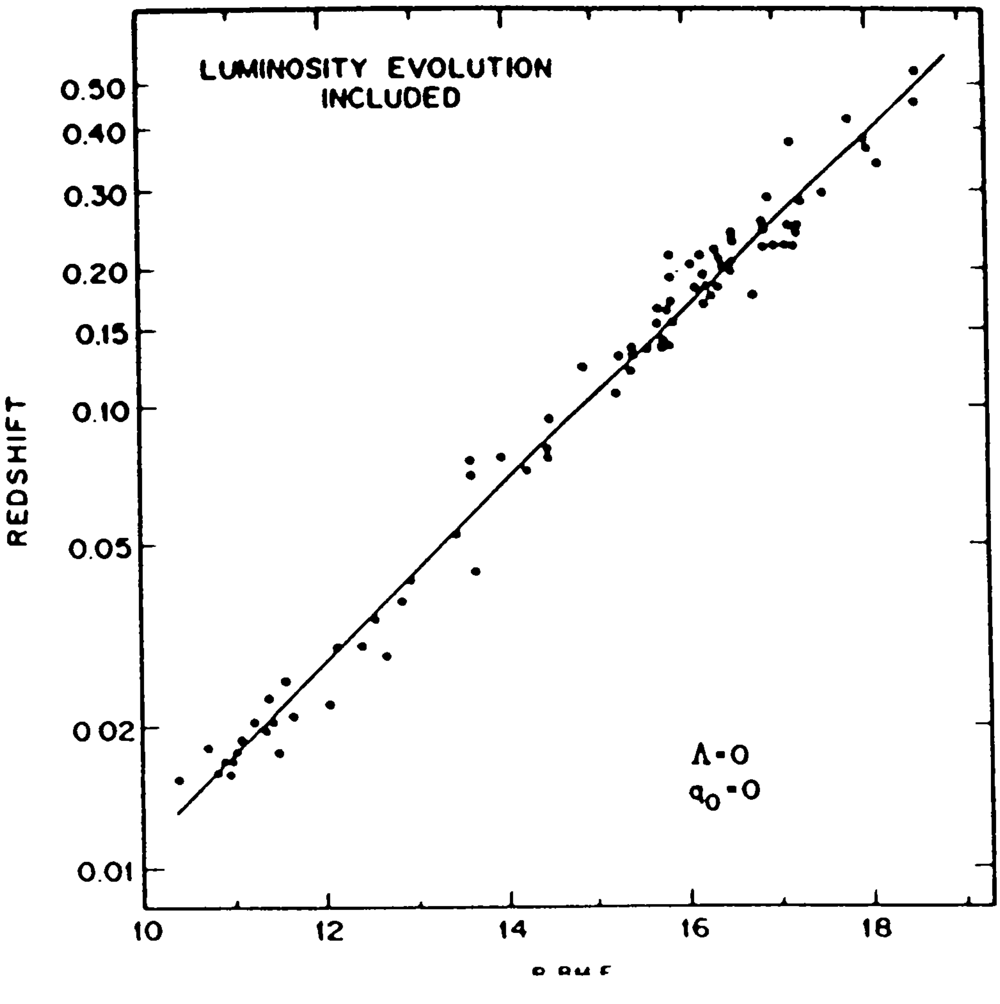


Fig. II.27

Neben der m-z-Beziehung wurde auch die Abhängigkeit (3.5) des Winkeldurchmessers eines Objektes von der Rotverschiebung mit Beobachtungsdaten verglichen. Ein Beispiel ist in Fig. 28 gezeigt, in welchem Durchmesser von Galaxienhaufen verwendet wurden[11]. Es ist aber fraglich,

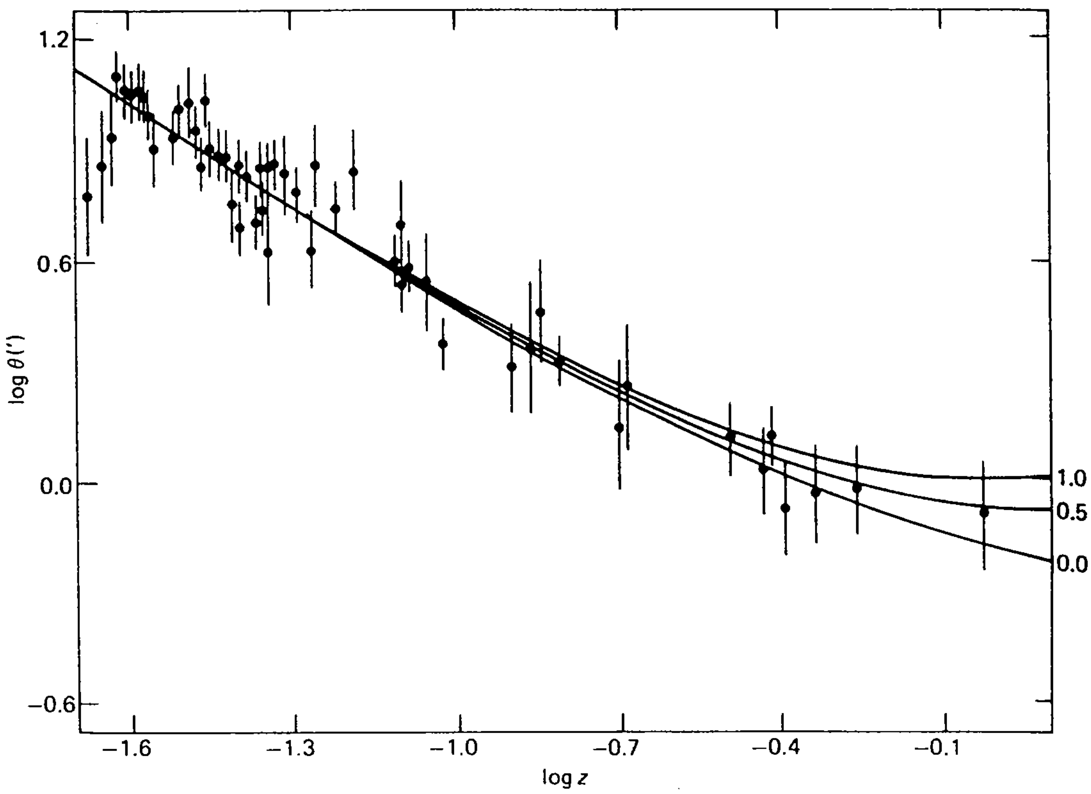


FIGURE II.28

Angular-diameter–redshift diagram, log θ versus log z, for clusters of galaxies. θ is in minutes of arc. Theoretical curves are labeled with the deceleration parameter, q_0, assuming $\Lambda = 0$.

ob diese gute Einheitsmasstäbe abgeben. Jedenfalls zeigen Untersuchungen an Clustern keine charakteristischen Längen. Die Korrelationsfunktion folgt im Gegenteil einem Potenzgesetz (s. [P2]). Die verwendeten Samples aus dem Abell-Katalog sind überdies mit starken Selektionseffekten belastet.

---

11) G. Bruzal und H. Spinrad, Astrophys. J. 220, 1 (1978)

Wir müssen diesen Abschnitt mit der negativen Feststellung beschliessen, dass die klassische m-z-Methode, ebensowenig wie die Zählung von Galaxien und Radioquellen, nützliche Information für q_0 geliefert hat. Daran dürfte sich in der näheren Zukunft kaum etwas ändern, da evolutive Effekte grundsätzliche Unsicherheiten verursachen. Wir können lediglich auf die folgenden bescheidenen Schranken schliessen:

$$-1 < q_0 < 2 . \tag{8.24}$$

Für ein materiedominiertes Universum bedeutet dies $\Omega_0 < 4$.

8.4 Bestimmungen des Dichteparameters Ω_0

Versuche, den Dichteparameter Ω_0 zu bestimmen, waren bis jetzt erfolgreicher. Diese wurden bereits in §1 diskutiert. Nun wollen wir das Thema vertiefen.

a) Störung des Hubble-Flusses durch Virgo

Unsere Galaxis befindet sich in einer kleinen Gruppe von Galaxien (Lokale Gruppe), welche durch den Andromeda-Nebel und die Milchstrasse dominiert wird. Nahe Begleiter unserer Galaxis sind z.B. die Magellanschen Wolken, LMC und SMC.

Die Lokale Gruppe ist Teil eines übergeordneten Systems, des Lokalen Superhaufens[12], in dessen Zentrum sich der Virgo-Haufen von Galaxien befindet, welcher von uns etwa $10\,h_0^{-1}$ Mpc entfernt ist. Die Lage der Milchstrasse im Lokalen Superhaufen ist in Fig. 29 angedeutet. Letzterer ist aber gravitativ nicht gebunden!

Der reiche Virgo-Haufen bremst das Auseinanderfliegen der Galaxien im Lokalen Superhaufen und stört damit den Hubble-Fluss. Diese Störung am Ort der Lokalen Gruppe ermöglicht es, die kosmische Dichte auf Skalen ~ 10 Mpc abzuschätzen. Wir beschreiben im folgenden, wie das bereits angegebene Resultat (1.19) zustande kommt.

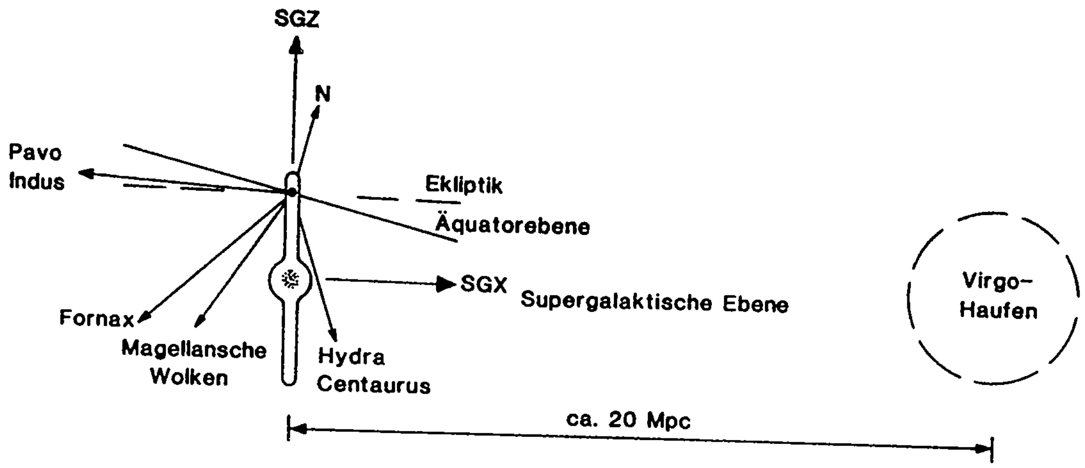


Fig. II.29. Die Lage unseres Milchstraßensystems im Lokalen Superhaufen. Seine Größe ist stark übertrieben. Die Position der Sonne in ihm und einige wichtige Richtungen sind angedeutet.

Da unsere Virgo-zentrische peculiare Geschwindigkeit v_V im Verhältnis zur Hubble-Geschwindigkeit v_H (relativ zum Virgo-Haufen) klein ist, gibt die lineare Newtonsche Störungstheorie eine nützliche Näherung für das Verhalten des Geschwindigkeitsfeldes in der Nähe unserer Position. (Auf nichtlineare Korrekturen kommen wir zurück.) Die

---

12) Für eine gute Beschreibung des Lokalen Superhaufens und seiner Umgebung siehe:
J. Materne, Sterne und Weltraum 24, 194 (1985)

allgemeine linearisierte Newtonsche Störungstheorie wird in [P2, Kap. II] durchgeführt und wir werden diese in Kap. V entwickeln. An dieser Stelle zitiere ich das Resultat und gebe anschliessend eine vereinfachte Herleitung für sphärisch symmetrische Störungen.

Das pekuliare Gravitationsfeld (in mitbewegten Koordinaten) ist

$$\underline{g}(\underline{x}) = G a_0 \int [\rho(\underline{x}') - \rho_b] \frac{\underline{x}' - \underline{x}}{|\underline{x}' - \underline{x}|^3} d^3x' \, , \qquad (8.25)$$

worin $\rho(\underline{x})$ die lokale Dichte und ρ_b die mittlere Dichte bezeichnet. Das pekuliare Geschwindigkeitsfeld ist dann [P2, (14.8)]:

$$\underline{v}(\underline{x}) = \frac{2 f(\Omega_0)}{3 H_0 \Omega_0} \underline{g}(\underline{x}) \, . \qquad (8.26)$$

Die Funktion $f(\Omega_0)$ wird weiter unten definiert [siehe Gl. (8.43)]. Für eine sphärische Massenverteilung mit Massenexzess δM im Abstande R ist

$$g(R) = G \frac{\delta M}{R^2} = \frac{1}{2} H_0^2 \frac{\delta M}{M} R \Omega_0 \qquad (8.27)$$

und damit

$$v = \frac{1}{3} H_0 R f(\Omega_0) \frac{\delta M}{M} \, . \qquad (8.28)$$

Führen wir in (8.28) die Hubble-Geschwindigkeit $v_H = H_0 R$ ein, so kommt schliesslich

$$\boxed{v_V = \frac{1}{3} v_H f(\Omega_0) \frac{\delta M}{M}} \qquad (8.29)$$

* * *

Herleitung von (8.29)

Bevor wir diese Formel anwenden, geben wir eine vereinfachte Herleitung. Dazu betrachten sphärisch symmetrische Störungen des Hubble-Flusses um ein Zentrum (Virgo). Davon greifen wir eine Massenschale heraus, welche die Gesamtmasse M einschliesse. Der Radius $r(t)$ dieser Schale erfüllt dann die Gleichung

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2}\,, \tag{8.30}$$

oder die Energiegleichung

$$\dot{r}^2 = \frac{2GM}{r^2} + C \tag{8.31}$$

als 1. Integral. Wir wählen die Gesamtenergie positiv, d.h. $C > 0$.

Der Abstand einer bestimmten Galaxie vom Zentrum des Superklusters für den ungestörten Hubble-Fluss sei

$$r_b(x,t) = a(t)\,x\,, \tag{8.32}$$

wobei x eine mitbewegte Koordinate ist. Wir normieren $a(t)$ so, dass

$$\frac{4\pi}{3} a^3 \rho_b = M\,. \tag{8.33}$$

Dann erfüllen $a(t)$ und $r(t)$ Friedmann-Gleichungen für Staub, welche sich nur durch die Konstante R in

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_b a^2 + \frac{1}{R^2} \tag{8.34}$$

unterscheiden; $a(t)R$ erfüllt (1.1) mit $k=-1$ und hat damit die Parameterdarstellung (2.5).

Ist $x(t)$ so bestimmt, dass

$$r_b(t, x(t)) = a(t)\, x(t) = r(t), \qquad (8.35)$$

so ist die pekuliare Geschwindigkeit v der Schale zur Zeit t

$$v(t) = \dot r(t) - \frac{\partial r_b}{\partial t}(t, x(t)) = \dot r - \dot a\, x(t)$$

$$= \dot r - v_H\,, \qquad (8.36)$$

wobei $v_H(t) = \dot a(t)\, x(t)$ die Hubble-Geschwindigkeit am Ort der Schale ist.

Wir nehmen nun an, dass sich $r(t)$ und $a(t)$ nur wenig unterscheiden. In

$$r(t) =: a(t)\,(1 - \varepsilon(t)) \qquad (8.37)$$

ist dann $\varepsilon(t)$ eine kleine Grosse. Der Vergleich mit (8.35) gibt $x(t) = 1 - \varepsilon(t)$, weshalb in 1. Ordnung in ε

$$v = \dot a(1-\varepsilon) - a\dot\varepsilon - \dot a(1-\varepsilon) = -a\dot\varepsilon = -\frac{a}{\dot a} v_H \dot\varepsilon\,,$$

d.h.

$$v = \frac{1}{H} v_H \dot\varepsilon\,. \qquad (8.38)$$

Der relative Massenexzess innerhalb der Schale ist nach (8.33) und (8.37)

$$\frac{\delta M}{M} = \frac{M}{\frac{4\pi}{3}\rho_b\,[a(1-\varepsilon)]^3} - 1 = 3\varepsilon\,.$$

Deshalb gilt auch

$$v = \frac{1}{3H} v_H \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} \frac{\delta M}{M} . \tag{8.39}$$

Nun erfüllen $a(t)$ und $r(t)$ beide die Gleichung (8.30), oder mit (8.33)

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3} \varrho_B a . \tag{8.40}$$

Daraus folgt für ε

$$\boxed{\ddot{\varepsilon} + 2\frac{\dot{a}}{a}\varepsilon = 4\pi G \varrho_B \varepsilon .} \tag{8.41}$$

Diese wichtige Gl. werden wir in der Störungstheorie für Dichtefluktuationen in Kap. V wieder antreffen. Die Art, wie diese hier erhalten wurde zeigt umgekehrt, wie man Lösungen von (8.41) findet: Hat man eine 1-parametrige Schar $a(t, \alpha)$ von Lösungen der Friedmann-Gleichung, so ~~ist~~ $\delta \propto a^{-1}(\partial a/\partial\alpha)$ eine Lösung von (8.41). Die anwachsenden und zerfallenden Lösungen von (8.41) werden wir mit dieser Methode in Kap. V explizite bestimmen (siehe auch [P2, p.52]).

Für uns ist hier nur die anwachsende Lösung D_1 interessant,

$$\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} = \frac{\dot{D}_1}{D_1} = \frac{a}{D_1}\frac{dD_1}{da}\frac{\dot{a}}{a} = f(\Omega) H , \tag{8.42}$$

wobei

$$f(\Omega) = \frac{a}{D_1}\frac{dD_1}{da} \tag{8.43}$$

die Funktion ist, die bereits in Gl. (8.26) vorkam. Setzen wir (8.42) in (8.39) ein, so erhalten wir tatsächlich die Gl. (8.29)

* * *

Die Funktion $f(\Omega)$ ist in Fig. 30 dargestellt.

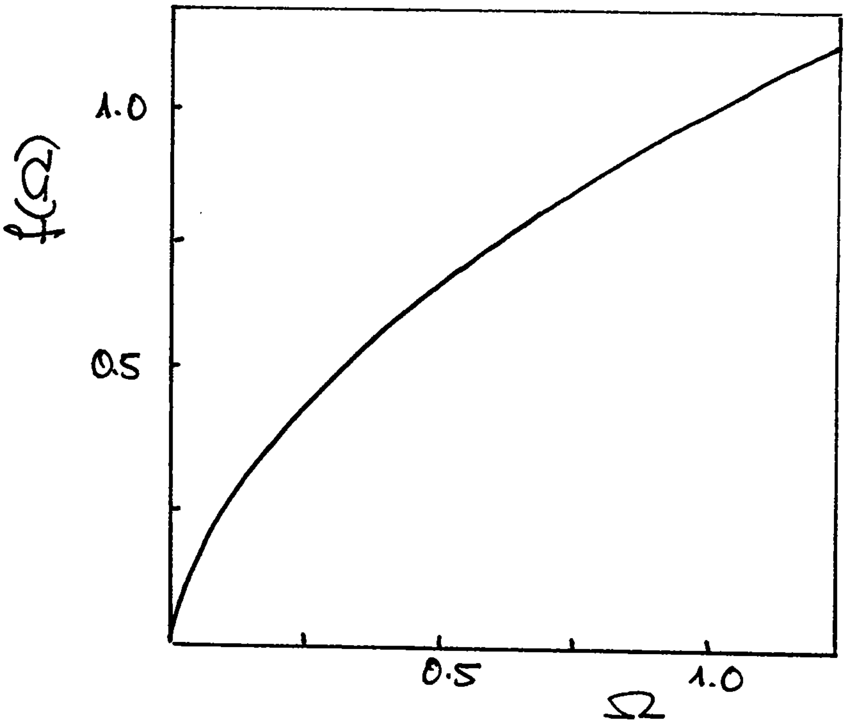


Fig. II.30. Graph der Funktion (8.43)

Die Beziehung (8.29) für v_V/v_H versus Ω_0, für verschiedene Werte des relativen Massenexzesses $\delta M/M$, ist in Fig. 31 gezeigt (gestrichelte Linie). Man kann die obige

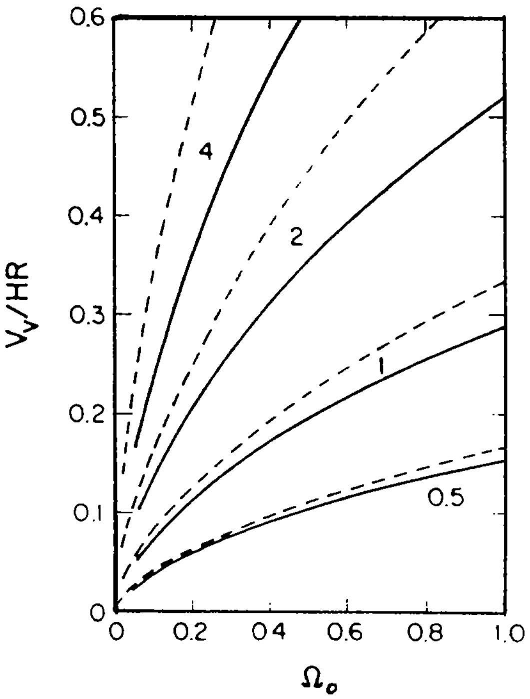


Figure II.31. Peculiar velocity in the zero-pressure spheroidal model. The parameter is the fractional mass excess $M/M_b - 1$. The dashed curves are the linear approximations (Equation 8), and the solid curves are the full nonlinear model.

(M. Davis, P.J.E. Peebles, Ann. Rev. Astron. Astrophys. 21, 109 (1983))

Analyse ohne Linearisierung durchführen (siehe dazu auch [P2, §19]). Die ausgezogenen Kurven in Fig. 31 zeigen die korrigierte Beziehung (Anfangsbedingungen?).

Wir machen nun die Annahme, dass die hellen Galaxien auf grossen Skalen ($\sim 10\, h_0^{-1}$ Mpc) etwa gleich verteilt sind wie die gesamte Masse, sodass

$$\frac{\delta M}{M} \simeq \frac{\delta N}{N} \equiv \delta . \qquad (8.44)$$

Dann erhalten wir aus (8.29), wenn wir noch die analytische Näherung $f(\Omega_0) \simeq \Omega_0^{0.6}$ benutzen,

$$\boxed{\Omega_0^{0.6} \simeq \frac{3 v_V}{v_H \delta}} . \qquad (8.45)$$

Sandage und Tammann [K4] verwenden die Werte[13)]

$$v_V = (200 \pm 50)\ \mathrm{km/s}, \quad v_H = 1170\ \mathrm{km/s}, \quad \delta = 2.8 \pm 0.5,$$

was $\Omega_0 \simeq 0.06$ ergibt. Andere Autoren[14)] kommen zu Werten von v_V bis fast 500 km/s, was zu einem wesentlich grösseren Ω_0 führen würde. Davis und Peebles[14)] bevorzugen $v_V = (400 \pm 60)$ km/s, $\delta = 2.2 \pm 0.3$. In linearisierter Approximation gibt dies $\Omega_0 \simeq 0.2$ und für das nichtlineare sphärische Modell $\Omega_0 \simeq 0.35 \pm 0.15$. Nun ist freilich die Störung des Hubble-Flusses nicht isotrop, was weitere Unsicherheiten nach sich zieht.

---

13) G. A. Tammann, A. Sandage, Ap. J. 294, 81 (1985)

14) Für einen Übersichtsartikel siehe: M. Davis, P. J. E. Peebles, Ann. Rev. Astron. Ap. 21, 109 (1983)

Potentiell ist aber die Methode interessant und wird vielleicht in Zukunft (mit genaueren Bestimmungen des gestörten Hubble-Flusses als Funktion der wirklichen Abstände) zu einer zuverlässigen Bestimmung von Ω_0 auf Skalen $\sim 10\, h_0^{-1}$ Mpc führen.

b) Masse-Leuchtkraft-Verhältnisse von Galaxien

Wir erinnern zunächst an das kritische M/L-Verhältnis (siehe §2):

$$\left(\frac{M}{L}\right)_c = \frac{\rho_c}{\mathcal{L}} \simeq 1500\, h_0 \left(\frac{M_\odot}{L_\odot}\right). \qquad (8.46)$$

Für den numerischen Wert wurde

$$\mathcal{L} = 1.8 \times 10^8\, h_0\, L_\odot\, \mathrm{Mpc}^{-3} \qquad (8.47)$$

gewählt. Diese Zahl hat eine Unsicherheit von mindestens 20% (möglicherweise von 100% ?).

Im folgenden gehen wir etwas genauer auf die Bestimmung der M/L-Verhältnisse für die Objekte in Fig. 1 ein.[15] Anschliessend wird sich die Frage stellen, wie die verschiedenen Verhältnisse zur Bestimmung von Ω_0 zu gewichten sind.

(i) M/L-Verhältnisse für Einzelgalaxien

Lange glaubte man, dass die Bahngeschwindigkeiten in der rotierenden Scheibe einer Spiralgalaxie ausserhalb

15) Übersichtsartikel: S. Faber, J. Gallagher, Ann. Rev. Astron. Astrophys. 17, 135 (1979)

des leuchtenden Gebietes auf einer Keplerkurve ($\propto 1/\sqrt{\text{Abstand}}$) liegen sollten. Als es nun vor einigen Jahren technisch möglich wurde, auch für die lichtschwachen äusseren Bereiche von Galaxien mit Langspalt-Spektrographen und leistungsfähigen elektronischen Bildverstärkern hochaufgelöste optische Spektren aufzunehmen, stellte man überraschend fest, dass die Rotationskurven auch bei grossen Abständen vom Zentrum der Galaxie praktisch konstant bleiben. Beispiele dafür gibt Fig. 32. Die Masse nimmt also auch

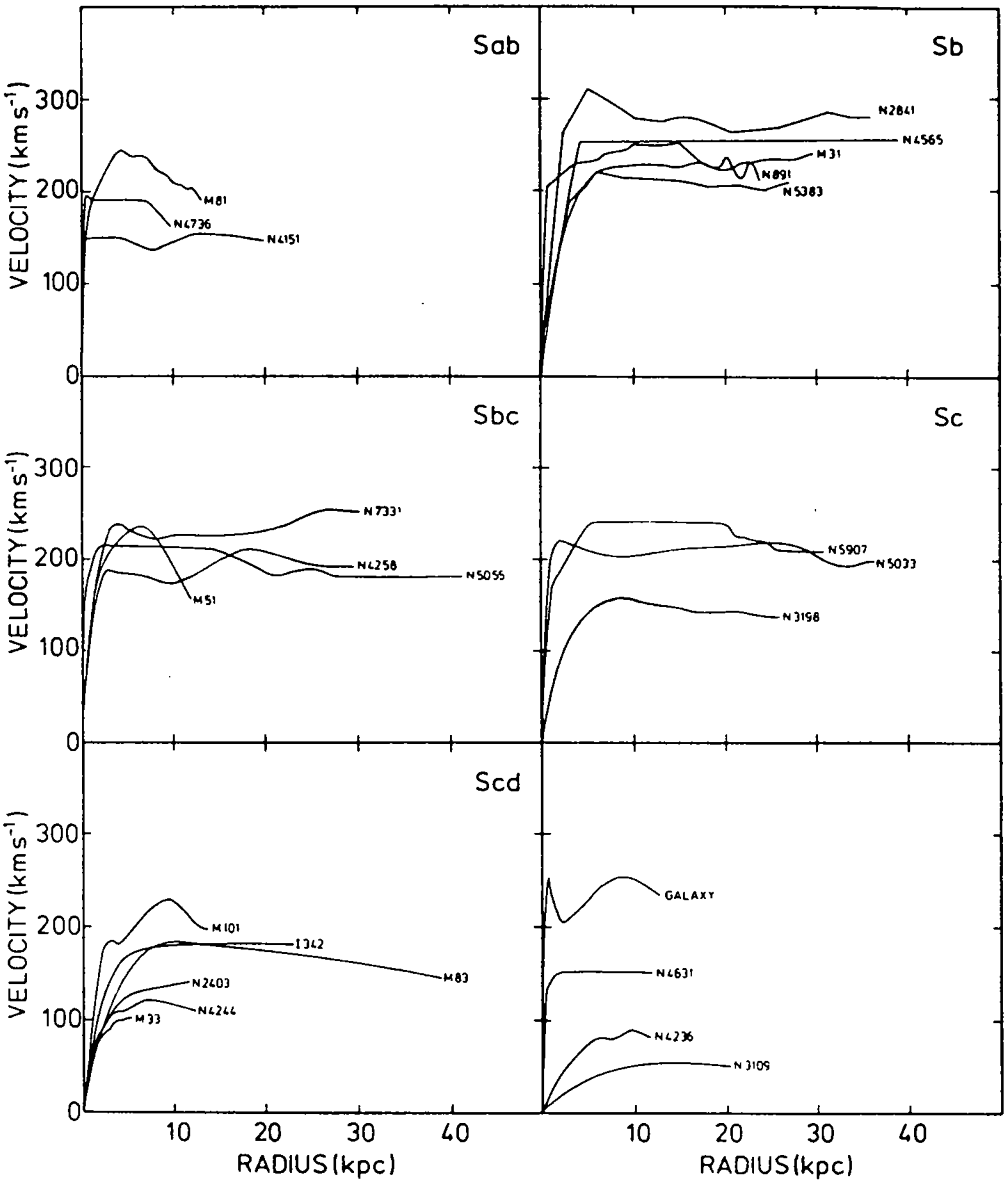


Fig. II.32. Rotationskurven von 25 Galaxien verschiedener morphologischer Typen ausserhalb des sichtbaren Randes zu. Es gibt demnach sehr viel dunkle Materie im Aussenbereich einer Galaxie, die vermutlich in einem Halo angeordnet ist, welcher den sichtbaren Teil einhüllt und die Scheibe stabilisiert.[16)]

Für unsere Galaxis wurde es mit verschiedenen Methoden möglich, die Geschwindigkeitskurve bis zu Abständen um 80 kpc zu bestimmen (siehe Fig. 33). Kein Abfallen

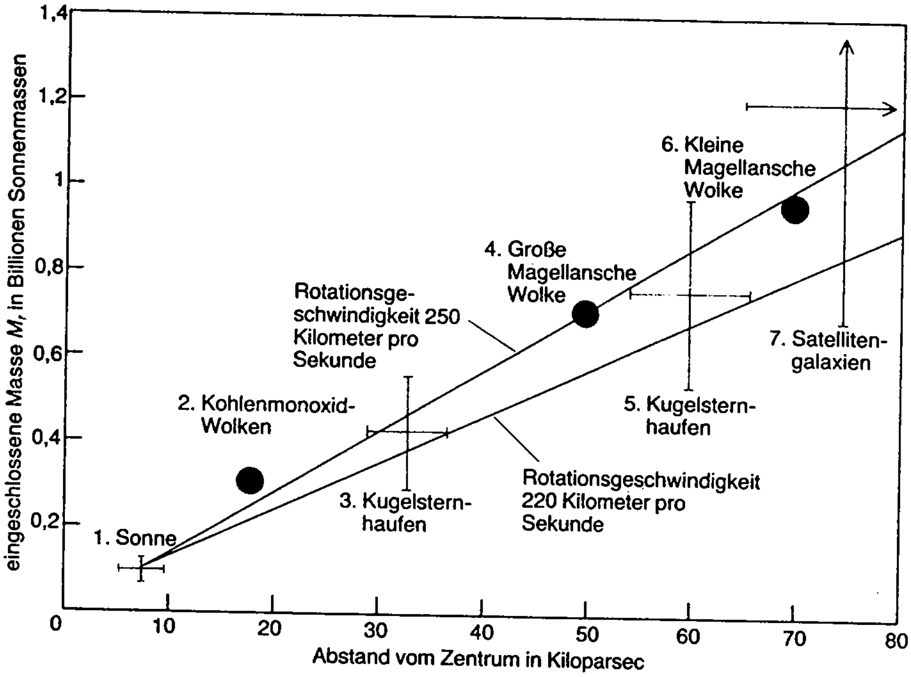


Fig. II.33.

Die Massenzunahme in der Milchstraße, die ja auch zu den Spiralgalaxien gehört, läßt sich aus den Bewegungen von Kugelsternhaufen im „Halo" unserer Galaxis, von Kohlenmonoxid-Wolken und den Magellanschen Wolken abschätzen, deren mittlere Entfernungen bekannt sind. Nach den bisherigen Beobachtungsergebnissen sollten die Rotationsgeschwindigkeiten in unserer Galaxis zwischen 220 und 250 Kilometer pro Sekunde betragen und bis in Abstände um 80 Kiloparsec konstant bleiben. Innerhalb dieses Radius vom zehnfachen Sonnenabstand ist vermutlich eine Masse von etwa 10^{12} Sonnenmassen eingeschlossen. Für die Sonne wurde eine Geschwindigkeit von 220 Kilometer pro Sekunde zugrundegelegt. Die übrigen Meßpunkte ergeben sich aus den Beobachtungen mehrerer Astronomen: Leo Blitz von der University of Maryland in College Park bestimmte die Geschwindigkeiten der Kohlenmonoxid-Wolken für mittlere Abstände von 18 Kiloparsec; Carlos Frenk (damals Universität von Cambridge) und Simon White (Universität von Kalifornien in Berkeley) ermittelten die Geschwindigkeiten für nahe Kugelsternhaufen; die Geschwindigkeiten der fernen Kugelsternhaufen untersuchten F. O. A. Hartwick (Universität von Victoria) und Wallace L. W. Sargent (California Institute of Technology). Die Geschwindigkeitsangaben für die Magellanschen Wolken stammen von D. N. C. Lin (Lick-Observatorium), Donald Lyndon-Bell (Universität von Cambridge), Tadayuki Murai und Mitsuaki Fujimoto (beide Nagoya-Universität). Den (letzten) Meßpunkt für die Satelliten-Galaxien steuerten Jaan Einasto und seine Mitarbeiter (Akademie der Wissenschaften der Sowjetrepublik Estland) bei.

---

16) Siehe dazu: J.P. Ostriker, P.J.E. Peebles, Ap.J. 186, 467 (1973)

festgestellt, womit dieser Bereich etwa $10^{12} M_\odot$ enthalten muss. Dies ist etwa zehn mal mehr als man früher meinte.

Innerhalb des sog. Holmberg-Radius findet man $M/L_B \sim (8-12) M_\odot$ (L_B bezieht sich auf den blauen Spektralbereich).

Für SO-Galaxien[17] findet man etwa das Doppelte. Ähnliche Werte erhält man auch für E-Galaxien[17], aber hier sind die Daten noch zu ungenügend.

(ii) M/L für Doppel-Galaxien

Aus Beobachtungen an Einzelgalaxien kann man nicht wissen, wie das M/L-Verhältnis mit wachsendem Abstand zunimmt. Dazu muss man Aglomerationen von Galaxien studieren.

Galaxien treten häufig paarweise auf. Leider lassen sich solche Systeme nur schwer im Detail untersuchen, weil im allgemeinen weder die Orientierung der Bahnebene, noch die momentane Position der relativen Bahn bekannt ist. Deshalb muss man auf statistische Methoden zurückgreifen.

In der Praxis kann man nur die radialen Geschwindigkeiten v_r und den projizierten Winkelabstand a_0 der Galaxien bestimmen. Die Geometrie der Doppelgalaxie ist in Fig. 34 gezeigt. Wir wählen Kreisbahnen in der yz-Ebene

17) Für die morphologische Klassifikation der Galaxien nach Hubble konsultiere ein Astronomiebuch (oder Lexikon).

und der wirkliche Abstand sei a. Mit den in Fig. 34 an-

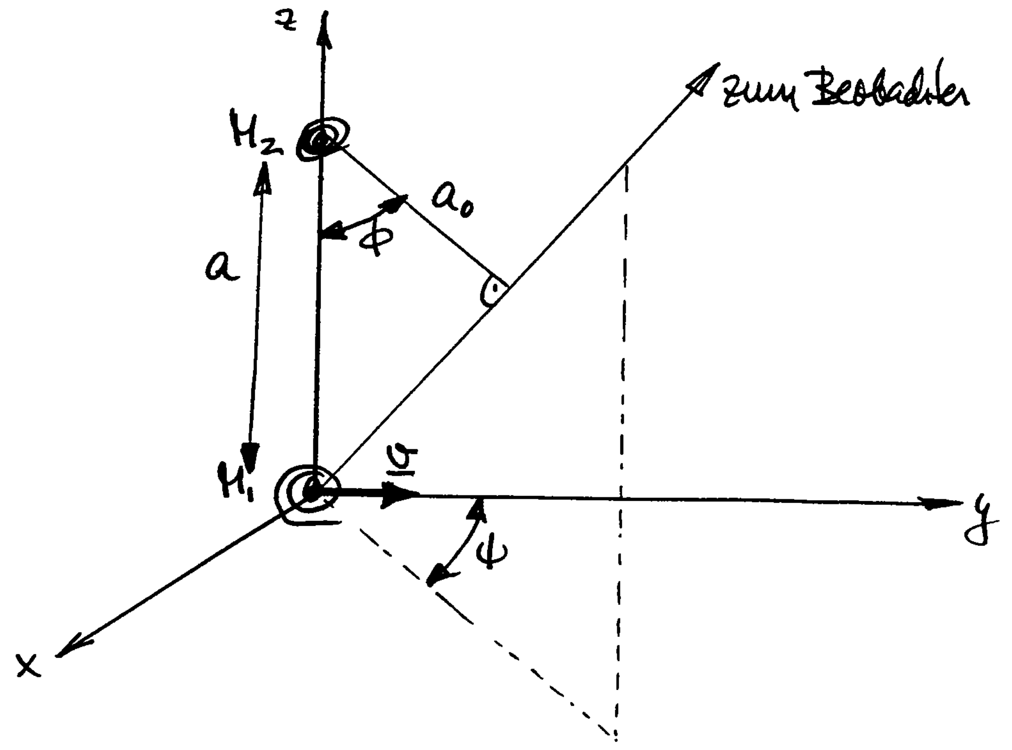


Fig. II.34. Geometrie einer Doppelgalaxie

gegebenen Bezeichnungen ist der projizierte Abstand $a_0 = a\cos\phi$ und der Unterschied Δv der Geschwindigkeiten in Beobachtungsrichtung der beiden Galaxien ist $\Delta v = v\cos\phi\cos\psi$, wo v die wirkliche relative Geschwindigkeit ist. Für Kreisbahnen von zwei Massen M_1 und M_2 gilt

$$\frac{M_1 M_2}{M_1+M_2}\frac{v^2}{a} = \frac{G M_1 M_2}{a^2} .$$

Eliminieren wir a und v zugunsten von a_0 und Δv, so erhalten wir für die Gesamtmasse

$$M_1 + M_2 = \frac{(\Delta v)^2}{G} a_0 \left(\cos^3\phi \cos^2\psi\right)^{-1}. \qquad (8.48)$$

Abgesehen vom Winkelanteil, ist die rechte Seite direkt.

beobachtbar. Durch Mittelung über ein genügend grosses Sample kann man versuchen, daraus die Massen zu gewinnen. Ersetzt man $\cos^3\phi \cos^2\psi$ durch dessen Mittel über S^2,

$$\int_{S^2} \cos^3\phi \cos^2\psi \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{3\pi}{32} = 0.295 ,$$

so erhält man

$$\langle M_1+M_2 \rangle = 0.29 \frac{(\Delta v)^2 a_0}{G} . \qquad (8.49)$$

Dieses Vorgehen ist aber unrealistisch, da Binärgalaxien auf Grund von a_0 ausgewählt und analysiert werden; dann ist aber ϕ nicht mehr gleichverteilt.

Für eine Diskussion anderer Mittelungsverfahren und die Analyse der Daten verweisen wir auf Ref. 15) und dort zitierte Arbeiten. Als Resultat findet man

$$(M/L)_{\text{Paare}} = (70-100)\, h_0 . \qquad (8.50)$$

Dies zeigt für Spiralen, dass ausserhalb des Holmberg-Radius noch viel dunkle Materie vorhanden ist.

(iii) M/L für kleine Gruppen von Galaxien

Hier ist die Analyse (mit Hilfe des Virialsatzes) sehr unsicher, insbesondere auch deshalb, weil die Zugehörigkeit zu einer Gruppe und auch die Definition einer Gruppe schwierig zu entscheiden ist. Die besten Schätzungen liegen etwa im selben Bereich wie (8.50).

(iv) M/L für reiche Haufen

In einer klassischen Arbeit hat Zwicky 18) schon 1937 den Virialsatz auf den Comahaufen angewandt und ein Verhältnis $M/L_B \simeq 500$ gefunden, welches er mit $M/L_B \simeq 3$ für die Umgebung der Sonne verglich. Damit hat er erstmals auf das Problem der unsichtbaren Masse aufmerksam gemacht.

Virialsatz

Für ein System von Massenpunkten, welche ausschliesslich gravitativen Wechselwirkungen unterworfen sind, folgt aus den Newtonschen Gleichungen bekanntlich der Virialsatz

$$\frac{1}{2}\ddot{I} = 2T + \Omega \,, \tag{8.51}$$

wo I das Trägheitsmoment, T die kinetische Energie und Ω die potentielle Energie sind. Reiche Cluster sind wahrscheinlich in einem stationären Zustand[19], weshalb

$$2T + \Omega = 0 \,. \tag{8.52}$$

Wir setzen

$$T = \frac{1}{2}\sum M_i \dot{\underline{x}}_i^2 = \frac{1}{2}\langle V^2\rangle M \,, \tag{8.53}$$

wobei M die gesamte Masse des Clusters ist. Beachte, dass in (8.53) $\langle V^2\rangle$ das massengemittelte Geschwindigkeitsquadrat ist. Dieses lässt sich aus den Beobachtungen nicht direkt bestimmen. Wir können nur die Geschwindigkeitskomponenten in der Beobachtungsrichtung messen und der Mittelungsprozess für die zugehörige Dispersion σ^2 ist ein nichttriviales Problem. Häufig wird dabei mit den beobachteten Luminositäten gewichtet. Eine Massenmittelung

---

18) F. Zwicky, Ap. J. 86, 217 (1937)

mit erschlossenen Massen aus M/L – Verhältnissen ist sehr unsicher, da diese – wie wir gesehen haben – für E – und S0-Galaxien sehr unsicher sind.

Oft setzt man $\langle V^2 \rangle \simeq 3\sigma^2$, aber dies kann durchaus um einen Faktor 2 zu gross sein.

Den effektiven Virialradius, R_{VT}, definieren wir durch

$$\Omega = - \frac{GM^2}{R_{VT}} . \qquad (8.54)$$

Aus den drei letzten Gleichungen folgt

$$\boxed{M = \frac{\langle V^2 \rangle R_{VT}}{G}} . \qquad (8.55)$$

Der effektive Radius kann folgendermassen bestimmt werden[20]: Es sei $S(q)\,dq$ die Zahl der Galaxien eines Klusters, welche im Streifen mit Minimalabstand q und Breite dq vom Zentrum (schraffiertes Gebiet in Fig. 35) beobachtet werden. Falls der Haufen sphärisch symmetrisch ist, hängt diese projizierte Anzahl mit der wirklichen Anzahldichte $n(r)$ von Galaxien folgendermassen zusammen:

---

19) Aus (8.51) folgt i.a. nur, dass sowohl der zeitliche Mittelwert wie auch das Phasenmittel über die (kompakte) Energiefläche von $2T + \Omega$ verschwindet. Beweise dies; zeige auch $\frac{1}{2}\dot{I} = \sum \underline{x}_j \cdot \underline{p}_j = \text{Virial}$, und dass das Virial die Erzeugende der Dilatationen im Phasenraum ist.

20) M. Schwarzschild, Ap. J. 59, 273 (1954)

$$S(q) = 2\pi \int_0^{u(R)} n(r)\, u\, du\,,$$

mit
$$u(r) = \sqrt{r^2 - q^2}\,, \quad R: \text{Klusterradius}.$$

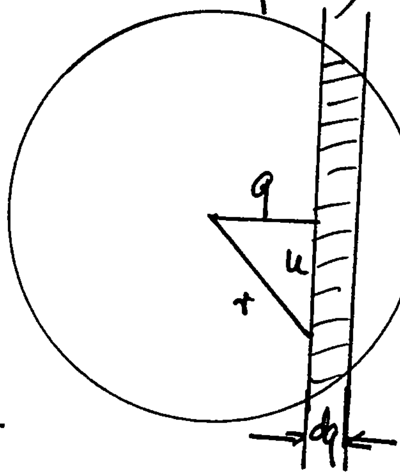


Fig. II. 35

Durch Änderung der Integrationsvariablen ist dies auch
$$S(q) = 2\pi \int_q^R n(r)\, r\, dr\,, \tag{8.56}$$
woraus sich
$$\frac{dS(q)}{dq} = -2\pi\, n(q)\, q \tag{8.57}$$
ergibt. Die Klustermasse ist
$$M = 2 M_G \int_0^R S(q)\, dq\,, \tag{8.58}$$
wenn M_G die mittlere Galaxienmasse bezeichnet.

Nun ist die potentielle Energie
$$\Omega = -G \int_0^M \frac{M(r)\, dM(r)}{r^2}\,, \quad M(r) = \text{Masse innerhalb von } r\,, \tag{8.59}$$
oder, wegen $dM(r) = 4\pi M_G\, n(r)\, r^2 dr$ und (8.57),
$$\Omega = -G(4\pi)^2 M_G^2 \int_0^R dr\, \underbrace{r\, n(r)}_{-\frac{1}{2\pi}\frac{dS}{dq}dq} \int_0^r \underbrace{n(r')\, r'^2 dr'}_{-\frac{1}{2\pi}\frac{dS}{dq'}q'dq'} =$$

$$= -4G M_G^2 \int_0^R \frac{dS}{dq}\, dq \int_0^q \frac{dS}{dq'}\, q'\, dq' .$$

Durch zweimalige partielle Integration erhalten wir

$$\Omega = -2G M_G^2 \int_0^R S^2(q)\, dq . \qquad (8.60)$$

Nach der Def. (8.54) und Gl. (8.58) kommt damit

$$R_{VT} = \frac{2\left(\int_0^R S\, dq\right)^2}{\int S^2 dq} . \qquad (8.61)$$

Beschaffen wir uns also mit (8.61) R_{VT} und V^2 (irgendwie) aus σ^2, so gibt (8.55) die sog. Virialmasse (M_{VT}) des Haufens.

<u>Übungsaufgabe:</u> Betrachte einen sphärisch symmetrischen Kluster mit Anzahldichte $n(r)$. Zeige, dass diese mit der projizierten Flächendichte $\Sigma(\rho)$ in Beobachtungsrichtung über eine Abel'sche Integralgleichung zusammenhängt. Löse diese und bringe die Lösung in die Form

$$n(r) = \frac{1}{\pi} \int_r^R \sqrt{\rho^2 - r^2}\, \frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{d\Sigma}{d\rho}\right) d\rho . \qquad (8.62)$$

Für den Comahaufen finden verschiedene Autoren[15] die Werte

$$M/L_V \simeq 500\, h_0 , \quad M/L_B \simeq 650\, h_0 . \qquad (8.63)$$

Dies ist sehr viel mehr als für individuelle Galaxien, aber auch wesentlich mehr als für Mitglieder von Binärgalaxien oder von kleinen Gruppen. Für eine Diskussion der Unsicherheiten verweise ich auf den bereits zitierten Übersichtsartikel von Faber und Gallagher[15].

Eine Zusammenfassung der Resultate gibt die Tabelle 9 (siehe auch Fig. 1).

Skala	M/L [Sonneneinheiten]
Sonnenumgebung	2 ± 1
Sichtbarer Bereich der Spiralgalaxien	$(8-12)\,h_0$
Sichtbarer Bereich der S0- und E-Galaxien	$(10-20)\,h_0$
Binärsysteme und kleine Gruppen	$(60-180)\,h_0$
Reiche Haufen	$(300-1000)\,h_0$

Tabelle II.9. Masse-Leuchtkraft-Verhältnisse für Galaxien

Der Mittelwert für M/L wurde von Sandage und Tammann [K4] folgendermassen bestimmt:

- M/L für Spiralgalaxien $= 50\,h_0$
  M/L für E + S0 $= 650\,h_0$
  $\Big\}$ im Verhältnis 3 : 1
- Die Luminositätsfunktionen wurden für

Spiralgalaxien und E+S0 separat integriert, was

$$\Omega_0 = 0.8 \times 10^{-3}\, h_0^{-1} \langle M/L \rangle$$

ergibt.

Dies führt zu $\Omega_0 = 0.12$, welchen Wert die Autoren eher als eine Überschätzung ansehen, da sie der Ansicht sind, dass die hohen Werte von E+S0 in Haufen für die Feldgalaxien zu hoch sein dürften.

c) Ein philosophisches Argument für $\Omega = 1$

Wir zeigen zuerst, dass der Wert $\Omega = 1$ unstabil ist.
In (1.3) und (1.4) war t_0 beliebig, also gilt immer

$$\rho = \frac{3}{8\pi G}\left(H^2 + \frac{k}{a^2}\right)$$

$$p = -\frac{1}{8\pi G}\left[H^2(1-2q) + \frac{k}{a^2}\right]. \qquad (8.64)$$

Für $p = 0$ erhalten wir wieder

$$\Omega = 2q \;, \quad \frac{k}{a^2} = (2q-1)H^2 \qquad (8.65)$$

und daraus

$$\Omega = \frac{k}{a^2 H^2} + 1. \qquad (8.66)$$

Übungsaufgabe: Benutze die Lösung (2.5) und zeige, dass

$$\Omega = \begin{cases} \dfrac{2}{1+\cos\eta} & \text{für } k=1 \\ \dfrac{2}{1+\cosh\eta} & \text{für } k=-1\,. \end{cases} \tag{8.67}$$

– – – – – – – –

Zu Beginn des Urknalls ($\eta = 0$) ist in beiden Fällen $\Omega = 1$. Für $k=+1$ haben wir maximale Expansion für $\eta = \pi$, also $\Omega = \infty$. Andererseits nimmt Ω für $k=-1$ dauernd ab und geht asymptotisch gegen Null.

In Anbetracht dieser Instabilität ist es im Rahmen der Friedmann-Modelle sehr merkwürdig, dass ausgerechnet zum gegenwärtigen Zeitpunkt (nach bald 20 Milliarden Jahren) das Universum ein Ω in der Nähe von Eins hat.

Gelegentlich wird darauf die Antwort gegeben, dass andernfalls die Bedingungen für die Existenz von Leben und Bewusstsein nicht gegeben wären und sich dann niemand die Frage stellen könnte.

In Kap. VIII werden wir im Rahmen des inflationären Modells einen rationalen (aber spekulativen) Grund für $\Omega = 1$ geben.

* * *

Zum Schluss dieses Abschnitts geben wir in Fig. 36 noch eine nützliche Darstellung des Alters $t_0(\Omega; H_0)$ für $\Lambda = 0$.

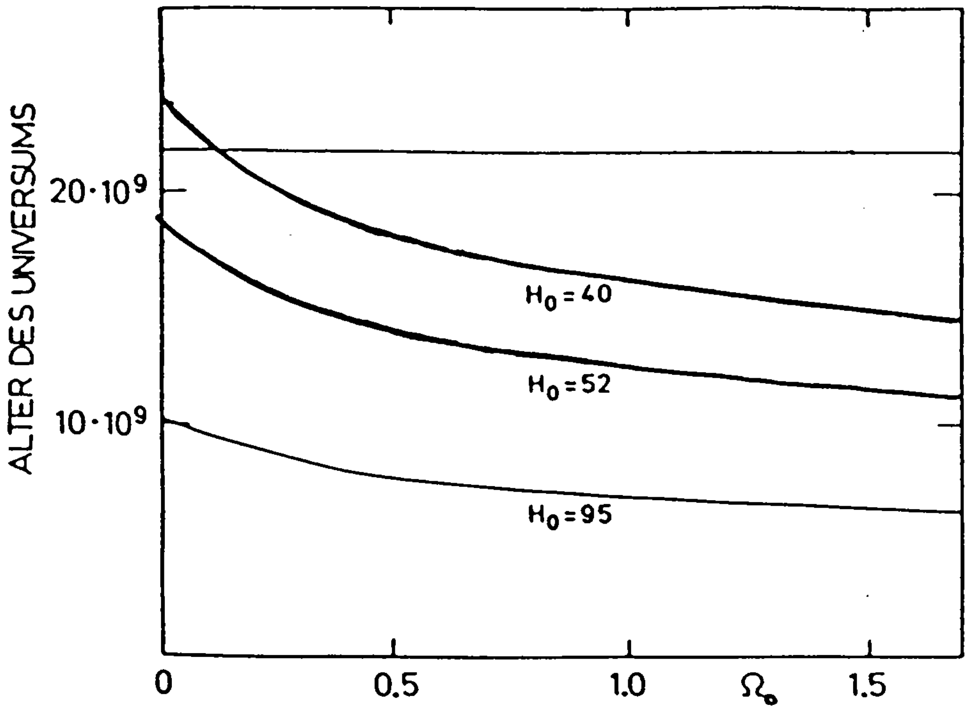


Fig. II.36

Das Alter des Universums als Funktion des Dichteparameters Ω_o für verschiedene Werte der Hubble-Konstanten H_o (für $\Lambda = 0$).

Kapitel III. Thermische Geschichte des Universums für $T < 10^9 K$

"The temperature in the universe at the present time is found to be about $5°K$".

Alpher und Herman (1948!)

1. Die 3K-Hintergrundstrahlung

"... unser Fehler ist nicht, dass wir unsere Theorien zu ernst nehmen, sondern dass wir sie nicht ernst genug nehmen"[4].

S. Weinberg

Dieses Zitat stammt aus der Schilderung der Entdeckungsgeschichte der Urknallstrahlung durch S. Weinberg in seinem bekannten populären Buch "Die ersten drei Minuten" (Piper Verlag), welche man unbedingt lesen sollte. Wir begnügen uns hier mit ein paar Andeutungen.

Gegen Ende der vierziger Jahre arbeiteten Gamow und seine Kollegen Alpher und Herman an einer Theorie[1], nach der alle Elemente im heissen Urknall synthetisiert worden sind. Diese Theorie war zwar in wesentlichen Teilen falsch, ging sie doch z.B. von der irrigen Annahme aus, dass das Universum anfänglich ausschliesslich aus Neutronen bestand. Sie stimulierte aber weitere Forschungen und bereits im Jahre 1950 entwickelte C. Hayashi[2] die heute noch gültige Theorie der Entstehung der leichten Elemente. (Wir wissen inzwischen, dass Kohlenstoff und schwerere Elemente Produkte der stellaren Evolution sind.) Auch Alpher und Herman revidierten ihr Modell bald in derselben Weise. Aber schon 1948 waren die beiden zum richtigen Schluss gekommen[1], dass sich die beobachtete Häufigkeit der leichten Elemente nur erklären liess, wenn man zwischen Photonen und Nukleonen ein Verhältnis von $10^9 : 1$ annahm. Aufgrund von Schätzungen der gegenwärtigen kosmischen Nukleonendichte kamen sie zum Schluss: "The temperature in the universe at the present time is found to be about 5° K". Von dieser Prognose hatten aber Penzias und Wilson nie etwas gehört, als sie 1965 die 3K-Hintergrundstrahlung entdeckten.

Die Entdeckung geschah ganz zufällig bei der Erprobung der Radioantenne der Bell Telephone Company, die zur Beobachtung des Satelliten "Echo" errichtet worden war. Penzias und Wilson fanden dabei ein schwaches Radiohintergrundrauschen, das unabhängig von der Richtung der Antenne aus dem Kosmos kam. (Die Messungen wurden bei 7.35 cm durchgeführt.) Alle Bemühungen, das beobachtete Rauschpegel

---

1) R.A. Alpher, R. Herman: "Evolution of the universe", Nature 162, 774 (November 13, 1948)
G. Gamow: "The evolution of the universe", Nature 162, 680 (October 30, 1948)

2) C. Hayashi, Prog. Theor. Phys. 5, 224 (1950)

zu senken, blieben erfolglos. (Dazu gehörte auch die Beseitigung eines "weissen dielektrischen Materials", das von einem Taubenpaar stammte.)

Dicke hatte inzwischen mit seinen Mitarbeitern in Princeton aufgrund kosmologischer Überlegungen damit begonnen, bewusst nach einer Mikrowellen-Hintergrund-Strahlung zu suchen. Aber noch bevor sie ihre Messungen abschliessen konnten, erhielt Dicke einen Anruf von Penzias, der soeben von einer Arbeit von Peebles zur Big-Bang-Nukleosynthese der leichten Elemente erfahren hatte. Daraufhin publizierten Penzias und Wilson ihre epochale Entdeckung[3] unter dem zurückhaltenden Titel: "A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s". Im gleichen Heft gaben Dicke, Peebles, Roll und Wilkinson[4] sofort die heute allgemein akzeptierte kosmologische Interpretation der Messungen von Penzias und Wilson, nach der die Hintergrundstrahlung das Relikt der heissen Gleichgewichtsstrahlung im frühen Universum ist. Sehr bald fanden sie bei 3.2 cm auch praktisch dieselbe Antennentemperatur wie Penzias und Wilson bei 7.35 cm.

Diese beiden Messpunkte liegen im Rayleigh-Jeans-Bereich des Spektrums. ~~Danach~~ hat man sich sehr angestrengt, das Umbiegen der Planckschen Kurve bei etwa 0.1 cm zu überprüfen. Dies war deshalb sehr schwierig, weil

---

3) A. A. Penzias, R. W. Wilson; Ap. J. 142, 419 (1965)

4) R. H. Dicke, P. J. E. Peebles, P. G. Roll and D. T. Wilkinson: "Cosmic black-body radiation"; Ap. J. 142, 414 (1965).

die Erdatmosphäre bei Wellenlängen kürzer als etwa 0.3 cm zunehmend undurchlässig wird und man deshalb die Experimente mit Hilfe von Ballons oder Satelliten ausführen muss.

Die Auswertung der FIRAS-Daten von COBE nach einer Beobachtungszeit von 4 Jahren sind in der nachstehenden Figur gezeigt. Die Fehler sind kleiner als die Strichdicke und die Messpunkte liegen alle auf der Planck-Kurve zu $T = 2.728 \pm 0.004\,K$. Ein allfälliges chemisches Potential μ muss kleiner als $\simeq 10^{-4}$ sein: $|\mu| < 9 \times 10^{-5}$ (95% Konf.). Dieses Ergebnis ist ungeheuer wichtig.

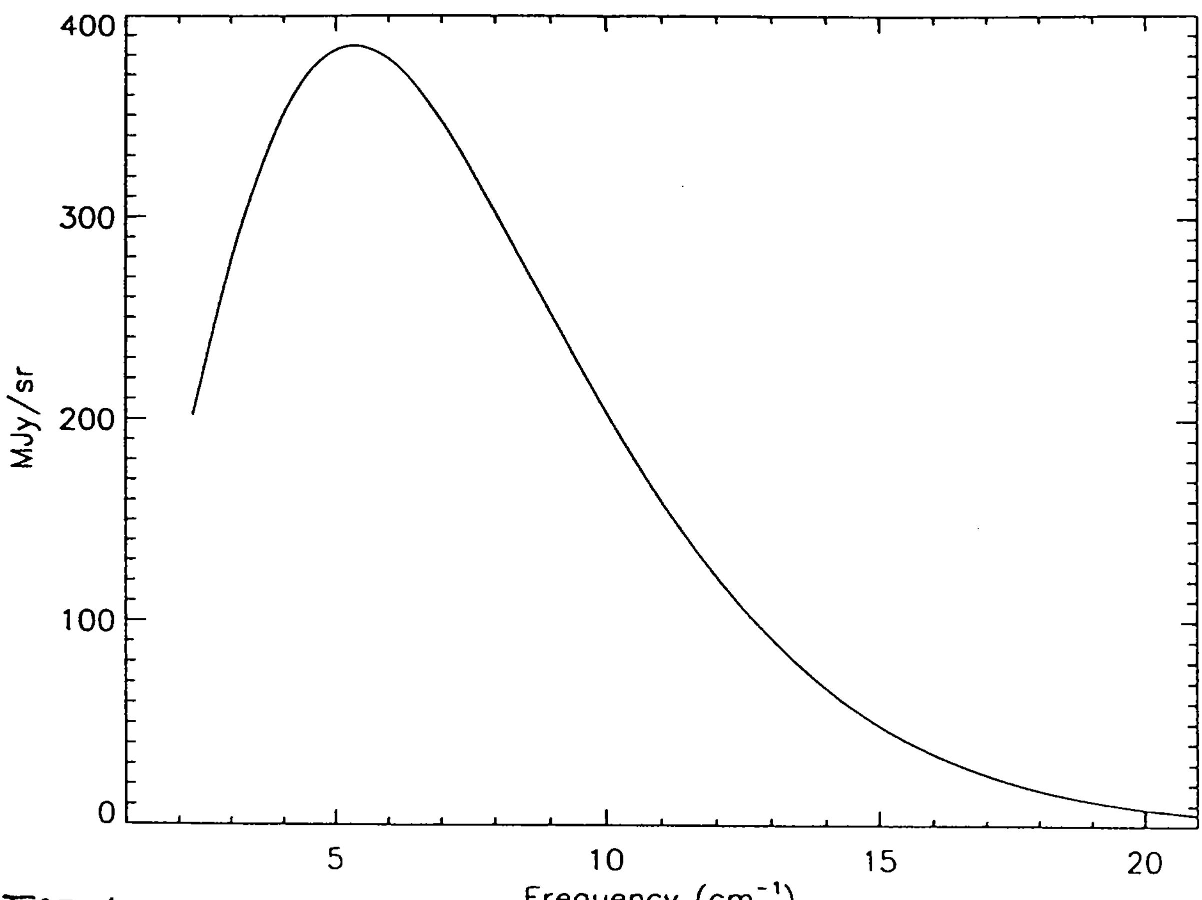


Fig. III.1

4.—Uniform spectrum and fit to Planck blackbody (T). Uncertainties are a small fraction of the line thickness.

Ap. J. 473, 576 (1996)

Die heisse Gleichgewichtsstrahlung des frühen Universums entkoppelte sich von der Materie, als die Temperatur des Universums auf etwa 4000 °K sank. Bei dieser Temperatur kombinierten nämlich die Elektronen und Atomkerne zu neutralen Atomen (siehe Abschnitt 2), und deshalb wurden die Photonen anschliessend nicht mehr gestreut (siehe unten). Bei der freien Expansion nimmt die Photonenzahldichte n_γ mit a^{-3} ab und aufgrund der Rotverschiebung sinkt die Energie jedes Photons proportional zu a^{-1}. Deshalb bleibt das Plancksche Verteilungsgesetz

$$\rho_\gamma d\nu = 8\pi \frac{h\nu^3}{e^{h\nu/kT_\gamma}-1}\, d\nu \qquad (1.1)$$

bei der freien Expansion erhalten, wobei die Temperatur T_γ proportional zu a^{-1} fällt,

$$\boxed{a(t)\, T_\gamma(t) = \text{const.}} \qquad (1.2)$$

Dies ist eine Besonderheit von masselosen Teilchen! Die Strahlungsenergiedichte nimmt damit wie a^{-4} ab.

Wir wollen nun die optische Tiefe der Hintergrundstrahlung von heute (Zeit t_0) bis zur Vergangenheit t_1 abschätzen. Dazu trägt praktisch nur die Streuung an freien Elektronen bei (siehe die nächste Übungsaufgabe), welche durch teilweise Reionisation der intergalaktischen Materie entstanden sein könnten (siehe dazu Abschnitt 7).

Bezeichnet σ_T den Thomson-Querschnitt und $n_e(t)$ die Dichte der freien Elektronen zur Zeit t, so ist die optische Tiefe

$$\tau = \int_{t_1}^{t_0} \sigma_T n_e(t)\, dt . \qquad (1.3)$$

Wir setzen

$$n_e(t) = x \frac{\rho(t)}{m_H}, \quad \rho(t): \text{totale Massendichte}, \quad x < 1. \qquad (1.4)$$

Es ist also für ein materiedominiertes Universum

$$n_e(t) = x\,\frac{\rho(t)}{\rho_0 m_H}\,\Omega_0 \rho_c = x\left(\frac{a_0}{a(t)}\right)^3 \Omega_0 \frac{3H_0^2}{8\pi G m_H} . \qquad (1.5)$$

Ferner gilt nach (II.2.4)

$$dt = \frac{da}{a_0 H_0}\left[1-\Omega_0+\Omega_0\frac{a_0}{a(t)}\right]^{-1/2} \qquad (1.6)$$

und damit

$$\tau = x\,\frac{3\Omega_0 H_0 \sigma_T a_0^2}{8\pi G m_H}\int_{a(t_1)}^{a_0} a^{-3}\left[1-\Omega_0+\Omega_0\frac{a_0}{a}\right]^{-1/2} da . \qquad (1.7)$$

Das Integral ist elementar. Drücken wir das Resultat noch durch die Rotverschiebung $z=-1+a_0/a(t_1)$ aus, so kommt

$$\boxed{\tau(z) = x\,\frac{\tau_c}{\Omega_0}\left[(3\Omega_0+\Omega_0 z-2)\sqrt{1+\Omega_0 z}+z-3\Omega_0\right]}, \qquad (1.8)$$

wobei

$$\tau_c = \frac{H_0 \sigma_T c}{4\pi G m_H} = 0.046\ h_0 . \qquad (1.9)$$

Für $\Omega_0 = 1$ erhalten wir z.B.

$$\tau(z) = x\,\tau_c\left[(1+z)^{3/2}-1\right] . \qquad (1.10)$$

Sogar für $x=1$ ist $\tau(z)<1$ bis zu $z=\left(1+\frac{1}{\tau_c}\right)^{2/3}-1$, was für $h_0 = 1/2$ den Wert 11.6 hat.

In diesem Zusammenhang muss man sich die Frage stellen, wie gross die Kühlungszeit für ein intergalaktisches Plasma wäre. Nun ist die Energieverlustrate pro Volumeneinheit für Bremsstrahlung (siehe [NS, (9.1.53)] oder Anhang H):

$$-\frac{d\varepsilon}{dt} = 1.4 \times 10^{-27}\, n_e n_i T^{1/2} \frac{\text{erg}}{\text{sec cm}^3}, \qquad (1.11)$$

wobei n_i die Dichte der Ionen ist. Andererseits ist die thermische Energiedichte

$$\varepsilon^{th} \simeq 3 n_e kT = 3 n_e (1.4 \times 10^{-16})\, T \ \text{erg/cm}^3.$$

Für die charakteristische Kühlungszeit erhalten wir also

$$\tau \simeq \frac{3T^{1/2}}{n_e} \times 10^{11}\,\text{sec}. \qquad (1.12)$$

Für das Beispiel $T = 10^6\,K$, $n_e = 10^{-5}\,\text{cm}^{-3}$ ist dies etwa $10^{12}\,a$, also wesentlich länger als die Hubble-Zeit.

Übungsaufgaben: (i) Zeige, dass das Verhältnis von Rayleigh-Streuung an H-Atomen zur Thomson Streuung für $c = \hbar = 1$ gleich

$$\frac{\alpha(0)^2 \omega^4}{1/m^2} \qquad (1.13)$$

ist, wobei $\alpha(0)$ die atomare Polarisierbarkeit des H-Atoms ist.

(ii) Schätze mit einer Variationsrechnung den Wert von $\alpha(0)$ ab zu

$$\alpha(0) \simeq \frac{4 m a_0^4}{[\hbar^2]}.$$

Damit gilt

$$\sigma(\text{Rayleigh}) = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 \sigma(\text{Thomson}), \qquad (1.14)$$

mit

$$\omega_0 = \tfrac{1}{2}\alpha^2 m : \text{Rydberg-Frequenz}.$$

(iii) Bestimme die optische Tiefe der Hintergrundstrahlung aufgrund von Rayleigh-Streuung als Funktion von z (nach dem Vorbild von (1.8)).

– – – – – – –

Zum Schluss dieses Abschnittes zeigen wir noch das gesamte Spektrum der kosmischen Hintergrundstrahlung, soweit es heute bekannt ist (Fig. 2).

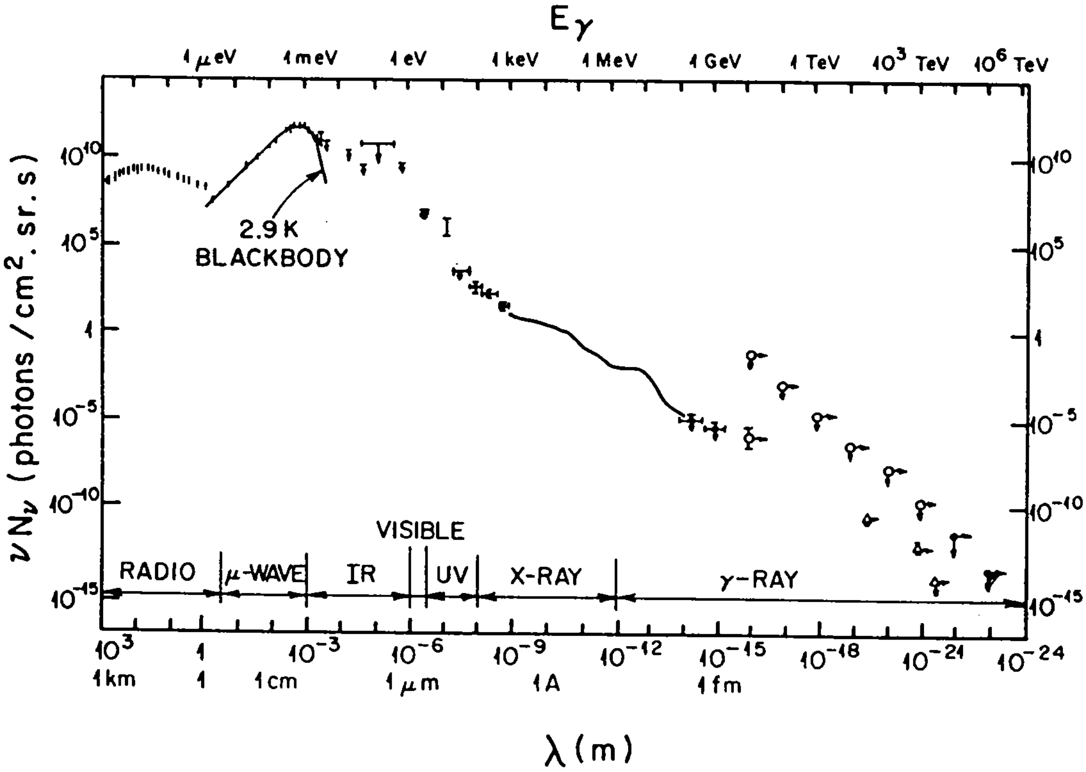


Fig. III.2. Das Spektrum der kosmischen Hintergrund-strahlung. Bekannte Vordergrundstrahlung durch galaktische Quellen wurde abgezogen (nach M. Turner).

Man sieht sehr schön, wie der Mikrowellenhintergrund herausragt. In diesem Zusammenhang sollte man sich die Dichte der 3K-Photonen merken:

$$n_\gamma = 2\,\zeta(3)\;8\pi\left(\frac{kT}{hc}\right)^3 = 399\ \mathrm{cm}^{-3} \quad \text{für } T = 2.7\,\mathrm{K},$$

$$\rho_\gamma = 6\,\underbrace{\zeta(4)}_{\pi^4/90}\;8\pi\left(\frac{kT}{hc}\right)^3\frac{kT}{c^2} \simeq 2.7\,\frac{kT}{c^2}\,n_\gamma\,. \qquad (1.15)$$

2. Rekombination, Baryondichte / Entropiedichte

Die Entropiedichte s_γ der schwarzen Strahlung ist $s_\gamma = k\,\frac{4\pi^2}{45}\cdot\left(\frac{kT}{\hbar c}\right)^3$. Von nun an verwenden wir – wenn nicht anderes gesagt wird – Einheiten*) mit $\hbar = c = k = 1$. Dann ist

$$s_\gamma = \frac{4\pi^2}{45}T^3 = 3.60\, n_\gamma \qquad (2.1)$$

und $a^3 s_\gamma$ bleibt bei adiabatischer Expansion konstant. Da die Baryonzahldichte n_B mit a^{-3} abnimmt, ist also die <u>Strahlungsentropie pro Baryon, s_γ/n_B, bei adiabatischer Expansion konstant</u>. Dieses Verhältnis hat gegenwärtig den Wert

$$\left(\frac{s_\gamma}{n_B}\right)_0 = \left(\frac{s_\gamma}{\rho_B/m_p}\right)_0 = \left(\frac{s_\gamma}{\Omega_B \rho_c/m_p}\right)_0 \overset{(\text{II}.1.6)}{=} \left(\frac{3.6\times n_\gamma}{\Omega_B h^2 \times 1.12\times 10^{-5}\,\mathrm{cm}^{-3}}\right)_0$$

$$= \frac{3.6\times 400}{1.12\times 10^{-5}}\left(\Omega_{B0}h_0^2\right)^{-1},$$

$$\boxed{\left(\frac{s_\gamma}{n_B}\right)_0 = 1.3\times 10^8\left(\Omega_{B0}h_0^2\right)^{-1}.} \qquad (2.2)$$

Da der letzte Faktor in dieser Gleichung schlecht bekannt ist, ergibt sich aus (2.1) und (2.2) eine beträchtliche Unsicherheit in

$$\frac{n_B}{n_\gamma} = 10^{-9\pm 1}. \qquad (2.3)$$

Auf jedenfall ist das Verhältnis n_B/n_γ sehr klein. Nach

---

*) Dann ist $1\,\mathrm{GeV} = 1.16\times 10^{13}\,\mathrm{K} = 1.78\times 10^{-24}\,\mathrm{g}$ und $1\,\mathrm{GeV}^{-1} = 1.97\times 10^{-14}\,\mathrm{cm} = 6.58\times 10^{-25}\,\mathrm{sec}$.

unseren heutigen Vorstellungen war dieses Verhältnis auch zu einem Zeitpunkt etwa gleich gross, als die Zahl der Baryonen und der Antibaryonen im sehr frühen heissen Universum vergleichbar zu n_γ war. Deshalb bedeutet (2.3), dass es auf 10^8 Antibaryonen $10^8 + O(1)$ Baryonen gab. Mit anderen Worten, die B-Asymmetrie war in einer Frühphase sehr klein. Bei der Abkühlung unter 1 GeV annihilierten sich Teilchen und Antiteilchen, und es verblieb schliesslich nur der winzige Überschuss (2.3) pro Photon, auf dem auch unsere Existenz beruht.

Die grossvereinheitlichten Theorien (GUTS) haben neues Licht auf die alte Frage geworfen, auf welche Weise ein B-asymmetrisches Universum mit dem kleinen Wert (2.3) auf natürliche Weise entstehen konnte. Darauf werden wir in Kap. VII im Detail eingehen.

Wir berechnen nun die (Re-)kombinationstemperatur von Wasserstoff als Funktion von s_γ/n_B. Dazu wenden wir die üblichen Regeln der statistischen Mechanik auf das Gleichgewicht

$$e + p \longleftrightarrow H + 13.6\,eV \qquad (2.4)$$

an. Für die chemischen Potentiale gilt die Gleichgewichtsbedingung

$$\mu_H = \mu_e + \mu_p . \qquad (2.5)$$

Zu ihrer Berechnung vernachlässigen wir die angeregten Zustände von H. Im nichtrelativistischen und nichtentarteten Fall ist

$$n_e = 2\, e^{\mu_e/T} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty 4\pi p^2 dp \; e^{-p^2/2m_eT}$$

$$= 2\, e^{\mu_e/T} (2\pi)^{-3} (2\pi m_e T)^{3/2}. \qquad (2.6)$$

Ebenso

$$n_p = 2\, e^{\mu_p/T} (2\pi)^{-3} (2\pi m_p T)^{3/2} \qquad (2.7)$$

und

$$n_H = 4\, e^{\mu_H/T} e^{\Delta/T} (2\pi)^{-3} (2\pi m_p T)^{3/2}, \qquad (2.8)$$

wobei $\Delta = \frac{1}{2}\alpha^2 m_e$ die Ionisationsenergie ist. Bemerken wir noch die Ladungsneutralität $n_e = n_p$, so folgt aus diesen Ausdrücken und (2.5)

$$\frac{n_e^2}{n_H} = \frac{n_e n_p}{n_H} = e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 m_e/T} \left(\frac{m_e T}{2\pi}\right)^{3/2}. \qquad (2.9)$$

Der <u>Ionisationsgrad</u> x ist definiert durch

$$x = \frac{n_p}{n_p + n_H}. \qquad (2.10)$$

Nach (2.9) gilt

$$\boxed{\frac{x^2}{1-x} = \frac{n_e^2}{n_H} \underbrace{\frac{1}{n_p + n_H}}_{n_B} = \frac{1}{n_B} \left(\frac{m_e T}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 m_e/T}}. \qquad (2.11)$$

Dies ist die sog. <u>Saha-Gleichung</u>. Wir lösen diese jetzt für $x = \frac{1}{2}$. Im folgenden sei $\sigma := s_\gamma / n_B$, also nach (2.1) $n_B = \frac{4\pi^2}{45} T^3/\sigma$. Damit folgt aus (2.11)

$$\frac{2^{1/2}\, 4\, \pi^{7/2}}{45} \frac{1}{\sigma} \left(\frac{T}{m_e}\right)^{3/2} = e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 m_e/T}, \qquad (2.12)$$

oder

$$\frac{m_e}{T} = 2\,(137)^2 \left(\ln \frac{\sigma}{6.908} + \frac{3}{2} \ln \frac{m_e}{T} \right). \qquad (2.13)$$

Durch Iterationen ergibt sich daraus

$$\boxed{T \simeq \frac{m_e}{2(137)^2} \left[\ln\left(\frac{\sigma}{6.908}\right) + \frac{3}{2}\left(10.53 + \ln\ln \frac{\sigma}{6.908}\right)\right]^{-1}}, \qquad (2.14)$$

$$T \simeq \begin{cases} 4330\ ^\circ K & \text{für } \sigma = 10^8, \\ 4050\ ^\circ K & \text{für } \sigma = 10^9. \end{cases} \qquad (2.15)$$

Grob erhält man aus (2.14) im relevanten Bereich für σ

$$\boxed{T_{\text{Rek.}} \simeq 0.02\,\alpha^2 m_e\,, \quad z_{\text{Rek.}} \simeq 1500\,.} \qquad (2.16)$$

Nun vergleichen wir ρ_B und ρ_γ bei dieser Rekombinationstemperatur. Dazu benutzen wir die Tatsache, dass $a \cdot T_\gamma = \text{const}$, und zwar nicht nur bei der freien Expansion (Gl. (1.27)), sondern auch im Gleichgewicht zwischen Strahlung und Materie. Letzteres werden wir anschliessend gleich zeigen. Deshalb gilt mit (1.15) für $T_{\gamma 0} = 2.7\,K$:

$$\frac{\rho_\gamma}{\rho_B} = \frac{\frac{\pi^2}{15} T_\gamma^4}{n_B m_p} = \frac{\frac{\pi^2}{15} T_{\gamma 0}^4}{n_{B0} m_p} \frac{T_\gamma}{T_{\gamma 0}} = \frac{\frac{\pi^2}{15} T_{\gamma 0}^4}{\Omega_B \rho_c} \frac{T_\gamma}{T_{\gamma 0}}$$

$$= 0.9 \times 10^{-4} \frac{1}{\Omega_B (H_0/50)^2} \frac{T_\gamma}{T_{\gamma 0}}\,. \qquad (2.17)$$

Bei

$$\frac{T_\gamma}{T_{\gamma 0}} \simeq 10^4\, \Omega_B (H_0/50)^2 \qquad (2.18)$$

ist also $\rho_\gamma = \rho_B$. Diese Temperatur ist nicht sehr verschieden von der Rekombinationstemperatur.

Um die Konstanz von $a \cdot T$ im Gleichgewicht einzusehen, betrachten wir ein ideales Gas im Gleichgewicht mit schwarzer Strahlung. Dann sind totaler Druck und Energiedichte:

$$p = nT + \frac{\pi^2}{45} T^4 ,$$

$$\rho = n m + \frac{nT}{\gamma - 1} + \frac{\pi^2}{15} T^4 \qquad (2.19)$$

($\gamma = 5/3$ für ein monoatomares Gas). Die Erhaltung der Zahl der Gasteilchen bedeutet

$$n a^3 = n_0 a_0^3$$

und der "Energiesatz" (I.4.17) gibt

$$\frac{d}{da}\left[n m a^3 + \frac{nT}{\gamma-1} a^3 + \frac{\pi^2}{15} T^4 a^3 \right] = -3nTa^2 - \frac{\pi^2}{15} T^4 a^2 .$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt

$$\frac{a}{T} \frac{dT}{da} = - \left[\frac{\sigma + 1}{\sigma + \frac{1}{3} (\gamma - 1)^{-1}} \right] . \qquad (2.20)$$

Für $\sigma << 1$ gibt diese Beziehung $T \propto a^{-3(\gamma-1)}$, d.h. die bekannte Änderung der Temperatur bei adiabatischer Expansion eines idealen Gases.

Uns interessiert aber der Fall $\sigma >> 1$ und dafür gibt (2.20), wie erwartet, $a \cdot T = \text{const}$. Wir halten nochmals fest: Nicht nur bei der freien Expansion nach der Entkopplung der Strahlung von der Materie, sondern auch bei adiabatischen Expansionsphasen, bleibt $a \cdot T = \text{const}$. Wir werden im sehr frühen Universum auch nichtadiabatische Phasen kennenlernen, in denen die Wärmestrahlung zusätzlich aufgeheizt wird.

Es ist plausibel, dass für $\sigma \gg 1$ das Planck'sche Verteilungsgesetz bei der Entkopplung nicht stark gestört wurde. Vorher war das Strahlungsfluid sehr zäh (Thomson drag) und deshalb konnten sich Galaxien und Sterne erst nach der Plasma-Ära bilden (siehe Kap. V).

3. Kausalität und Isotropie der Hintergrundstrahlung

Wir kommen nun zu einer sehr wichtigen prinzipiellen Betrachtung. Ausgangspunkt ist die unerhörte Isotropie der Hintergrundstrahlung, auf welche wir schon in §I.1 hingewiesen haben (siehe Fig. I.1). Nach dem Vorangegangenen bedeutet dies, dass die Fläche letzter Streuung zu $z_e \simeq 1500$ überall fast genau die gleiche Temperatur hatte. Wir werden im folgenden sehen, dass diese gleichförmige Temperatur der "kosmischen Photosphäre" im Rahmen des Standardmodells sehr rätselhaft ist, da z.B. antipodische Punkte so weit voneinander entfernt sind, dass sie vor der Entkopplung gar keinen kausalen Kontakt haben konnten.

Dazu bestimmen wir den geodätischen Abstand $d(\theta)$ von zwei Emissionspunkten zum Winkelabstand θ und vergleichen diesen mit der Teilchenhorizontlänge $d_H(t_R)$ zur Zeit der Rekombination.

Die Emissionspunkte liegen im Raum konstanter Krümmung $k/a(t_R)$ $(k=0,\pm 1)$ mit gleicher radialer Koordinate r_R und Winkelabstand θ. Zunächst betrachten wir den einfachen Fall $\theta=\pi$ (antipodische Emissionspunkte). Für Lichtstrahlen ist $dt/a(t) = dr\,(1-kr^2)^{-1/2}$ und damit ist der geodätische Abstand (siehe Fig. 3):

$$d(\pi) = 2a(t_R)\int_0^{r_R} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = 2a(t_R)\int_{t_R}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} . \qquad (3.1)$$

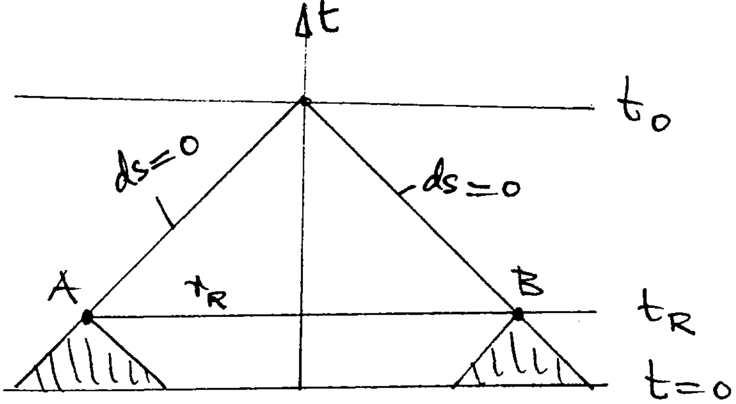


Fig. III. 3. Die Rückwärtskegel zweier antipodischen Emissionspunkte A,B zur Rekombinationszeit überlappen sich nicht.

Die Horizontlänge zur Zeit t_R ist andererseits nach (II.5.3)

$$d_H(t_R) = a(t_R)\int_0^{t_R} \frac{dt}{a(t)} . \qquad (3.2)$$

Die Zahl der Kausalitätslängen von $d(\pi)$ ist

$$d(\pi)/2d_H(t_R) = \int_{t_R}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \Big/ \int_0^{t_R} \frac{dt}{a(t)} . \qquad (3.3)$$

Darin ist der Zähler recht gut bekannt, da wir für den Integrationsbereich ein materiedominiertes Universum annehmen dürfen. Dafür wurde der Zähler bereits in (II.5.14) berechnet. Für grosse z erhält man daraus

$$\frac{1}{2}d(\pi) = \frac{2}{H_0 z_R}\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2q_0-1}}\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2q_0-1}}{q_0}\right) & (k=1) \\ 1 & (k=0) \\ \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-2q_0}}\sinh^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-2q_0}}{q_0}\right) & (k=-1). \end{cases} \tag{3.4}$$

Zur Berechnung der Horizontdistanz benötigen wir $a(t)$ für das frühe Universum ($t < t_R$). Dafür sind die materie-dominierten Formeln nicht unbedingt massgebend. Für eine erste Orientierung benutzen wir sie trotzdem. (In einer Übung (p.167) werden wir sehen, dass strahlungs-dominierte Formeln nicht viel ändern.) Aus (II.5.5) erhält man für $z \gg 1$

$$d_H(z_R) \simeq \frac{2}{H_0 z_R^{3/2}}\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2q_0}} & (k=\pm 1) \\ 1 & (k=0). \end{cases} \tag{3.5}$$

Aus (3.4) und (3.5) erhalten wir für die Zahl der Kausalitäts-längen (3.3) zwischen antipodischen Punkten

$$\frac{d(\pi)}{2d_H(z_R)} \simeq \sqrt{z_R}\begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{2q_0}{2q_0-1}\right)^{1/2}\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2q_0-1}}{q_0}\right) & (k=1) \\ 1 & (k=0) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{2q_0}{1-2q_0}\right)^{1/2}\sinh^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-2q_0}}{q_0}\right), & (k=-1) \end{cases} \tag{3.6}$$

also etwa $\sqrt{z_R} \simeq 40$!! Diese grundsätzliche Schwierigkeit nennt man das Horizontproblem. In Kap. VIII werden wir im Rahmen des inflationären Modells einen spekulativen Ausweg finden. In diesem Szenario wächst $a(t)$ in einer sehr frühen Phase – aufgrund einer dominanten "Vakuumenergie" – exponentiell rasch an, sodass der Horizont stark anwächst und damit das Verhältnis (3.3) unter Eins sinkt.

Wir holen nun noch die instruktive Berechnung von $d(\theta)$ für beliebige Winkel θ nach. Dazu bedienen wir uns der Isometriegruppen der räumlichen Schnitte.

Die 3-dim. Räume konstanter Krümmung $k = \pm 1$ sind isometrisch zur (pseudo-) Sphäre $\{(\underline{x}, z) : z^2 + k\underline{x}^2 = 1, \underline{x} \in \mathbb{R}^3\}$ mit der induzierten Metrik

$$d\sigma^2 = (d\underline{x})^2 + k\, dz^2 = (d\underline{x})^2 + k \frac{(\underline{x} \cdot d\underline{x})^2}{1 - k\underline{x}^2} . \qquad (3.7)$$

In dieser Formel ist auch der Fall $k = 0$ eingeschlossen. Die zugehörigen Isometriegruppen sind:

- $SO(4)$ für $k = 1$,
- euklidische Bewegungsgruppe für $k = 0$,
- $SO(1,3)$ für $k = -1$.

Die Isotropiegruppe (Stabilisator) jedes Punktes ist $SO(3)$. Daneben haben wir noch in jedem Fall eine dreiparametrige Schar von "Translationen". Für $k = -1$ sind dies die speziellen Lorentztransformationen. In üblichen Bezeichnungen haben diese die Form:

$$\underline{x}' = \underline{x} + (\gamma - 1) \frac{(\underline{x} \cdot \underline{v})\underline{v}}{v^2} - \gamma \underline{v} t ,$$

$$t' = \gamma (t - \underline{x} \cdot \underline{v}) .$$

In diesen Formeln substituieren wir $\underline{a} = -\gamma\,\underline{v}$ $(\Rightarrow \gamma = \sqrt{1+\underline{a}^2})$ $t \equiv z = \sqrt{1+\underline{x}^2}$ und erhalten

$$\underline{x}' = \underline{x} + \underline{a}\sqrt{1+\underline{x}^2} + \left[\sqrt{1+\underline{a}^2} - 1\right]\frac{(\underline{x}\cdot\underline{a})\,\underline{a}}{a^2}.$$

Man überlegt sich leicht, dass die Verallgemeinerung dieser Isometrien auf alle drei Fälle $k = \pm 1, 0$ so lautet:

$$\underline{x}' = \underline{x} + \underline{a}\sqrt{1-k\underline{x}^2} + \left[\sqrt{1-k\underline{a}^2} - 1\right]\frac{(\underline{x}\cdot\underline{a})\,\underline{a}}{\underline{a}^2}. \tag{3.8}$$

(Beachte, dass alle Skalarprodukte euklidisch gemeint sind.)

Wir erhalten, nebenbei bemerkt, aus (3.7) wieder die uns geläufige Form (I.6.7), wenn wir Polarkoordinaten einführen. Wegen $(d\underline{x})^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2$, $\underline{x}\cdot d\underline{x} = \frac{1}{2}d(\underline{x}^2) = r\,dr$, ist tatsächlich

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2. \tag{3.9}$$

Die Bahn einer Geodäten durch den Ursprung hat aus Symmetriegründen die Form

$$\underline{x} = \rho\,\underline{n}, \quad \underline{n}^2 = 1 \tag{3.10}$$

(ρ ist i.a. kein affiner Parameter). Darauf üben wir die isometrische Transformation (3.8) aus und erhalten die folgende Schar von Geodäten

$$\underline{x}(\rho) = \rho\,\underline{n} + \underline{a}\sqrt{1-k\rho^2} + \left[\sqrt{1-k\underline{a}^2} - 1\right]\frac{\rho\,(\underline{n}\cdot\underline{a})\,\underline{a}}{a^2}. \tag{3.11}$$

Es genügt im folgenden, $\underline{a}$ senkrecht auf $\underline{n}$ zu wählen:

$$\underline{a} = a\,\underline{e}, \quad \underline{e}^2 = 1, \quad \underline{e}\cdot\underline{n} = 0. \tag{3.12}$$

Dann wird aus (3.11)

$$\boxed{\underline{x}(\rho) = \rho\,\underline{u} + a\,\underline{e}\,\sqrt{1-k\rho^2}\,.} \tag{3.13}$$

Nun wählen wir das Intervall $[-\rho_1, \rho_1]$ für ρ und den Parameter a so, dass $|\underline{x}(\pm\rho_1)|^2 = r_1^2$ und $\underline{x}(\rho_1)\cdot\underline{x}(-\rho_1) = r_1^2 \cdot \cos\theta$ ist. Dies bedeutet nach (3.13)

$$r_1^2 = \rho_1^2 + a^2(1-k\rho_1^2)\,, \quad \cos\theta = \frac{a^2\sqrt{1-k\rho_1^2} - \rho_1^2}{r_1^2}\,.$$

Daraus ergibt sich

$$\rho_1 = r_1 \sin\frac{\theta}{2}\,, \quad a = r_1 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[1 - k r_1^2 \sin^2\frac{\theta}{2}\right]^{-1/2}. \tag{3.14}$$

Mit einer kurzen Rechnung erhalten wir, wenn jetzt $r_1 = r_R$ ist,

$$d(\theta) = a(t_R)\int_{-\rho_1}^{+\rho_1} d\rho\left[\left(\frac{dx}{d\rho}\right)^2 + k\,\frac{(\underline{x}(\rho)\cdot d\underline{x}/d\rho)^2}{1-k\underline{x}^2(\rho)}\right]^{1/2}$$

$$= 2a(t_R)\int_0^{r_R\sin\frac{\theta}{2}} \frac{d\rho}{\sqrt{1-k\rho^2}}\,,$$

also

$$\boxed{d(\theta) = \frac{2a_0}{1+z_R}\int_0^{r_R\sin\frac{\theta}{2}} \frac{d\rho}{\sqrt{1-k\rho^2}}\,.} \tag{3.15}$$

Das Integral in (3.15) ist elementar. Drücken wir noch a_0 und r_R mit (II.1.7) und (II.3.2) durch H_0, q_0 und z_R aus, so findet man sofort:

$$d(\theta) = \frac{2}{H_0(1+z_R)\sqrt{2q_0-1}}\sin^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2q_0-1}\,\left[z_R q_0 + (q_0-1)\left(-1+\sqrt{2q_0 z_R+1}\right)\right]}{q_0^2(1+z_R)}\sin\frac{\theta}{2}\right\},$$

für $q_0 > \frac{1}{2}$ $(k=1)$; (3.16)

$$d(\theta) = \frac{4}{H_0(1+z_R)}\left\{1 - (1+z_R)^{-1/2}\right\}\sin\frac{\theta}{2}\,,$$

für $q_0 = \frac{1}{2}$ $(k=0)$; (3.17)

$$d(\theta) = \frac{2}{H_0(1+z_R)\sqrt{1-2q_0}} \sinh^{-1}\left\{\frac{\sqrt{1-2q_0}\left[z_R q_0 + (q_0-1)(-1+\sqrt{2q_0 z_R+1})\right]}{q_0^2(1+z_R)} \sin\frac{\theta}{2}\right\},$$

$$\text{für } q_0 < \tfrac{1}{2} \quad (k=-1). \qquad (3.18)$$

Wir betonen, dass dafür die Benutzung der materiedominierten Formeln eine gute Näherung ist.

Für kleine θ gilt für alle drei Fälle

$$\boxed{d(\theta) \simeq \frac{z_R q_0 + (q_0-1)(-1+\sqrt{2q_0 z_R+1})}{q_0^2(1+z_R)^2 H_0}\,\theta .} \qquad (3.19)$$

Dies stimmt mit (II.3.5) überein!

Wir interessieren uns nun für den Winkel θ_H für den $d(\theta_H) = 2 d_H(z_R)$ ist. Zur Orientierung verwenden wir für $d_H(z_R)$ wieder die materiedominierten Formeln (II.5.5). Eine einfache Rechnung gibt

$$\boxed{\sin\frac{\theta_H}{2} = \frac{q_0\sqrt{2q_0 z_R+1}}{z_R q_0 + (q_0-1)(-1+\sqrt{2q_0 z_R+1})}} \qquad (3.20)$$

Für $z_R \gg 1$ gibt dies

$$\theta_H \simeq 2\left(\frac{\Omega_0}{z_R}\right)^{1/2}, \qquad (3.21)$$

was für $z_R \simeq 1500$ lediglich etwa $3^\circ\sqrt{\Omega_0}$ ist. Man würde erwarten, dass sich für $\theta \gtrsim \theta_H$ Anisotropien der Hintergrundstrahlung zeigen, da dann die Emissionspunkte <u>keine kausale Verbindung</u> miteinander hatten. Wie wir bereits betont haben, ist die Strahlung aber auch über grosse Winkelbereiche ausserordentlich isotrop (siehe Fig. I.1)

* * *

4. Materiefluktuationen zur Zeit der Rekombination und Anisotropien der 3K-Strahlung

Wir betrachten eine Materiefluktuation mit Wellenzahl k und Gesamtmasse

$$M = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{2\pi}{k}\right)^3 n\, m_H \qquad (4.1)$$

zur Zeit der Rekombination. Für die zugehörige Winkelausdehnung θ gilt nach (3.19) für $z_R \gg 1$

$$2\,\frac{2\pi}{k_R} = \frac{1}{q_0 H_0 (1+z_R)}\,\theta\;,$$

d.h.

$$\theta/2 \simeq q_0 H_0 (1+z_R)\left(\frac{3M}{4\pi n_R m_H}\right)^{1/3},$$

oder, da $n \propto a^{-3}$,

$$\theta/2 = q_0 H_0 \left(\frac{3M}{4\pi n_0 m_H}\right)^{1/3}. \qquad (4.2)$$

Darin benutzen wir $q_0 = \Omega_0/2$, $n_0 m_H = \Omega_0 \rho_c$ und bekommen

$$\boxed{\begin{aligned}\theta &= \Omega_0^{2/3} H_0 \left(\frac{3M}{4\pi \rho_c}\right)^{1/3}\\ &= 5'\,(h_0 \Omega_0^2)^{1/3}\left(\frac{M}{10^{14} M_\odot}\right)^{1/3}.\end{aligned}} \qquad (4.3)$$

Wenn also M einem Cluster von Galaxien entspricht, so müsste θ einige Minuten betragen. Die Messungen in Fig. I.1 zeigen aber auch auf diesen kleinen Winkelskalen keine Anisotropien, welche grösser als etwa 10^{-4} sind. Dies ist für das Problem der Galaxienbildung sehr wichtig (siehe Kap. V).

5. Die strahlungsdominierte Ära

Bei Temperaturen wesentlich höher als (2.18) war das Universum strahlungsdominiert ($\rho_\gamma \gg \rho_B$). Diese Ära reicht zurück bis zu einer Temperatur $T_\gamma \sim m_e \simeq 5 \times 10^9\,K$, oberhalb welcher zunächst Elektronen und Positronen und dann immer schwerere Teilchen im Gleichgewicht mit der Strahlung vorhanden waren.

In der strahlungsdominierten Ära ist die Energiedichte

$$\rho = \gamma \, \frac{\pi^2}{15} T^4 . \tag{5.1}$$

Der Faktor γ soll auch die erwartete thermische Neutrinostrahlung*) in Rechnung stellen (siehe §IV.3). Für masselose Teilchen ist $p = \frac{1}{3}\rho$. Deshalb ist nach (I.4.17)

$$\frac{d}{da}(\rho a^3) = -\rho a^2 \Longrightarrow \frac{d}{da}(\rho a^4) = 0 ,$$

d.h.

$$\boxed{\rho a^4 = \mathrm{const}} . \tag{5.2}$$

Aus (5.1) und (5.2) folgt, wie wir schon wissen,

$$\boxed{T \cdot a = \mathrm{const}} . \tag{5.3}$$

Nun diskutieren wir die dynamische Gleichung (I.4.12) für $\Lambda = 0$ (Friedmann-Gl.):

---

*) Wir werden in §IV.3 sehen, dass für drei Neutrinosorten

ist. $$\gamma = 1 + 3 \times \frac{7}{8} \times \left(\frac{4}{11}\right)^{4/3} = 1.68 \tag{5.4}$$

$$\dot{a}^2 + k = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2. \tag{5.5}$$

Zunächst zeigen wir, dass die Krümmung in der strahlungsdominierten Ära vernachlässigbar ist. Für $k=\pm 1$ hat die rechte Seite nach (II.1.7) und (II.1.8) gegenwärtig den Wert

$$\frac{8\pi G \rho_0 a_0^2}{3} = \frac{\Omega_0}{|\Omega_0 - 1|}. \tag{5.6}$$

Während der materiedominierten Ära variierte die rechte Seite von (5.5) wie $1/a \propto T_\gamma$. Da Ω_0 sicher grösser als etwa 0.02 ist (siehe § II.1), war sie für $T_\gamma \simeq 10^3$ K grösser als 10 und natürlich noch grösser für höhere Temperaturen. Dagegen kann man $k=\pm 1$ in (5.5) vernachlässigen.

In dieser Näherung folgt aus (5.2) und (5.5)

$$\dot{\rho}/\rho = -4\dot{a}/a = -4\left(\frac{8\pi G\rho}{3}\right)^{1/2}$$

und damit

$$t = \left(\frac{3}{32\pi G\rho}\right)^{1/2} \tag{5.7}$$

($t=0$ für $\rho=\infty$). Setzen wir hier (5.1) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} t &= \gamma^{-1/2}\left(\frac{45}{32\pi^3 G}\right)^{1/2}\frac{1}{T^2} \\ &= 2.3\,\mathrm{sec}\ \gamma^{-1/2}\,T_{10}^{-2}, \quad T_{10} := \frac{T}{10^{10}\,\mathrm{K}}. \end{aligned} \tag{5.8}$$

In etwa 5 Stunden fiel also die Temperatur von 10^9 K auf 10^8 K und bis zur Rekombination bei $T \simeq 4000$ K dauerte es einige 10^5 Jahre. Die zeitliche Änderung von a folgt aus (5.3).

– – – – – – – – –

<u>Übungsaufgaben</u>: Betrachte ein strahlungsdominiertes Universum ($p = \frac{1}{3}\rho$).

a) Leite folgende Beziehungen her:

$$\frac{k}{a_0^2} = (q_0 - 1) H_0^2 \ , \quad \Omega_0 = q_0 \, . \qquad (5.9)$$

b) Löse die Gleichungen (5.2) und (5.5) in parametrischer Form (Parameter = konforme Zeit).

c) Betrachte $k = 1$ und vergleiche die Lebensdauer des Universums mit der eines materiedominierten Universums mit demselben Wert a_{max} des Skalenfaktors.

d) Berechne Ω und diskutiere die Instabilität von $\Omega = 1$.

– – – – – – –

<u>Teilchenhorizont</u>

Für das strahlungsdominierte Universum ist $t \propto T^{-2}$, $T \cdot a = \text{const}$, also $a \propto t^{1/2}$. Deshalb ist die Horizontlänge nach (II.5.3)

$$d_H(t) = a(t) \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = t^{1/2} \int_0^t \frac{dt'}{t'^{1/2}},$$

d.h.

$$\boxed{d_H(t) = 2t} . \qquad (5.10)$$

Setzen wir hier (5.8) ein, so kommt

$$d_H(T) = 4.6\,\text{sec}\ \gamma^{-1/2}\ T_{10}^{-2} . \tag{5.11}$$

Diese Grösse bei der Rekombinationstemperatur vergleichen wir wie oben mit dem geodätischen Abstand (3.19) für grosse z_R,

$$d(\theta) \simeq \frac{1}{q_0 H_0 z_R}\,\theta \simeq 3 \times 10^{17}\,\text{sec}\ \frac{1}{q_0 h_0 z_R}\,\theta . \tag{5.12}$$

Der Winkel θ_H ist wieder definiert durch $d(\theta_H) = 2 d_H(z_R)$. Wir erhalten

$$\theta_H \simeq q_0 h_0 z_R\ \frac{9.2\,\gamma^{-1/2}\,(T_R/10^{10}K)^{-2}}{3 \times 10^{17}} .$$

Für $T_R \simeq 4000\,K$ ist dies

$$\theta_H \simeq 0.15\ \frac{h_0 \Omega_0}{\gamma^{1/2}} \simeq 8.3^\circ\ \frac{h_0 \Omega_0}{\gamma^{1/2}} . \tag{5.13}$$

Vergleiche dies mit (3.21).

Übungsaufgabe: Welche Ausdrücke erhält man an Stelle von (3.6), wenn man (5.11) für die Horizontlänge verwendet?

Horizontmasse

Wir berechnen nun auch noch die Horizontmasse der Baryonen

$$M_H^B(t) = \frac{4\pi}{3}\,d_H(t)^3\,\underbrace{\rho_B(t)}_{n_B(t)\,m_N \,=\, m_N\left(\frac{n_B}{s}\right)s} . \tag{5.14}$$

Dabei ist m_N die Nukleonmasse und s schliesse nun auch die Entropie der Neutrinostrahlung ein:

$$s = \tilde{\gamma}\, s_\gamma = \tilde{\gamma}\, \frac{4\pi^2}{45} T^3. \qquad (5.15)$$

Numerisch*) ist $\tilde{\gamma} \simeq 2$. Die Horizontlänge ist nach (5.10) und (5.8)

$$d_H(T) = \gamma^{-1/2} \left(\frac{45}{8\pi^3 G}\right)^{1/2} \frac{1}{T^2}. \qquad (5.16)$$

Durch Einsetzen in (5.14) kommt

$$\frac{M_H^B(t)}{m_H} = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{45}{\gamma\, 8\pi^3 G}\right)^{3/2} \frac{1}{T^6} \left(\frac{n_B}{s}\right) \tilde{\gamma}\, \frac{4\pi^2}{45} T^3.$$

Nun benutzen wir die 1. Zeile in (5.8), sowie

$$\frac{n_B}{s} \simeq \frac{1}{7} \frac{n_B}{n_\gamma} = 0.41 \times 10^{-8} \left(h_0^2 \Omega_{B0}\right)$$

und finden

$$\boxed{M_H^B(t) \simeq 0.8\, M_\odot\, \frac{\tilde{\gamma}}{\gamma^{3/4}}\, t(\mathrm{sec})^{3/2} \left(h_0^2 \Omega_{B0}\right).} \qquad (5.17)$$

Übungsaufgabe: Reproduziere das Ergebnis (5.17). Wie gross ist die Horizontmasse zur Zeit der Rekombination?

Für die gesamte Horizontmasse erhalten wir mit (5.7)

$$M_H(t) = \frac{4\pi}{3} d_H(t)^3 \rho = (t/t_{Pl})\, m_{Pl},$$

wenn $t_{Pl} = 1/m_{Pl}$ die Planckzeit ist, $t_{Pl} = 5.4 \times 10^{-44}$ sec. (Für $t = t_{Pl}$ wäre also die Horizontmasse gleich der Planckmasse $m_{Pl} = 1.22 \times 10^{19}$ GeV $\simeq 10^{-5}$ g !)

---

*) Nach § IV.3 ist für drei Neutrinosorten

$$\tilde{\gamma} = 1 + 3 \times \frac{7}{8} \times \frac{4}{11}.$$

6. Bewegung der Galaxis durch den Strahlungshintergrund

Die Hintergrundstrahlung ist eine Art moderner "Äther", durch welchen wir uns mit messbarer Geschwindigkeit bewegen.

Zur näheren Erläuterung beginnen wir mit ein paar speziell-relativistischen Bemerkungen, die hier (und auch anderswo) nützlich sind.

(i) Das Phasenraum-Volumen $d^3x\, d^3p$ ist lorentz-invariant. Beweis: Das Mass $d^3p/2p^0$ ist bekanntlich lorentzinvariant. Multiplizieren wir andererseits das 4-dim. invariante Volumen $d^3x\, dx^0$ mit u^0/u^0, wo u^μ ein 4er-Geschwindigkeitsfeld ist, so ergibt sich

$$d^4x = u^0 d^3x \, \frac{dx^0}{dx^0/ds} = u^0 d^3x \, ds \, .$$

Deshalb ist auch $u^0 d^3x$ lorentzinvariant. Aus diesen beiden Bemerkungen folgt die Behauptung. □

(ii) Ist deshalb die Verteilungsfunktion $f(x,p)$ so normiert, dass $f(x,p)\, d^3x\, d^3p$ die Zahl der Teilchen (in unserem Fall der Photonen) im Gebiet $[(\underline{x},\underline{p}), (\underline{x}+d\underline{x}, \underline{p}+d\underline{p})]$ ist, so ist $f(x,p)$ lorentzinvariant.

(iii) Für Photonen ist die Intensität mit der üblichen Normierung von f $(\underline{n} := \hat{\underline{k}})$:

$$I(\omega,\underline{n})\, d\omega\, d\Omega_{\underline{n}} = \omega \cdot \frac{2}{(2\pi)^3} f(x,k)\, d^3k =$$

d.h. $$\frac{2}{(2\pi)^3} f\, \omega^3 d\omega\, d\Omega_{\underline{n}} \, ,$$

$$\boxed{I(\omega) = \frac{2}{(2\pi)^3} f\, \omega^3} \, . \qquad (6.1)$$

Deshalb ist $I(\omega)/\omega^3$ lorentzinvariant. Für thermische Gleichgewichtsstrahlung ist

$$f(\omega) = \frac{1}{e^{\omega/T}-1} . \qquad (6.2)$$

Wir sehen daraus, dass auch ein bewegter Beobachter in allen Richtungen ein Planck'sches Strahlungsgesetz sieht, wobei aber die Temperatur durch Dopplerverschiebung richtungsabhängig ist:

$$T(\theta) = \frac{T_0}{\gamma(1-v\cos\theta)} . \qquad (6.3)$$

Dabei ist v die Geschwindigkeit des Beobachters relativ zum ausgezeichneten Ruhesystem, in welchem die Strahlung mit der Temperatur T_0 isotrop ist, und θ ist seine Beobachtungsrichtung. (Leite (6.3) mit Hilfe geeigneter Invarianten her.) Für $v << c$ haben wir

$$T(\theta) \simeq T_0(1+v\cos\theta) . \qquad (6.4)$$

E.6.1 Diese Dipolanisotropie konnte sehr genau beobachtet werden (siehe Fig. I.1). Es stellte sich heraus, dass wir mit etwa 630 km/s durch den Mikrowellen-Hintergrund rasen. Die Richtung des Geschwindigkeitsvektors ist in Fig. 4 gezeigt. Dabei wurde die virgozentrische Einfallgeschwindigkeit von Tammann und Sandage*) zugrunde gelegt. Dann bleibt für den Virgo-Komplex, inklusive Lokale Gruppe, eine Geschwindigkeit von etwa 500 km/s in Richtung zum

---

*) G.A. Tammann, A. Sandage, Ap. J. 294, 81 (1985)

Hydra-Centaurus-Superkluster (Hubble-Geschwindigkeit $\simeq 3000$ km/s).

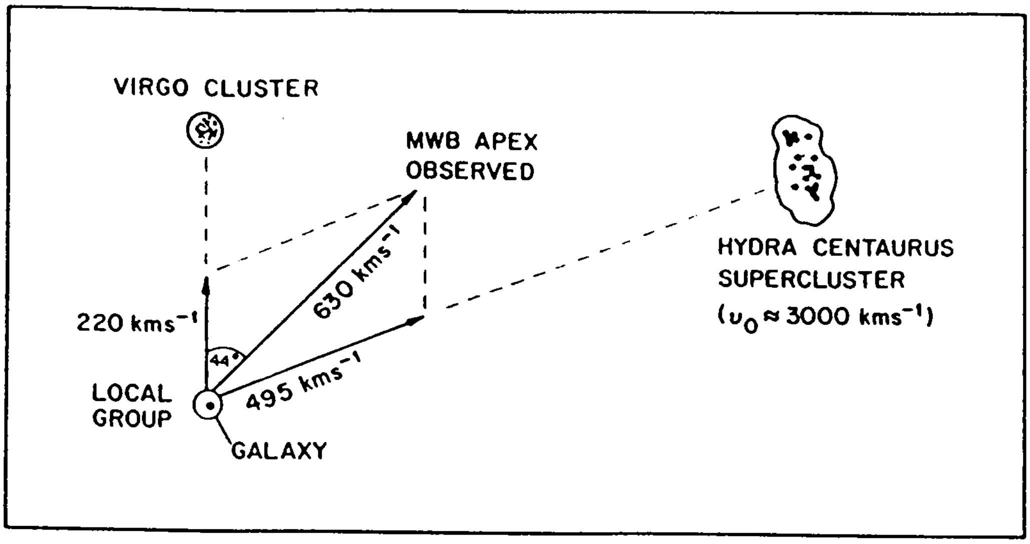


Fig. III.4. Zerlegung des Geschwindigkeitsvektors der Galaxis relativ zur Hintergrundstrahlung (nach Tammann u. Sandage)

– – – – – – –

Übungsaufgaben:

1) Berechne die Schwellenenergie hochenergetischer kosmischer γ-Quanten für die Reaktion

$$\gamma + \gamma_{3K} \to e^- + e^+$$

und zeige, dass die mittlere freie Weglänge kürzer ist als der Durchmesser der Galaxis

2) Löse die entsprechende Aufgabe für

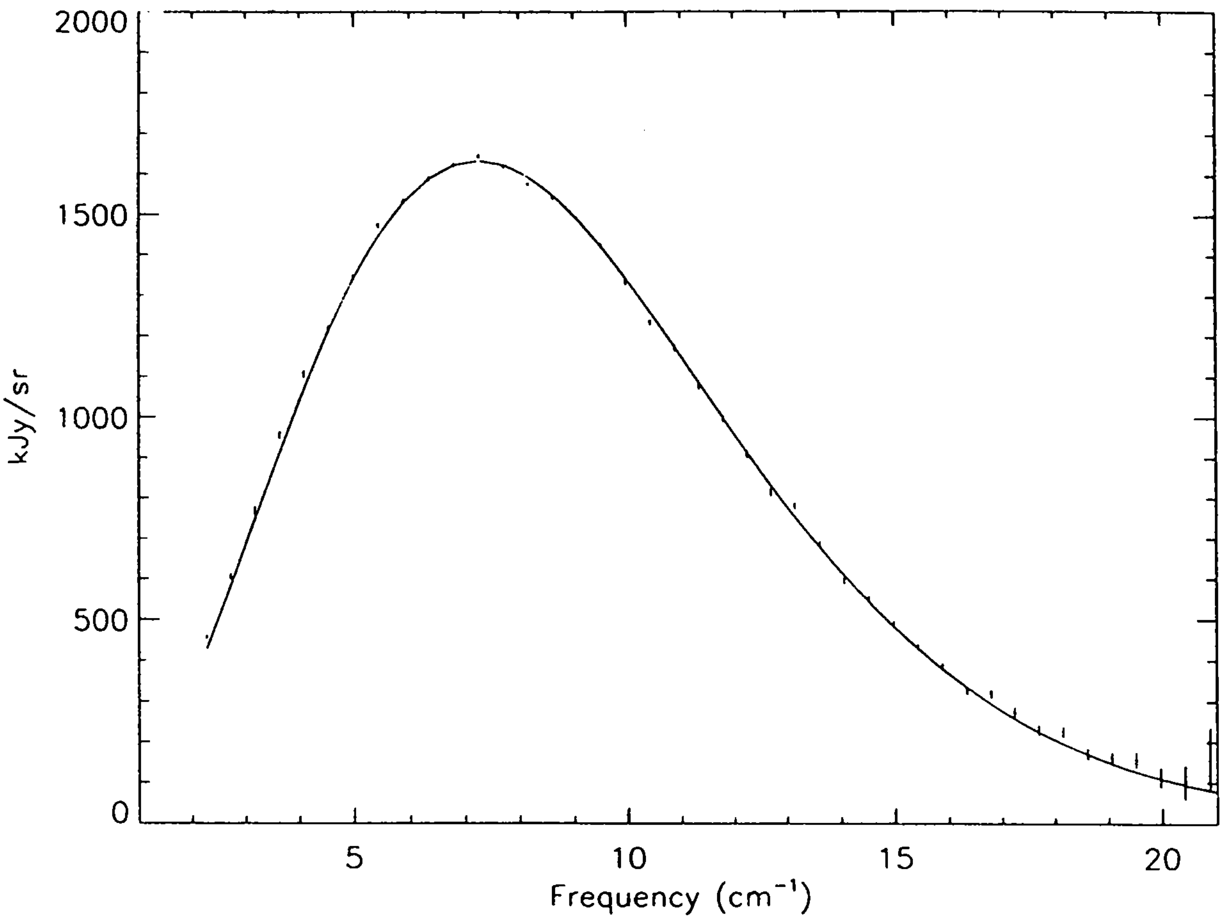
$$p + \gamma_{3K} \to N + \pi \quad , \; N = (p, n)$$

und zeige, dass die mittlere freie Weglänge vergleichbar mit dem Abstand zum Virgokluster ist. Was würde man für das hochenergetische kosmische p-Spektrum erwarten. Für experimentelle Daten siehe: PRL 54, 1875 (1985).

E.6.1

Dipolspektrum

Der neueste Fit der COBE-Daten (Ap. J. 473, 576 (1996)) für das Dipolspektrum an die Ableitung dB/dT der Planck-Verteilung ist ebenfalls erstaunlich gut, wie die nachstehende Figur zeigt. Die vertikalen Balken entsprechen 1σ Unsicherheiten. Die Dipolrichtung ist $(l,b) = (264^\circ.14 \pm 0.30,\ 48^\circ.26 \pm 0.30)$ und die Amplitude beträgt 3.372 ± 0.014 mK.



7. Intergalaktische Materie

Es ist nicht zu erwarten, dass bei der Galaxienentstehung sämtliche Atome des ursprünglichen Mediums aufgebraucht und in Galaxien gebunden wurden. Die Suche nach intergalaktischem Gas ist eine wichtige kosmologische Aufgabe, könnte es doch sein, dass dieses einen wesentlichen Teil zur mittleren Dichte beiträgt, oder gar dominant ist. Dabei wird man natürlich in erster Linie nach Wasserstoff suchen. In Abhängigkeit von den physikalischen Bedingungen kann sich das Gas in neutralem oder ionisiertem Zustand befinden.

7.1 Suche nach neutralem Wasserstoff

Wir beginnen mit der Abschätzung der möglichen Menge an neutralem Wasserstoff. Dieser müsste zu Absorptionseffekten der Strahlung von entfernten Lichtquellen führen. Betrachten wir z.B. Licht von einem entfernten Quasar. Der Teil der Strahlung, deren Wellenlängen etwas kürzer sind als L_α, wird aufgrund der Rotverschiebung auf dem Wege zu uns durch die L_α-Linie rutschen und dabei absorbiert. Wir erwarten deshalb, dass die Absorptionslinie bei 1216 Å zu einer Mulde $[\lambda_\alpha, (1+z)\lambda_\alpha]$ verbreitert wird. Diesbezügliche Beobachtungen wollen wir nun quantitativ analysieren.

A. Emissions- und Absorptionseffekte von diskreten Übergängen

Wir legen zunächst die theoretische Grundlage für die anschliessende Analyse. Ausgangpunkt sind die folgenden allgemeinen Formeln für den Strahlungstransport, welche im Anhang **E** abgeleitet werden.

Die grundlegende Gleichung für die Änderung der Intensität $I(\underline{x},\underline{k},t) \equiv I(\underline{x},\omega,\underline{n},t)$, $\underline{n}=\hat{\underline{k}}$, $\omega=|\underline{k}|$, lautet mit $D_t := \partial_t + \underline{n}\cdot\nabla_x$

$$\boxed{D_t I = -\alpha(\omega) I + j(\omega).} \tag{7.1}$$

Hier ist $j(\omega)$ die <u>Emissivität</u> (Emissionskoeffizient), d.h. $j(\omega)\,d\omega\,d\Omega$ ist die spontane Energieemissionsrate pro Volumeneinheit im Intervall $(\omega,\omega+d\omega)$ und im Raumwinkel $d\Omega$ um $\underline{n}$. (Die Argumente $\underline{x},t,\underline{n}$ werden oft unterdrückt.) Ferner ist $\alpha(\omega)$ der <u>Absorptionskoeffizient</u>, was heisst, dass $\alpha(\omega) I\, d\omega\, d\Omega$ die Energie pro Volumen- und Zeiteinheit ist, welche aus einem Strahl der Intensität $I(\omega)$ absorbiert wird.

Die Grösse $\alpha(\omega)$ hat Beiträge von wirklicher Absorption und induzierter Emission:

$$\alpha(\omega) = \underbrace{\Lambda(\omega)}_{\text{wirkliche Absorption}} - \underbrace{\tilde{\Gamma}(\omega)}_{\text{induzierte Emission}}. \tag{7.2}$$

Nach Einstein gilt die folgende Beziehung zwischen $\tilde{\Gamma}(\omega)$ und $j(\omega)$ (vgl. Anhang **E**):

$$\frac{j(\omega)}{\tilde{\Gamma}(\omega)} = \frac{2\omega^3}{(2\pi)^3}. \tag{7.3}$$

Ist die Materie in lokalem thermischen Gleichgewicht (LTE), so gilt ebenfalls nach Einstein

$$\frac{j(\omega)}{\Lambda(\omega)} = \frac{2\omega^3}{(2\pi)^3} e^{-\omega/T} . \tag{7.4}$$

Es genügt dann also, eine der drei Grössen $\Lambda(\omega)$, $\tilde{\Gamma}(\omega)$ und $j(\omega)$ zu kennen. Insbesondere folgt das <u>Kirchhoff'sche Gesetz</u>:

$$\frac{j(\omega)}{\alpha(\omega)} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{2\omega^3}{e^{\omega/T}-1} \equiv B_\omega(T) . \tag{7.5}$$

Ferner gilt

$$\alpha(\omega) = \Lambda(\omega)\left(1 - e^{-\omega/T}\right) . \tag{7.6}$$

Ist das lokale Gleichgewicht nicht etabliert, so gilt an Stelle von (7.4) und (7.5) folgendes für zwei Zustände α und β eines Atoms (Moleküls) mit Entartungsgraden g_α, g_β und Anzahldichten n_α, n_β $(E_\alpha > E_\beta)$:

$$\frac{j(\omega)}{\Lambda(\omega)} = \frac{2\omega^3}{(2\pi)^3} \frac{n_\alpha/g_\alpha}{n_\beta/g_\beta} , \tag{7.4'}$$

$$\frac{j(\omega)}{\alpha(\omega)} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{2\omega^3}{\frac{n_\beta/g_\beta}{n_\alpha/g_\alpha} - 1} . \tag{7.5'}$$

In einem expandierenden Friedmann-Universum hat man als Verallgemeinerung von (II.7.6)

$$\frac{d}{dt} I(\omega(t),t) = -3\frac{\dot{a}}{a} I(\omega(t),t) + j(\omega(t),t) - \alpha(\omega(t),t)\, I(\omega(t),t) . \tag{7.7}$$

Für die Strahlungsintensität von diskreten entfernten Quellen können wir dabei den Emissionsterm j weglassen, da dieser zum isotropen Hintergrund beiträgt. Dann lautet die Lösung dieser Gleichung

$$I(\omega_0, t_0) = I(\omega_1, t_1)\left(\frac{a(t_1)}{a(t_0)}\right)^3 e^{-\tau(\omega_0)}, \qquad (7.8)$$

wo $\tau(\omega_0)$ die <u>optische Tiefe</u>

$$\tau(\omega_0) = \int_{t_1}^{t_0} \alpha(\omega(t), t)\, dt \qquad (7.9)$$

ist $(\omega(t_0) = \omega_0)$.

Rührt $\alpha(\omega)$ von einer diskreten Linie mit Absorptionsfrequenz ω_a her, so erhält die optische Tiefe bei der beobachteten Frequenz ω_0 nur Beiträge, wenn ω_0 im Intervall

$$\frac{\omega_a}{1+z} \leq \omega_0 \leq \omega_a \qquad (7.10)$$

liegt, wobei z die Rotverschiebung der Quelle ist $(1+z = a(t_0)/a(t_1))$.

Wir berechnen im folgenden $\tau(\omega)$ für verschiedene Absorptionslinien. Ferner interessieren wir uns für ihren Beitrag zum allgemeinen Hintergrund. Dann müssen wir die volle Gleichung (7.7) lösen. Auf bekannte Weise (Variation der Konstanten) erhalten wir die folgende Lösung, wenn wir noch die Einstein-Beziehung (7.3) benutzen:

$$I(\omega(t), t) = \frac{a(t_1)}{a(t)} \exp\left(-\int_{t_1}^{t} \alpha(\omega(t'), t')\, dt'\right) I(\omega(t_1), t_1)$$
$$+ \frac{2\omega(t)^3}{(2\pi)^3} \int_{t_1}^{t} dt'\, \tilde{\Gamma}(\omega(t'), t') \exp\left(-\int_{t'}^{t} \alpha(\omega(t''), t'')\, dt''\right). \qquad (7.11)$$

Darin ist t_1 beliebig. Der erste Term gibt wie in (7.8) die verbleibende Intensität vom Anteil, der zu Zeit t_1 bereits vorhanden war. Der zweite Term ist proportional zu j und entspricht den Photonen, die seit t_1 hinzugekommen sind.

Wir wählen nun für t den gegenwärtigen Zeitpunkt und für t_1 eine so frühe Zeit, dass der ganze Untergrund im Wesentlichen seither erzeugt wurde. Dann erhalten wir aus (7.11) $(\omega(t_0) = \omega_0)$:

$$I(\omega_0) = \frac{2\omega_0^3}{(2\pi)^3} \int_{t_1}^{t_0} \tilde{\Gamma}(\omega(t),t) \exp\left(-\int_t^{t_0} \alpha(\omega(t'),t')\,dt'\right) dt. \qquad (7.12)$$

Dürfen wir für das Medium lokales thermisches Gleichgewicht annehmen, so ist nach (7.3) und (7.4)

$$\tilde{\Gamma}(\omega)/\Lambda(\omega) = e^{-\omega/T}.$$

Benutzen wir auch noch (7.6), so ergibt sich

$$I(\omega_0) = \frac{2\omega_0^3}{(2\pi)^3} \int_{t_1}^{t_0} dt\, \Lambda(\omega(t),t)\, e^{-\omega(t)/T(t)} \times$$
$$\times \exp\left\{-\int_t^{t_0} \Lambda(\omega(t'),t')\left[1 - e^{-\omega(t')/T(t')}\right] dt'\right\}. \qquad (7.13)$$

Die optische Tiefe (7.9) ist dann

$$\tau(\omega_0) = \int_{t_1}^{t_0} \Lambda(\omega(t),t)\left[1 - e^{-\omega(t)/T(t)}\right] dt. \qquad (7.14)$$

Streuung wurde bis jetzt vernachlässigt. Diese lässt sich in τ leicht berücksichtigen. Ändert bei der Streuung die Frequenz — wie im Falle der Thomson Streuung — nicht, so hat diese keinen Einfluss auf den isotropen Hintergrund. (Näheres dazu wird im Anhang E ausgeführt.)

Rührt $\Lambda(\omega)$ von einem diskreten Übergang zwischen zwei Zuständen α und β mit der Frequenz ω_a her, so können wir die Ausdrücke (7.13) und (7.14) weiter auswerten. Wir setzen (vgl. Fig. 5):

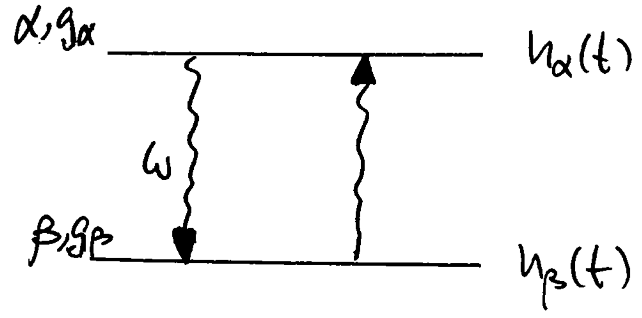


Fig. III.5

$$\Lambda(\omega,t) = n_\beta(t)\,\sigma_a(\omega) ,$$

wo $n_\beta(t)$ die Zahl der Atome zur kosmischen Zeit t im unteren Zustand β ist, und $\sigma_a(\omega)$ den Absorptionsquerschnitt mit einer scharfen Spitze bei ω_a bezeichnet.

Ist $\Gamma(\alpha \to \beta)$ die Übergangsrate für den Strahlungszerfall von α nach β, so folgt aus (7.4')

$$\frac{\Gamma(\alpha\to\beta)}{\int \sigma_a(\omega)\,d\omega} = 4\pi \frac{2\omega^2}{(2\pi)^3}\frac{g_\beta}{g_\alpha} \qquad (7.15)$$

($j(\omega)/\omega$ ist pro Raumwinkel gerechnet, deshalb der zusätzliche Faktor 4π).

Übungsaufgabe: Leite die Beziehung (7.15) direkt aus der T-Invarianz ab.

Damit haben wir

$$\boxed{\Lambda(\omega,t) = n_\beta(t)\,\Gamma(\alpha\to\beta)\,\frac{\pi^2}{\omega^2}\,\frac{g_\alpha}{g_\beta}\,\delta(\omega-\omega_a).} \tag{7.16}$$

Führen wir eine <u>Spintemperatur</u> $T_s(t)$ ein durch

$$\frac{n_\alpha/g_\alpha}{n_\beta/g_\beta} = e^{-\omega_a/T_s}\,, \tag{7.17}$$

so gilt $(n := n_\alpha + n_\beta)$:

$$n_\alpha = \frac{(g_\alpha/g_\beta)\,e^{-\omega_a/T_s}}{1+(g_\alpha/g_\beta)\,e^{-\omega_a/T_s}}\cdot n\,,$$

$$n_\beta = \frac{1}{1+(g_\alpha/g_\beta)\,e^{-\omega_a/T_s}}\cdot n \tag{7.18}$$

und

$$\Lambda(\omega,t) = n(t)\,\frac{g_\alpha/g_\beta}{1+(g_\alpha/g_\beta)\,e^{-\omega_a/T_s}}\,\Gamma(\alpha\to\beta)\,\frac{\pi^2}{\omega_a^2}\,\delta(\omega-\omega_a). \tag{7.19}$$

Im Integral (7.14) für die optische Tiefe gibt es nur Beiträge für t in der Nähe von t_a, wo $\omega(t_a)=\omega_a$ $[\omega(t_0)=\omega_0]$; also ist mit (7.19)

$$\tau(\omega_0) \simeq n(t_a)\left(1-e^{-\omega_a/T_s}\right)\frac{g_\alpha/g_\beta}{1+(g_\alpha/g_\beta)\,e^{-\omega_a/T_s}}\,\Gamma(\alpha\to\beta)\,\frac{\pi^2}{\omega_a^2} \times \int \delta(\omega(t)-\omega_a)\,dt\,.$$

Da $\omega(t)=\omega_0\, a(t)/a_0$, ist das letzte Integral gleich $\frac{1}{H(t_a)}\frac{1}{\omega_a}$ ($H(t)$: Hubble-Parameter) und folglich haben wir

$$\pi(\omega_0) = n(t_a)\left(1 - e^{-\omega_a/T_s(t_a)}\right) \frac{1}{1+(g_\alpha/g_\beta)e^{-\omega_a/T_s(t_a)}} \frac{1}{H(t_a)}$$
$$\times \frac{(g_\alpha/g_\beta)\pi^2\,\Gamma(\alpha\to\beta)}{\omega_a^3} \tag{7.20}$$

$\left[\omega_0 \frac{a(t_a)}{a_0} = \omega_a\right]$. Nach (7.15) ist

$$I_a := \frac{1}{\omega_a}\int \sigma_a(\omega)\,d\omega = \frac{\pi^2\,\Gamma(\alpha\to\beta)}{\omega_a^3}\cdot\frac{g_\alpha}{g_\beta}\,. \tag{7.21}$$

Deshalb gilt auch

$$\pi(\omega_0) = n(t_a)\left(1 - e^{-\omega_a/T_s(t_a)}\right) \frac{1}{1+(g_\alpha/g_\beta)e^{-\omega_a/T_s(t_a)}} \frac{I_a}{H(t_a)}\,. \tag{7.22}$$

Nach (II.7.10) gilt

$$H(t_a) = H_0\left(\frac{\omega_a}{\omega_0}\right)\left[1-\Omega_0+\Omega_0\frac{\omega_a}{\omega_0}\right]^{1/2}.$$

Somit ergibt sich schliesslich

$$\boxed{\begin{aligned}\pi(\omega_0) = {} & \frac{\omega_0\, n(t_a)\, I_a}{\omega_a H_0}\left[1 - e^{-\omega_a/T_s(t_a)}\right] \frac{1}{1+(g_\alpha/g_\beta)e^{-\omega_a/T_s(t_a)}} \\ & \cdot \left[1-\Omega_0+\Omega_0\frac{\omega_a}{\omega_0}\right]^{-1/2}, \\ & \text{für} \quad \frac{\omega_a}{1+z} \le \omega_0 \le \omega_a\,.\end{aligned}} \tag{7.23}$$

Dies ist die optische Tiefe der erwarteten Absorptionsmulde. Gerade oberhalb $\omega_a/(1+z)$ springt diese von Null auf

$$\pi\left(\frac{\omega_a}{1+z}+\right) = \frac{n(t_1)\,I_a}{H_0(1+z)}\,\frac{1-e^{-\omega_a/T_s(t_1)}}{1+(g_\alpha/g_\beta)e^{-\omega_a/T_s(t_1)}}\left[1+\Omega_0 z\right]^{-1/2}, \tag{7.24}$$

variiert dann langsam bis gerade unterhalb ω_a, wo sie den Wert

$$\pi(\omega_a-) = \frac{n(t_0) I_a}{H_0} \frac{1 - e^{-\omega_a/T_s(t_0)}}{1 + (g_\alpha/g_\beta) e^{-\omega_a/T_s(t_0)}} \tag{7.25}$$

annimmt und anschliessend rasch auf Null abfällt.

Nun werten wir noch den isotropen Hintergrund (7.13) aus. Die Emissionslinie des Mediums bei der Frequenz ω_a führt zu rotverschobener Strahlung bei Frequenzen $\omega_0 < \omega_a$. Der Exponentialfaktor mit der t'-Integration, der die Absorption in Rechnung stellt, ist deshalb gleich Eins und wir erhalten genauso wie bei der Auswertung von (7.14)

$$I(\omega_0) = \frac{2\omega_0^4}{(2\pi)^3} \frac{n(t_a) I_a}{\omega_a H_0} \frac{e^{-\omega_a/T_s(t_a)}}{1 + (g_\alpha/g_\beta) e^{-\omega_a/T_s(t_a)}} \left[1 - \Omega_0 + \Omega_0 \frac{\omega_a}{\omega_0}\right]^{-1/2}. \tag{7.26}$$

Dies variiert langsam bis zu ω_a-, wo

$$I(\omega_a-) = \frac{2\omega_a^3}{(2\pi)^3} \frac{n(t_0) I_a}{H_0} \frac{e^{-\omega_a/T_s(t_0)}}{1 + (g_\alpha/g_\beta) e^{-\omega_a/T_s(t_0)}}, \tag{7.27}$$

und danach fällt die Intensität rasch auf Null ab.

Wir nehmen im folgenden an, dass die Atome, welche bei der Frequenz ω_a emittieren und absorbieren, von der Zeit t_a bis t_0 weder erzeugt noch zerstört werden; insbesondere gilt dann

$$\frac{n(t_a)}{n(t_0)} = \left(\frac{\omega_a}{\omega_0}\right)^3. \tag{7.28}$$

Speziell für $\omega_a = \omega_0(1+z)$ ist $t_a = t_1$, also

$$n(t_1) = n(t_0)(1+z)^3. \tag{7.29}$$

B. Hyperfeinübergang von neutralem Wasserstoff

Dies ist der berühmte 21 cm – Übergang mit der Frequenz $\nu_a = 1420$ MHz, entsprechend der Temperatur $h\nu_a/k = 0.068$ K, welche höchstwahrscheinlich wesentlich kleiner ist als die Spintemperatur von intergalaktischem Wasserstoff: $\omega_a/T_s << 1$.

Nach (7.21) ist $(g_\alpha = 3, g_\beta = 1)$

$$I_a = \frac{3\pi^2\Gamma}{\omega_a^3} = \frac{3}{8\pi}\left(\frac{\Gamma}{\nu_a}\right)\left(\frac{c}{\nu_a}\right)^2. \tag{7.30}$$

Die Zerfallsrate ist*)

$$\Gamma = \frac{4}{3}\frac{\mu_0^2\,\omega_a^3}{\hbar c^3} = 2.85 \times 10^{-15}\ s^{-1}, \tag{7.31}$$

also

$$\frac{1}{4} I_a = 2.7 \times 10^{-23}\ cm^2. \tag{7.32}$$

Als Beispiel betrachten wir die starke Radiogalaxie Cygnus A. Da ihre Rotverschiebung $z = 0.056$ beträgt, liegt der erwartete Absorptionsstreifen zwischen 1340 und 1420 MHz. Dieser ist so eng, dass wir für seine Tiefe den Wert $\tau(\omega_a^-)$, Gl. (7.25), verwenden dürfen. Danach ist

$$\tau_a(\omega_a^-) \simeq \frac{n_{HI}(t_0)\, I_a}{H_0}\,\frac{1}{4}\,\frac{\omega_a}{T_s(t_0)}$$

oder mit (7.32)

$$\frac{n_{HI}(t_0)}{T_s(t_0)} \simeq \frac{H_0\tau}{\omega_a I_a/4} \simeq 5.9 \times 10^{-5}\,\tau\, h_0\ cm^{-3}\, deg^{-1}. \tag{7.33}$$

---

*) Siehe dazu: QM II-Skript, Kap. X, oder Landau-Lifschitz, Bd. 4, Kap. V.

Beobachtungen[1] zeigten keinen Absorptionstrog und führten zur Schranke $\tau < 5 \times 10^{-4}$, woraus nach (7.33) folgt

$$\frac{n_{HI}(t_0)}{T_s(t_0)} \leq 3.1 \times 10^{-8}\ h_0\ \mathrm{cm}^{-3}\,\mathrm{deg}^{-1} .$$

Es ist vernünftig anzunehmen, dass T_s etwa 2.7 K sein sollte*). Dann ergibt sich

$$n_{HI}(t_0) \leq 9 \times 10^{-8}\ h_0\ \mathrm{cm}^{-3} . \qquad (7.34)$$

Dies muss man mit der kritischen Nukleonenzahl (II.1.6), $n_c = 1.12 \times 10^{-5}\ h_0^2\ \mathrm{cm}^{-3}$ vergleichen,

$$\boxed{\Omega_{HI} \leq 2.7 \times 10^{-3}\, T_s\, h_0^{-1}} . \qquad (7.35)$$

Grundsätzlich müsste man auch den Sprung (7.27) in der Mikrowellenstrahlung gerade unterhalb 1420 MHz sehen:

$$\Delta I = \frac{2\omega_a^3}{(2\pi)^3}\,\frac{n_{HI}(t_0)\,(I_a/4)}{H_0} . \qquad (7.36)$$

Messungen der Hintergrundstrahlung werden üblicherweise durch die <u>Antennentemperatur</u> T_A ausgedrückt, welche durch die Rayleigh-Jeans Beziehung

$$I(\omega) =: \frac{2\omega^2}{(2\pi)^3}\, T_A \qquad (7.37)$$

definiert ist. Damit lässt sich (7.36) wie folgt durch den

---

1) A.A. Penzias, E.H. Scott, Ap. J. <u>153</u>, L7 (1968).

*) Näheres dazu findet man in [P1, p.51].

Sprung ΔT_A in der Antennentemperatur ausdrücken:

$$n_{HI}(t_0) = \frac{H_0}{\omega_a (I_a/4)} \Delta T_A = 5.9 \times 10^{-3}\,\mathrm{cm}^{-3} \left(\frac{\Delta T_A}{1\,\mathrm{K}}\right) h_0 . \qquad (7.38)$$

Penzias und Wilson[2] fanden $\Delta T_A < 0.08\,\mathrm{K}$, weshalb unabhängig von der Spintemperatur T_s,

$$n_{HI}(t_0) < (4 \times 10^{-6}\,\mathrm{cm}^{-3})\, h_0 , \qquad (7.39)$$

oder

$$\Omega_{HI} < 0.35\, h_0^{-1} , \qquad (7.40)$$

was nicht sehr einschränkend ist.

C. Lyman α – Absorption

Dafür haben die Beobachtungen viel schärfere Schranken geliefert. Die Lyman-α Linie liegt im Ultravioletten ($\lambda = 1215$ Å) und würde die Erdatmosphäre nicht durchdringen. Für Rotverschiebungen $1.5 < z < 6$ wird diese aber in den sichtbaren Bereich verschoben (3000 – 7000 Å) und kann deshalb auf der Erdoberfläche beobachtet werden. Deshalb kamen Gunn u. Peterson 1965 (damals noch Studenten am Cal Tech) auf die Idee, nach Absorptionsstreifen von Quasaren mit $z > 1.5$ im Emissionsspektrum oberhalb Lyman-α Ausschau zu halten. Dieser Gunn – Peterson-Test für intergalaktisches neutrales Gas ist deshalb gegenüber der 21 cm Strahlung besonders sensitiv, weil einmal $\omega_a / T \gg 1$ ist ($h\nu_a/k =$

---

2) A.A. Penzias, R.W. Wilson, Ap. J. 156, 799 (1969).

118'000 K) und anderseits die Grösse I_a viel grösser ist. Da $g_\alpha = 3$, $g_\beta = 1$, ist wieder

$$I_a = \frac{3}{8\pi}\,\frac{\Gamma}{\nu_a}\left(\frac{c}{\nu_a}\right)^2 ,$$

aber diesmal ist (siehe QM II-Skript)

$$\Gamma = 6.25 \times 10^8\ s^{-1}.$$

Mit $\nu_a = 2.47 \times 10^{15}$ Hz findet man

$$I_a = 4.5 \times 10^{-18}\ cm^2. \qquad (7.41)$$

Interessant ist nun vorallem die Grösse $\tau\left(\frac{\omega_a}{1+z}t\right)$ in (7.24), denn Quasarspektren zeigen oft Lyman-α als <u>Emissionslinie</u>; deshalb müsste der blaue Flügel dieser Linie durch intergalaktisches neutrales Wasserstoffgas abgeschwächt sein. Aus (7.24) bekommen wir jetzt

$$\tau\left(\frac{\omega_a}{1+z}t\right) = \frac{n_{HI}(t_1)\, I_a}{H_0(1+z)}\,\frac{1}{\sqrt{1+\Omega_0 z}}$$

$$= \frac{4.1\times 10^{10}}{(1+z)\sqrt{1+\Omega_0 z}}\left(\frac{n_{HI}(t_1)}{1\,cm^{-3}}\right) h_0^{-1}. \qquad (7.42)$$

In dieser Formel erscheint n_{HI} zur Zeit der Emission!!

Messungen verschiedener Autoren[3] zeigten keine Abschwächung des blauen Flügels von 3C9 ($z = 2.012$), im Sinne, dass $\tau < 0.05$ ist. Setzt man in (7.42) $\Omega_0 = 1$, so

---

[3] Siehe z.B.: J.B. Oke, Ap. J. <u>145</u>, 668 (1966); J.E. Gunn, B.A. Peterson, Ap. J. <u>142</u>, 1633 (1965).

bedeutet dies

$$n_{HI}(z \simeq 2) < 6.3 \times 10^{-12}\ h_0\ cm^{-3}. \tag{7.43}$$

Falls $n_{HI}(t_1) = (1+z)^3\, n_{HI}(t_0)$ ist, so folgt daraus

$$\boxed{\Omega_{HI} < 2.1 \times 10^{-8}\ h_0^{-1}}, \tag{7.44}$$

eine unglaublich tiefe Schranke. Sogar für $\tau < 1$ ist diese noch ausserordentlich scharf.

Der blaue Flügel der L_α-Linie kann natürlich nur von Gas in der Nähe der Quelle absorbiert werden. Nun könnte es sein, dass dort das Gas ionisiert ist. Man hat aber auch bei kürzeren Wellenlängen keine Absorptionseffekte gesehen.

Analoge Überlegungen und Untersuchungen sind auch auf den molekularen Wasserstoff angewandt worden, mit dem Resultat, dass auch die Dichte des molekularen Wasserstoffs im intergalaktischen Gas im Vergleich zu ρ_c vernachlässigbar ist.

Nachtrag: Inzwischen ist der Gunn-Peterson-Effekt für $z > 6$ nachgewiesen worden: siehe astro-ph/0303476

7.2 Suche nach intergalaktischem Plasma

Aufgrund der vorangegangenen Ergebnisse müssen wir zum Schluss kommen, dass das intergalaktische Gas ionisiert ist, denn es ist ja nicht anzunehmen, dass bei der Galaxienentstehung sämtliche Atome aufgebraucht wurden. Zur Aufheizung standen in frühen heftigen Entwicklungsphasen vermutlich eine Reihe von energetisch ausreichenden Quellen zur Verfügung. Wir haben bereits gesehen (p.149), dass ein intergalaktisches Plasma nur sehr langsam abkühlt, da die Bremsstrahlung kein sehr wirksamer Kühlungsmechanismus für ein extrem dünnes Plasma ist.

Zunächst stellt sich die Frage, wie hoch die Temperatur sein muss, damit das intergalaktische Gas stark ionisiert ist. Dafür kann man die Saha-Formel nicht anwenden, da kein Gleichgewicht mit einer schwarzen Strahlung vorliegt. Vielmehr erfolgt die Ionisation praktisch ausschliesslich durch Elektronenstösse, während die Rekombination mit der Emission von Photonen verbunden ist. Eine genauere Untersuchung verläuft folgendermassen.

Die Zahl der Atome (pro Volumeneinheit gerechnet), die pro Zeiteinheit durch e-Stösse ionisiert werden, ist gleich $n_e \sum_j n(HI)_j \gamma_{jf}$, wobei γ_{jf} die Ionisationsrate aus dem Zustand j des neutralen Wasserstoffatoms ist. Anderseits werden pro Zeiteinheit $n_e\, n(HII)\, \alpha^{(1)}$ neutrale H-Atome gebildet, wenn $\alpha^{(1)}$ die totale Rekombinationsrate für $e^- + p \to H + \gamma$ in irgendeinen der gebundenen H-Zustände ist. Im Gleichgewicht gilt

$$n_e \sum_j n(HI)_j \gamma_{jf} = n_e\, n(HII)\, \alpha^{(1)}$$

und die Elektronendichte kürzt sich weg! Bezeichnet x den Bruchteil der ionisierten H-Atome, so erhalten wir bei Vernachlässigung der Ionisation aus angeregten Zuständen

$$x = \frac{1}{1 + \alpha^{(1)}/\gamma_{1f}} . \qquad (7.45)$$

Der Rekombinationskoeffizient $\alpha^{(1)}$ ist numerisch[4)]

$$\alpha^{(1)} = \frac{2.06 \times 10^{-11}}{T^{1/2}}\, \phi_1(\beta)\ \mathrm{cm}^3\,\mathrm{s}^{-1}\,. \tag{7.46}$$

Dabei ist die Funktion $\phi_1(\beta)$, $\beta = \frac{13.6\,\mathrm{eV}}{kT} = \frac{158'000}{T}$ im interessanten Bereich etwa gleich Eins.[4] Für die Ionisationsrate γ_{if} bemerken wir[5]

$$\gamma_{if} \simeq 7.8 \times 10^{-11}\, T^{1/2}\, e^{-158'000/T}\ \mathrm{cm}^3\,\mathrm{s}^{-1}\,. \tag{7.47}$$

– – – – – – –

Übungsaufgabe: Begründe (7.47) im Sinne einer groben Schätzung. (Anleitung: Für Elektronenenergien > 13.6 eV ist der Ionisationsquerschnitt $\sim a_0^2$, a_0 = Bohrscher Radius.)

– – – – – – – –

Einsetzen von (7.46) und (7.47) in (7.45) zeigt, dass für $T \gtrsim 10^5$ K die Ionisation praktisch vollständig ist, aber bei $T \sim 10^4$ K fast keine Ionisation vorliegt (in krassem Gegensatz zur Saha-Formel).

Ein solches Hochtemperaturplasma ($T \gtrsim 10^5$ K) sendet durch Bremsstrahlung ultraviolette und weiche Röntgenstrahlung aus. Es wurde schon lange die Vermutung geäussert, dass der isotrope diffuse Röntgenhintergrund (teilweise) von einem intergalaktischen Plasma stammt. Dieser Hintergrund wurde 1962 entdeckt, als Giacconi und seine Mitarbeiter — nach primitiven Anfängen — einen wesentlich verbesserten Röntgendetektor mit einer kleinen

---

4) L. Spitzer, Physical Processes in the Interstellar Medium, Wiley & Sons, 1978: Gl. (5.14) und Tabelle 5.2 für $\phi_1(\beta)$.

5) K.R. Lang, Astrophysical Formulae, Springer-Verlag 1978: Gl. (2-95) und Referenzen dazu.

Rakete gerade über die Erdatmosphäre schossen. Dabei entdeckten sie erstmals eine Quelle ausserhalb des Sonnensystems, nämlich die Punktquelle Sco X-1 (ein Röntgendoppelstern). Da die Rakete während ihres kurzen Auf- und Abstiegs rasch um ihre Längsachse rotierte, geriet ein beachtlicher Teil der Himmelssphäre in ihr Beobachtungsfeld. Dabei registrierte der Detektor während der ganzen Beobachtungszeit oberhalb der Atomsphäre eine gleichbleibende Intensität der Röntgenstrahlung — unabhängig von der momentanen Ausrichtung der Rakete. Inzwischen wissen wir, dass dieser Röntgenhintergrund auf Winkelskalen grösser als dem Durchmesser des Vollmondes Anisotropien von <u>höchstens</u> 10^{-2} aufweist.

Es ist möglich, den isotropen diffusen Röntgenhintergrund als Bremsstrahlung eines intergalaktischen Plasmas mit $\Omega_{IGM} \simeq 0.25$, $T \simeq 10^8 K$ zu reproduzieren, aber eine solche Interpretation ist im <u>Widerspruch</u> zu den geringfügigen Abweichungen des 3K-Spektrums vom idealen Gesetz. Dies wollen wir im folgenden näher begründen.

A. Bremsstrahlung des intergalaktischen Plasmas

Wir nehmen an, das intergalaktische Medium (IGM) sei zu einer Zeit t_c (Rotverschiebung z_c) durch Aufheizungsprozesse ionisiert worden. Da die Bremsstrahlung sehr ineffektiv ist, dürfen wir annehmen, dass die Plasmamenge in einem mitbewegten Volumen konstant ist; es gilt also

$$n_e(t) = \left(\frac{a_0}{a(t)}\right)^3 \underbrace{n_{HII}}_{\text{heutiger Wert}} . \qquad (7.49)$$

Nach (II.7.7) ist die heute beobachtete Intensitätsverteilung (wir dürfen Selbstabsorption vernachlässigen):

$$I(\nu) = \int_{t_c}^{t_0} \left(\frac{a(t)}{a_0}\right)^3 j(\nu(1+z), t)\, dt .$$

Darin schieben wir die t-Integration auf die Rotverschiebung ab. Nach (II.4.1) ist

$$dt = -\frac{1}{H_0 (1+z)^2 \sqrt{1+\Omega_0 z}}\, dz$$

und folglich

$$I(\nu) = \frac{1}{H_0} \int_0^{z_c} \frac{j(\nu(1+z), z)}{(1+z)^5 \sqrt{1+\Omega_0 z}}\, dz . \qquad (7.50)$$

Die abgestrahlte Energie pro Volumeneinheit eines heissen Plasmas durch Bremsstrahlung wird in Anhang H ausgerechnet. Nach (H.43) ist die Emissivität als Funktion der Frequenz (nach Division durch 4π)

$$j(\nu) = 5.4 \times 10^{-39} (\mathrm{erg\,cm^{-3}\,s^{-1}\,Hz^{-1}\,ster^{-1}})\, Z^2 n_e n_i \frac{1}{T^{1/2}} e^{-h\nu/kT}\, \bar{G}(\nu, T). \quad (7.51)$$

Dabei ist der langsam variierende Gaunt-Faktor $\bar{G}$ in der Nähe von 1; wir lassen diesen im folgenden weg. Setzen wir (7.51) in (7.50) ein, so erhalten wir mit (7.49) in Einheiten $\mathrm{erg\,cm^{-2}\,s^{-1}\,ster^{-1}\,Hz^{-1}}$

$$\boxed{I(\nu) = 5.4 \times 10^{-39} n_{HII}^2 \frac{1}{H_0} \int_0^{z_c} \frac{1+z}{\sqrt{1+\Omega_0 z}} \frac{1}{\sqrt{T_e(z)}} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT_e(z)}(1+z)\right).} \qquad (7.52)$$

Für die Änderung von T_e mit z nehmen wir an, dass sich das Plasma adiabatisch abkühlt: $T_e [a(t)^3]^{\gamma-1} = \mathrm{const}$. Also ist

$$T_e(z) = T_e (1+z)^{3(\gamma-1)}.$$

In unserem Fall ist $\gamma = 5/3$, somit

$$T_e(z) = T_e(1+z)^2 ,$$

und aus (7.52) wird mit

$$\frac{n_{HII}}{n_c} = \Omega_{IGM}, \quad n_c = 1.12 \times 10^{-5} h_0^2 \, cm^{-3}$$

und $T_8 = T_e/10^8 K$:

$$I(\nu) \simeq 6 \times 10^{-25} (\dots) (\Omega_{IGM}^2 h_0^3 / T_8^{1/2}) \int_0^{z_c} \frac{1}{\sqrt{1+\Omega_0 z}} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT_e(1+z)}\right) dz . \tag{7.55}$$

Beobachtet wird (Bolt 1987)

$$\overset{beob.}{I}(\nu) \simeq 3 \times 10^{-26} (\dots) \text{ bei } 3 keV. \tag{7.56}$$

Für einen ersten groben Vergleich (genaue Resultate folgen) wählen wir $\Omega_0 = 1$ und lassen den Quanten-Abschneidefaktor in (7.55) weg:

$$I(\nu) \simeq 4 \times 10^{-25} (\dots) \Omega_{IGM}^2 h_0^3 / T_8^{1/2} . \tag{7.57}$$

Dies reproduziert (7.56) falls

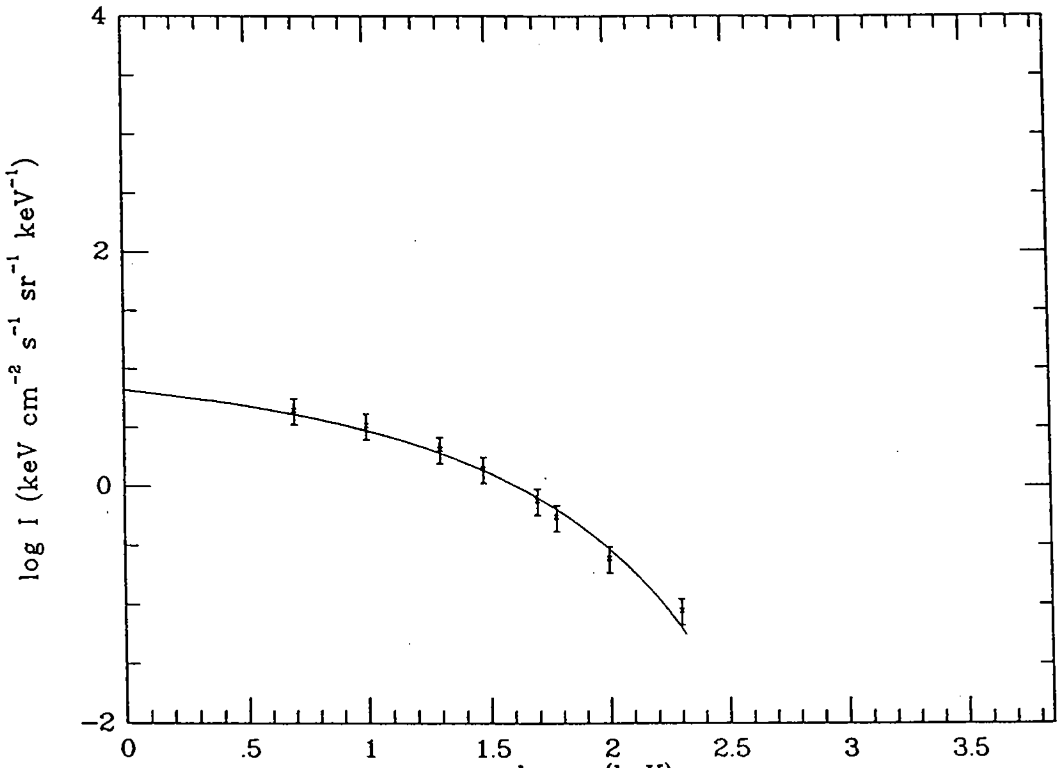
$$\Omega_{IGM} = 0.3 \, T_8^{1/4} h_0^{-3/2} . \tag{7.58}$$

Eine genaue Rechnung wurde von Taylor & Wright (ApJ. 339, 619 (89)) durchgeführt (siehe auch die Diplomarbeit von R. Walder). Diese Autoren berücksichtigen auch relativistische Korrekturen (für die Bremsstrahlung und die Entropie der Elektronen) und nehmen zusätzlich den Effekt der Compton-Kühlung (siehe dazu Rybicki & Lightman, §7.2) mit. Fig. III.6 zeigt ihren Fit an die Daten für $z_c = 5$, $h_0 = \frac{1}{2}$. Die angepassten Parameter sind

$$T_e = 10.2 keV, \quad \Omega_{IGM} = 0.27 . \tag{7.59}$$

Die Abhängigkeit dieser Parameter von z_c ist in Fig. III.7 gezeigt.

Der hohe Wert für Ω_{IGM} ist natürlich ein Problem (Näheres dazu in Kap. IV). Viel schwerwiegender ist jedoch, dass die Erhitzung des IGM auf solch hohe Temperaturen eine gigantische Energie erfordert, welche auch durch Aktivitätsphasen von Galaxien schwerlich freigesetzt werden kann. Diese Energieforderung wird etwas gemildert, falls das IGM geklumpt ist. Wir brauchen aber darauf nicht näher einzugehen, da wir das Szenario durch ein anderes Argument ausschliessen können.



III.6

FIG. 2.—The theoretical X-ray spectrum of the IGM fitted for $z_c = 5$ to eight data points representative of the 40 keV model found to be a good fit to the observed X-ray background by Marshall *et al.* (1980). The best fit parameters are $T_0 = 10.2$ keV, and $\Omega_{IGM} = 0.266$.

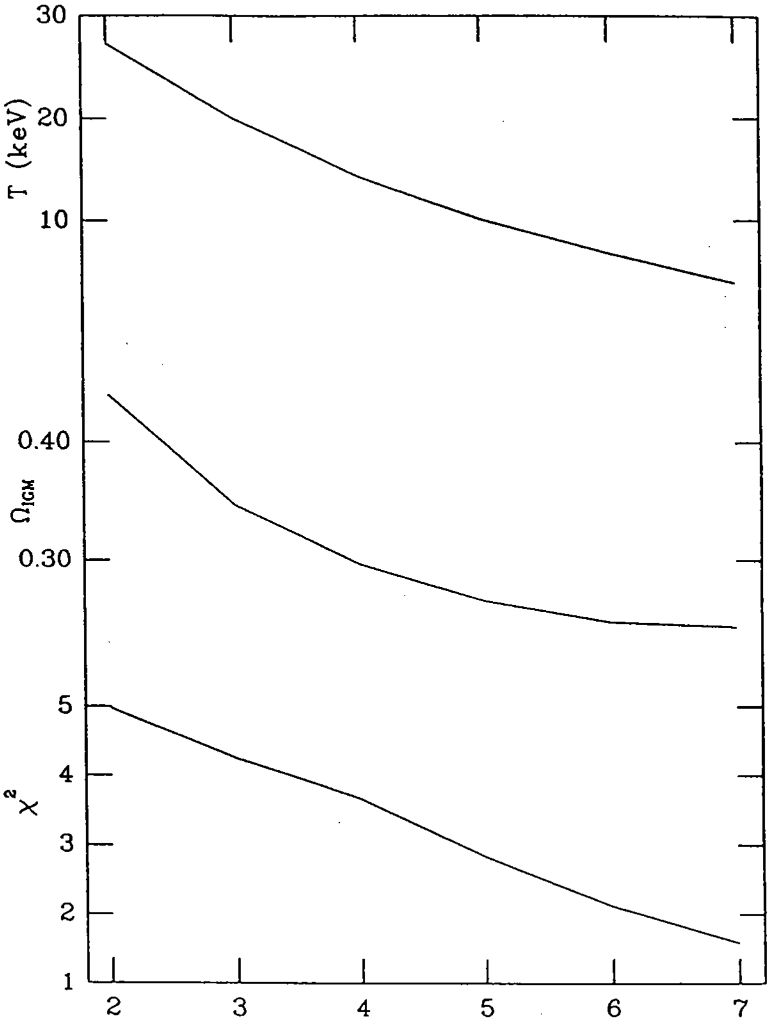


Fig. III.7

B. Spektrumsverzerrungen des Mikrowellenhintergrunds

Ein heisses Elektronengas führt über Compton-Streuung zu einer Verzerrung des Spektrums der thermischen Hintergrund-strahlung. Diesen Sunyaev-Zeldovich-Effekt werden wir quantitativ noch studieren. Wie in Anhang I gezeigt wird, ist ein Mass für die Deformation der ursprünglichen Planck-Verteilung durch (inverse) Compton-Streuung an heissen Elektronen der sog. y-Parameter

$$
\begin{aligned}
y &= \int \frac{kT}{m_e c^2} n_e c \sigma_T \, dt \\
&= \sigma_T c H_0^{-1} \int_0^{z_c} dz \, \frac{kT_e(z)}{m_e c^2} n_e(z) \frac{1}{(1+z)^2 \sqrt{1+\Omega_0 z}} \, .
\end{aligned}
\tag{7.60}
$$

Hier benutzen wir (7.49), (7.53), (7.54) und finden für $\Omega_0 = 1$

$$y = \sigma_T c H_0^{-1} \frac{kT_e}{m_e c^2} n_e(0) \int_0^{z_c} (1+z)^{5/2} dz$$

oder

$$y/10^{-5} \simeq 35 \frac{T_e(0)}{10^8 K} h_0 (1+z_c)^{7/2} \Omega_{IGM} . \qquad (7.61)$$

Nach den COBE Daten (Ap. J. 473, 576 (96)) ist

$$y^{COBE} < 1.5 \times 10^{-5} . \qquad (7.62)$$

Setzen wir in (7.61) die Werte (7.53) für $z_c = 1$ ein, so ergibt sich für $h_0 = 1/2$

$$y \simeq 0.03 \ (!) ,$$

was um mehr als 10^3 mal zu gross ist. (Taylor & Wright erhalten mit ihrem gerechneten Temperaturverlauf $y = 0.037$.)

* * *

Wir wissen nun von ROSAT-Daten (tiefe Durchmusterung), dass ein Löwenanteil des Röntgenhintergrunds bei ~ 1 keV durch diskrete Quellen (aktive Galaxien) erklärt werden kann. Diese haben aber eine andere spektrale Verteilung ($\sim \varepsilon^{-0.7}$) als der Hintergrund ($\sim \varepsilon^{-0.4}$). Zieht man deshalb diesen bekannten Teil ab, so verbleibt ein flacheres Spektrum als für thermische Bremsstrahlung, was Fabian & Barcons zur Aussage führte: "The perfect bremsstrahlung shape of the X-ray background is just a cosmic conspiracy". Der Röntgenhintergrund bei hohen Energien kann noch nicht überzeugend erklärt werden. Für einen kürzlichen Übersichtsartikel siehe G. Hasinger: A&A, Suppl. 120, 607 (96).

8. Oszillierende kosmologische Modelle

"The inevitable catastrophe is at hand .... Are we not, indeed, more than justified in entertaining a belief — let us say, rather, in indulging a hope — that the processes we have ventured to contemplate will be renewed forever, and forever, and forever; a novel Universe swelling into existence, and then subsiding into nothingness, at every throb of the Heart Divine".

Edgar Allan Poe (1809–49), Eureka

Es ist a priori nicht undenkbar, dass für $\rho > \rho_c$ das kollabierende Universum zurückprallt (durch Quanten- und andere Prozesse) und anschliessend wieder expandiert. Was wären die Konsequenzen eines solchen Modells?

Wir nehmen an, dass die Entropie – auch beim Rückprall – dauernd zunimmt. Dann ist kein streng periodisches Universum möglich. Die Amplitude der aufeinanderfolgenden Zyklen nimmt vielmehr dauernd zu, wie Tolman schon 1934 gezeigt hat. Wir wiederholen hier im wesentlichen sein Argument.

Für das Friedmann-Modell mit $k=1$ erfüllt der Skalenfaktor $a(t)$ die Gleichung

$$\dot{a}^2+1 = \frac{8\pi G}{3}\rho\, a^2. \qquad (8.1)$$

Grössen beim maximalen Radius indizieren wir mit "m". Da dort $\dot{a}=0$ ist, folgt aus (8.1)

$$\rho_m = \frac{3}{8\pi G}\,\frac{1}{a_m^2}. \qquad (8.2)$$

N bezeichne die gesamte Baryonzahl und S die totale

Entropie. Die Baryonzahldichte n und die Entropie pro Baryon, s, sind

$$n = \frac{N}{2\pi^2 a^3}\,, \qquad s = \frac{S}{N} \tag{8.3}$$

$[\mathrm{Vol}(S^3_a) = 2\pi^2 a^3]$. Aus der Zustandsgleichung der Materie erhalten wir die Funktion $\rho(n,s)$. Im Folgenden spielen gewisse allgemeine thermodynamische Eigenschaften dieser Funktion eine wichtige Rolle. Sei $\varepsilon(n,s)$ die Energie pro Baryon; natürlich ist $\rho(n,s) = n\,\varepsilon(n,s)$. Zunächst gilt

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_n = n \underbrace{\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial s}\right)_n}_{T} > 0\,. \tag{8.4}$$

Ferner gilt aufgrund der fundamentalen thermodynamischen Beziehung von Gibbs,

$$T\,ds = d(\rho/n) + P\,d(1/n), \text{ oder } Tn\,ds = d\rho - \frac{\rho+P}{n}\,dn \tag{8.5}$$

die Ungleichung

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial n}\right)_s = \frac{\rho+P}{n} > \frac{\rho}{n}\,, \tag{8.6}$$

oder

$$\left(\frac{\partial\ln\rho}{\partial\ln n}\right)_s > 1\,. \tag{8.7}$$

Nach (8.2) und (8.3) ergibt sich der maximale Radius a_m als Funktion von s aus der Gleichung

$$a_m^2\,\rho\left(n_m = \frac{N}{2\pi^2 a_m^3}\,, s\right) = \frac{3}{8\pi G}\,. \tag{8.8}$$

Das logarithmische Differential dieser Gleichung gibt die folgende Beziehung

$$\underbrace{\frac{\partial \ln [a_m^2 \varrho]}{\partial \ln a_m}}_{-k := \left[2 + \underbrace{\frac{\partial \ln \varrho}{\partial \ln n_m}}_{\substack{>1 \\ (\text{nach } (8.4))}} \underbrace{\frac{d \ln n_m}{d \ln a_m}}_{\substack{<-3 \\ (\text{nach } (8.3))}}\right] < 0} \cdot \frac{da_m}{a_m} + \underbrace{\frac{\partial \ln [a_m^2 \varrho]}{\partial s}}_{\frac{\partial \ln \varrho}{\partial s}} ds = 0 .$$

Dies zeigt, dass

$$\frac{da_m}{ds} = \frac{a_m}{k\varrho} \left(\frac{\partial \ln \varrho}{\partial \ln s}\right)_n > 0 ,$$

da $k > 0$ ist. Mit wachsender Entropie wird also a_m grösser!
(Wir folgten hier [ZN, §24.16].)

* * *