

V. THEORIE DER FOURIER-TRANSFORMATION

Hier kommt uns die Theorie der $L^p(\mathbb{R}^n)$ Räume zugute.

Als Fourier-Transformierte von $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet man die Funktion $\hat{f}(p)$, definiert durch

$$\hat{f}(p) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i(p,x)} dx.$$

Für $\hat{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ schreiben wir auch $\mathcal{F}f$. Die Fourier-Transformation (auf dem \mathbb{R}^n) ist eine stetige lineare Abbildung

$$\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n),$$

da es ist unmittelbar klar, dass

$$\|\mathcal{F}f\|_\infty \leq \|f\|_1.$$

siehe Anhang
zu Kap. II

Die Fourier-Konjugierte von $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist erklärt durch

$$\overline{\mathcal{F}f} = \check{f}, \quad \check{f}(p) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{i(p,x)} dx$$

und ist ebenfalls eine stetige lineare Abbildung von $L^1(\mathbb{R}^n)$ in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Bezeichnungen:

$C(\mathbb{R}^n)$: Raum der stetigen Funktionen;

$C^b(\mathbb{R}^n)$: Banach-Raum der stetigen und beschränkten Funktionen;

$C_0(\mathbb{R}^n) := \{ f \in C^b(\mathbb{R}^n) : \text{zu jedem } \varepsilon > 0 \text{ existiert ein } R = R(\varepsilon, f) \text{ mit } \sup_{|x| > R} |f(x)| < \varepsilon \}$.

1. Einige einfache Eigenschaften der Fouriersummenformel

Als erstes beweisen wir den

Satz (Riemann-Lebesgue): Es gilt die Inklusion

$$\mathfrak{F} L^1(\mathbb{R}^n) \subseteq C_0(\mathbb{R}^n), \quad (1)$$

d.h. $\mathfrak{F}f$ ist für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ eine auf \mathbb{R}^n stetige Funktion, die "im Unendlichen verschwindet".

Beweis: Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ ist wegen $e^{\pm i\pi} = -1$ und der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes

$$\begin{aligned} \hat{f}(p) &= 2 \frac{1}{2} \int e^{-i(p,x)} f(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int e^{-i(p,x)} f(x) dx - \frac{1}{2} \int e^{-i(p,x - \frac{\pi}{|p|^2} p)} f(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int e^{-i(p,x)} [f(x) - f(x + \frac{\pi}{|p|^2} p)] dx. \end{aligned}$$

Somit ist

$$|\hat{f}(p)| \leq \frac{1}{2} \int |f(x + \frac{\pi}{|p|^2} p) - f(x)| dx.$$

Da $|\frac{\pi}{|p|^2} p| = \frac{\pi}{|p|}$ für $|p| \rightarrow \infty$ gegen Null strebt konvergiert die rechte Seite gegen Null.*

*) Für einen strengen Beweis benutzt man, dass die stetigen Funktionen mit kompaktem Träger dicht in $L^1(\mathbb{R}^n)$ liegen. Einzelheiten findet man in H. Bauer, "Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie", S48.1.

Nun zeigen wir noch, dass $\hat{f}(p)$ auf \mathbb{R}^4 gleichmäßig stetig ist. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^4$ mit

$$\int_{\mathbb{R}^4 \setminus K} |f(x)| dx < \varepsilon.$$

Es ist $\alpha := \sup\{|x| : x \in K\} < \infty$ und somit nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|(p_2 - p_1, x)| \leq |p_2 - p_1| |x| \leq \alpha |p_2 - p_1|$$

für alle $x \in K$ und beliebige $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^4$. Wegen

$$|e^{-i(p_1, x)} - e^{-i(p_2, x)}| = |1 - e^{-i(p_2 - p_1, x)}|$$

gibt es somit ein $\delta > 0$ derart, dass

$$|e^{-i(p_1, x)} - e^{-i(p_2, x)}| \leq \varepsilon \quad \text{für } p_1, p_2 \in \mathbb{R}^4 \text{ mit } |p_1 - p_2| \leq \delta \text{ und alle } x \in K.$$

Für solche p_1, p_2 gilt

$$\begin{aligned} |\hat{f}(p_1) - \hat{f}(p_2)| &\leq \int |e^{-i(p_1, x)} - e^{-i(p_2, x)}| |f(x)| dx \\ &= \int_K \dots + \int_{\mathbb{R}^4 \setminus K} \dots \leq \varepsilon \int_K |f(x)| dx + 2 \int_{\mathbb{R}^4 \setminus K} |f(x)| dx \\ &\leq \varepsilon (\|f\|_1 + 2). \quad \square \end{aligned}$$

Nützlich ist auch folgende einfache Tabelle

$$\int_{\mathbb{R}^4} \hat{f}(x) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^4} f(x) \hat{g}(x) dx \quad \text{für alle } f, g \in L^1(\mathbb{R}^4). \quad (2)$$

Tabelle erhält man mit dem Satz von Fubini:

-V.4-

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(p) g(p) d^4 p &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i(p,x)} d^4 x \right) g(p) d^4 p \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(p) e^{-i(p,x)} d^4 p \right) f(x) d^4 x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \hat{g}(x) d^4 x.\end{aligned}$$

Faltung. Sind $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so ist die Funktion $(x, y) \mapsto f(x-y)g(y)$ messbar^{*}. Nach dem Satz von Fubini gilt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{2n}} |f(x-y)g(y)| d^4 x d^4 y &= \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| d^4 x d^4 y \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \cdot \|f\|_1 dy = \|f\|_1 \|g\|_1.\end{aligned}$$

Damit folgt ebenfalls aus dem Satz von Fubini, dass die Funktion $y \mapsto f(x-y)g(y)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ ist und ferner, dass die für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ definierte Funktion $x \mapsto \int f(x-y)g(y) d^4 y$ ebenfalls ein Element von $L^1(\mathbb{R}^n)$ ist. Letzteres ist die Faltung, $f * g$, von f mit g :

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) d^4 y. \quad (3)$$

* Eine detaillierte Begründung findet man z.B. in:
E. Hewitt, K. Stromberg, "Real and Abstract Analysis",
(21.31), Springer-Verlag 1965.

Die obige Rechnung zeigt

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1. \quad (4)$$

Deshalb ist die Abbildung: $L^1(\mathbb{R}^n) \times L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^1(\mathbb{R}^n)$,
 $f, g \mapsto f * g$ stetig. Bezüglich der Faltung (3) als
multiplikativer Verknüpfung bildet $L^1(\mathbb{R}^n)$ eine kommu-
tative komplexe Banach-Algebra. [Diese hat keine
multiplikative Einheit; siehe Abschnitt (21.35) des in
der vorausgegangenen Seite zitierten Buches.]

Nun beweisen wir die wichtige Beziehung^{*)}

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}, \quad f, g \in L^1(\mathbb{R}^n). \quad (5)$$

Unter Benützung des Fubini-Theorems, sowie der
Translationsinvarianz und Spiegelinvarianz des
Lebesgue-Masses erhalten wir

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(p) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x) e^{-i(p, x)} dx \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) e^{-i(p, x)} dx dy \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \int_{\mathbb{R}^n} f(z) e^{-i(p, y+z)} dz dy \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-i(p, y)} \int_{\mathbb{R}^n} f(z) e^{-i(p, z)} dz dy \end{aligned}$$

*) Um unästhetische Faktoren 2π zu vermeiden, definieren wir
Faltung und $\|\cdot\|_p$ gemäss

$$(f * g)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy, \quad \|f\|_p = \left[(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p dx \right]^{1/p}.$$

$$= \hat{f}(p) \hat{g}(p). \quad \square$$

Zur Herleitung der Fourierschen Umkehrformel benötigen wir den folgenden Begriff.

Definition: Eine Familie $(k_p)_{p>0}$ von Elementen aus $L^1(\mathbb{R}^n)$ heißt eine approximative Einheit auf \mathbb{R}^n , wenn die drei nachstehenden Eigenschaften erfüllt sind:

(i) $(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} k_p(x) dx = 1$;

(ii) $\sup_{p>0} \|k_p\|_1 < \infty$;

(iii) Für jedes $\delta > 0$ gilt $\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_{\delta \leq |y|} |k_p(y)| dy = 0$.

oder Dirac-Folge

Satz: Für jede approximative Einheit $(k_p)_{p>0}$ gilt die Approximationseigenschaft

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|k_p * f - f\|_p = 0 \quad (f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < \infty). \quad (6)$$

Beweis:

Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Bezeichnet τ_y die Translation $(\tau_y f)(x) = f(x-y)$ so kann $\delta > 0$ so gewählt werden, dass $\|\tau_y f - f\|_p \leq \frac{1}{2} \varepsilon$ für $|y| < \delta$. $M = \sup_{p>0} \|k_p\|_1$ (vgl. die Fussnote auf S.V.2). Gemäss (iii) der Definition kann $p_0 > 0$ so festgelegt werden, dass für $p \geq p_0$ stets $\int_{\delta \leq |y|} |k_p(y)| dy \leq \frac{1}{4} \varepsilon$ ist.

Den Rest des Beweises führen wir für $p=1$ durch.
(Für $p>1$ siehe z.B. das zitierte Buch von Hewitt u. Stromberg, Abschnitt (21.37).)

Für $p=1$ ist auch $k_p * f \in L^1$. Deshalb gilt nach dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |k * f - f|(x) dx &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) k_p(y) - f(x) k_p(y) dy \right| dx \\ &\leq \int |k_p(y)| (2\pi)^{-n/2} \int |f(x-y) - f(x)| dx dy \\ &\leq \int |k_p(y)| \| \tau_y f - f \|_1 dy \\ &\leq \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{M} \int_{|y| < \delta} |k_p(y)| dy + 2 \|f\|_1 \int_{\delta \leq |y|} |k_p(y)| dy \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

für $\rho \geq \rho_0$. \square

Mit Hilfe dieses Satzes beweisen wir jetzt den Satz (Fouriersche Inversionsformel): Falls $\hat{f} \in L^1$ und $\hat{\hat{f}} \in L^1$ enthalten ist, gilt für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F} f(x) = f(x), \quad \mathcal{F} \circ \mathcal{F} \hat{f}(x) = \hat{f}(x). \quad (7)$$

Beweis: Es sei für $t > 0$

$$w_t(x) = (2t)^{-n/2} e^{-|x|^2/4t} \quad (8)$$

der Gauss-Weierstrass-Kern auf \mathbb{R}^n . Nach (I.4.2) ist w_t gemäss (i) normiert

$$(2\pi)^{-n/2} \int w_t(x) dx = 1.$$

und es ist $(w_t)_{t>0}$ eine approximative Einheit ($\rho \rightarrow 1/t$).

Die Fouriertransformierte ist

$$\hat{w}_t(p) = e^{-t|p|^2}. \quad (9)$$

Dies folgt aus $\hat{f}_0 = f_0$ für $f_0(x) = e^{-|x|^2/2}$. Letzteres ergibt sich folgendermassen: Es genügt den Fall $n=1$ zu behandeln. Dann ist (mit partieller Integration)

$$\begin{aligned} \hat{f}_0'(p) &= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x f_0(x) e^{-ipx} dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} p \int f_0 e^{-ipx} dx \\ &= -p \hat{f}_0(p). \end{aligned}$$

Als Lösung dieser Diffgl. erhält man $\hat{f}_0 = C f_0$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{C}$. Aus $\hat{f}_0(0) = 1$, $f_0(0) = 1$ folgt aber $C=1$. (Man gebe auch eine funktionsentheoretische Herleitung.)

Aus $\hat{f}_0 = f_0$ folgt, dass die Fouriertransformierte von $e^{i(x, \cdot)} f_0(\sqrt{2t} \cdot)$ gleich $\tau_x w_t$ ist. Damit gilt für ein f , welches die Bedingungen des Satzes erfüllt

$$\begin{aligned} (w_t * f)(x) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} w_t(x-y) f(y) dy = (2\pi)^{-n/2} \int \tau_x w_t(y) f(y) dy \\ &\stackrel{(2)}{=} (2\pi)^{-n/2} \int \hat{f}(p) e^{i(x,p)} f_0(\sqrt{2t} p) dp. \quad (10) \end{aligned}$$

Wegen (6) gilt $\|w_t * f - f\|_1 \rightarrow 0$ für $t \rightarrow 0$. Nun gilt allgemein: Sei $f_n \in L^1$ eine Folge von Funktionen die in der L^1 -Norm gegen f konvergiert. Dann gilt

-V.9-

es eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ die für fast alle Punkte gegen f konvergiert. (Der Beweis dieser Aussage ergibt sich aus dem Beweis des Satzes von Piesz-Fischer, S. II.33.)
Dann gibt es eine Nullfolge $(t_m)_{m \geq 1}$, mit

$$\lim_{m \rightarrow \infty} w_{t_m} * f(x) = f(x) \quad \text{für fast alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Benutzen wir dies in (10) und wenden den Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz an, so folgt wegen $\lim_{m \rightarrow \infty} f_0(\sqrt{t_m} p) = 1$ für alle $p \in \mathbb{R}^n$, dass die rechte Seite gegen \overline{f} strebt, womit die erste Inversionsformel in (7) bewiesen ist. Daraus folgt auch leicht die zweite Formel. \square

Korollar: Die Fouriers Transformation \mathbb{F} ist eine injektive (lineare) Abbildung.

Beweis: Aus $f \in L^1$, $\hat{f} = 0$ folgt nach dem Satz $f = 0$. \square

Bemerkung:

Da $\mathbb{F} \circ \mathbb{F} f$ in (7) in $C_0(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ liegt ist ein $g \in L^1$ mit $\hat{g} \in L^1$ fast überall gleich einer stetigen Funktion in $C_0(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$.

Parseval-Identität: Sei f eine stetige Funktion in L^1 und $\hat{f} \in L^1$. Dann gilt für jedes $g \in L^1$ die Gleichung

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(p) \overline{\hat{g}(p)} dp. \quad (11)$$

Beweis: Nach der Fourier'schen Inversionsformel ist

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(p) e^{i(p,x)} d^np. \quad (12)$$

Ferner ist nach der obigen Bemerkung $f \in C_0(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$.
Deshalb existiert die linke Seite von (11) und nach dem
Satz von Fubini gilt

$$\begin{aligned} \int f(x) \overline{g(x)} d^nx &\stackrel{(12)}{=} \int (2\pi)^{-n/2} \hat{f}(p) e^{i(p,x)} \overline{g(x)} d^np d^nx \\ &= \int \hat{f}(p) \overline{\hat{g}(p)} d^np. \quad \square \end{aligned}$$

Die Aussage (11) werden wir später in interessanter Weise
ausdehnen (Plancherel-Theorem).

2. Rasch abklingende Funktionen

Eine Charakterisierung des Bildraumes $\mathcal{F} L^1(\mathbb{R}^n)$ stößt
auf grosse Schwierigkeiten. Da wir ausserdem die Fourier-
Transformation auch auf den Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}^n)$ aus-
dehnen möchten, liegt es nahe \mathcal{F} zunächst auf
einem "kleineren" Funktionenraum zu betrachten und
sodann mögliche Ausdehnungen zu studieren.

Als Funktionenraum wählen wir den Schwartz-
Bruchraum, der auch in der Theorie der Distributionen
(Kapitel VII) eine wichtige Rolle spielen wird. Dieser
Raum, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, besteht aus allen C^∞ -Funktionen, die
samt ihren Ableitungen für $|x| \rightarrow \infty$ rascher ver-
schwinden als jede Potenz von $|x|^{-1}$.

Zur Formulierung eines Konvergenzbegriffs auf

\mathcal{F} und weitere Bedürfnisse, führen wir die folgenden Bezeichnungen ein: Für einen Vektor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ mit nichtnegativen ganzzahligen Komponenten α_j (Multiindex) setzen wir $|\alpha| = \sum \alpha_j$ (Länge) und definieren

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad D^0 f(x) = f(x),$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

Definition ^{*}: Eine Folge von Funktionen f_1, f_2, \dots aus \mathcal{F} konvergiert gegen eine Funktion $f \in \mathcal{F}$, wenn für alle α und β

$$x^\beta D^\alpha f_k \xrightarrow{\mathbb{R}^n} x^\beta D^\alpha f, \quad k \rightarrow \infty.$$

(Der Doppelpfeil bezeichnet gleichmäßige Konvergenz.)
Dafür schreiben wir auch $f_k \rightarrow f, k \rightarrow \infty$ in \mathcal{F} .

Nun ist die folgende nichtüberstehende Tabelle wichtig.

Satz: Der komplexe Vektorraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ liegt in den Banach-Räumen $L^p(\mathbb{R}^n), p=1,2,\dots$, und $C_0(\mathbb{R}^n)$ dicht. Ferner sind die kanonischen Injektionen

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n), \quad \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_0(\mathbb{R}^n) \quad (13)$$

stetige lineare Abbildungen.

* Geleitet ausgedrückt, wird \mathcal{F} mit der Topologie versehen, welche durch die \mathcal{P}_N -Normen (Halbnormen):

$$\|f\|_{N,\alpha} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^N |D^\alpha f|, \quad N \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{N}^n$$

definiert wird. Damit wird \mathcal{F} ein Fréchet-Raum.
(Siehe z.B. Reed & Simon Bd. I, Kap. V.)

Beweis: Wir beweisen die Tatsache, dass der Vektorraum $K(\mathbb{R}^n)$ aller stetigen komplexwertigen Funktionen auf \mathbb{R}^n mit kompaktem Träger überall sowohl in $L^p(\mathbb{R}^n)$ als auch in $C_0(\mathbb{R}^n)$ liegt. Für ein beliebiges $\varphi \in K(\mathbb{R}^n)$ konstruieren wir die folgenden Regularisierungen. Es lässt sich eine approximierende Einheit $(k_p)_{p>0}$ auf dem \mathbb{R}^n finden, für welche die Funktionen k_p zum Raum $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ der beliebig oft differenzierbaren, komplexwertigen Funktionen mit kompaktem Träger gehören (Übung). Dann gehören $k_p * \varphi$ auch zu $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (beachte $\mathcal{D}(\varphi * k_p) = \varphi * \mathcal{D}k_p$). Wegen (6) ergibt sich die Dichttheit von $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$, und \forall für $C_0(\mathbb{R}^n)$. ähnlich beweist man dies

Die Stetigkeit der Abbildungen (13) ergibt sich folgendermaßen. Tatsächlich ist

$$|f(x)| \leq \|f\|_{N,0} (1+|x|^2)^{-N}$$

und damit für $N_p > \frac{1}{2}n$

$$\|f\|_p \leq \|f\|_{N,0} \left(\int (1+|x|^2)^{-N_p} dx \right)^{1/p}.$$

Die Stetigkeit der kanonischen Injektion $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_0(\mathbb{R}^n)$ liegt auf der Hand. \square

Wichtig ist nun der

Satz (L. Schwartz): Die Fourier-Transformation $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und die Fourier-Koltransformation $\mathcal{F}^{-1}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sind zueinander inverse, stetige Automorphismen der (lokalnoetheren) Teilalgebra $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ über \mathbb{C} . Für jede Funktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und jeden Multiindex α gelten die Regeln:

$$\widehat{D^\alpha f}(p) = (ip)^\alpha \widehat{f}(p),$$

$$D^\alpha \widehat{f} = \widehat{(-ix)^\alpha f}. \quad (14)$$

Beweis: Die Regeln (14) erhält man durch einfache Rechnung. Bei der 1. Formel verwendet man den Satz von Fubini und erhält das Resultat nach partieller Integration. Bei der 2. Formel darf man unter dem Integral differenzieren. Aus (14) folgt nun

$$p^\alpha D^\beta (Ff) = p^\alpha (-i)^\beta F(x^\beta f) = (-i)^{\alpha+\beta} F(D^\alpha(x^\beta f)).$$

Somit erhält man für $|\beta| \leq l$ und $|\alpha| \leq k$

$$|p^\alpha D^\beta Ff| \leq (2\pi)^{-u/2} \int_{\mathbb{R}^u} |D^\alpha(x^\beta f(x))| dx^u$$

$$\leq c \int_{\mathbb{R}^u} (1+|x|^k) \sum_{|\delta| \leq k} |D^\delta f(x)| dx^u$$

$$\leq c' \int_{\mathbb{R}^u} \frac{1+|x|^{l+u+1}}{1+|x|^{u+1}} \sum_{|\delta| \leq k} |D^\delta f| dx^u$$

$$\leq c'' \sup_{x \in \mathbb{R}^u} [(1+|x|^{l+u+1}) \sum_{|\delta| \leq k} |D^\delta f|].$$

Also gilt

$$\|Ff\|_{k,l} \leq c \|f\|_{l+u+1,k}. \quad (*)$$

Deshalb gilt $F S(\mathbb{R}^u) \subset S(\mathbb{R}^u)$. Dasselbe folgt denn auch für \bar{F} . Aus (*) ergibt sich auch die Stetigkeit von F .

Da $f \mapsto \check{f}$, $\check{f}(x) = f(-x)$ stetig in S ist, folgt auch die Stetigkeit der Fourier-Kolombtransformation. Nach der Fourier'schen Inversionsformel sind dann F und \bar{F} zueinander inverse stetige Automorphismen von $S(\mathbb{R}^u)$. Für die Faltung gilt schließlich die Gleichung (5) für Elemente in $S(\mathbb{R}^u)$. \square

$$\widehat{D^\alpha f}(p) = (i p)^\alpha \widehat{f}(p),$$

$$D^\alpha \widehat{f} = \widehat{(i x)^\alpha f}.$$

(14)

Beweis: Die Regeln (14) erhält man durch einfache Rechnung. Benutzt man diese, so folgt auch für ein $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\|x^\alpha \circ D^\beta (Ff)\|_\infty = \|F(D^\alpha \circ x^\beta f)\|_\infty < \infty$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)}$

für beliebige α, β . Deshalb gilt $F\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
Dasselbe folgt dann auch für \overline{F} .

Aus den Ungleichungen

$$\|D^\alpha \circ x^\beta (Ff)\|_\infty \leq \|f\|_{N,\beta} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{-N} dx,$$

für $N > |\alpha| + n$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ergibt sich die Stetigkeit von F . Da $f \mapsto \tilde{f}$, $\tilde{f}(x) = f(-x)$ stetig in \mathcal{S} ist, folgt auch die Stetigkeit der Fourier-Kolbansformationen. Nach der Fourierschen Inversionsformel sind damit F und \overline{F} zueinander inverse stetige Automorphismen des Raumes $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Für die Faltung gilt schließlich die Gl. (5) für Elemente in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. \square

Wir halten noch fest, dass die Parseval-Identität (11) natürlich insbesondere für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt. Insbesondere haben wir für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ die Plancherel-Identität:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(p)|^2 dp. \quad (15)$$

Versieht man den komplexen Vektorraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit dem vom Hilbert-Raum $L^2(\mathbb{R}^n)$ induzierten Skalarprodukt (\cdot, \cdot) und der zugehörigen Norm $\|\cdot\|_2$, so ist $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ein komplexer Prähilbert-Raum, welcher – wie oben gezeigt wurde – in $L^2(\mathbb{R}^n)$ dicht ist. Nach der Parseval-Identität gilt für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$(f, g) = (\mathcal{F}f, \mathcal{F}g) \quad (16)$$

und insbesondere

$$\|f\|_2 = \|\mathcal{F}f\|_2. \quad (17)$$

Dennach ist die Restriktion $\mathcal{F}|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}$ ein unitärer Operator des Prähilbert-Raumes $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Entsprechendes gilt für die Restriktion $\overline{\mathcal{F}}|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}$. Folglich existieren eindeutig bestimmte, zueinander inverse, unitäre Fortsetzungen auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ die wir mit denselben Symbolen bezeichnen. Diese Fortsetzungen nennt man die Fourier-Plancherel-(Ko)Transformationen. Diese Fortsetzungen kann man noch etwas genauer beschreiben (Plancherel-Theorem).

Satz: Auf $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ stimmen die Fortsetzungen von \mathcal{F} und $\overline{\mathcal{F}}$ mit der ursprünglichen Definition überein. Führt man ferner für ein $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $m \in \mathbb{N}$ die Funktionen (abgeschnittene Fourierintegrale)

$$\begin{aligned} f_m(p) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{|x| \leq m} f(x) e^{-i(p,x)} d^4x, \\ \tilde{f}_m(x) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{|p| \leq m} f(p) e^{i(x,p)} d^4p \end{aligned} \quad (18)$$

ein, so gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \| \mathbb{F}f - f_m \|_2 = 0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \| \mathbb{F}f - \tilde{f}_m \| = 0. \quad (19)$$

Beweis: Zu jedem $f \in L^1(\mathbb{R}^4) \cap L^2(\mathbb{R}^4)$ gibt es eine Folge $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ von Elementen aus $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ mit ^{*})

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \| f - \varphi_m \|_1 = \lim_{m \rightarrow \infty} \| f - \varphi_m \|_2 = 0.$$

Also konvergiert die Folge $\mathbb{F}\varphi_m$ gleichmäßig auf \mathbb{R}^4 gegen $\mathbb{F}f$ (siehe S.V.1). Wegen (17) kann deshalb eine Teilfolge $(\varphi_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ausgewählt werden, sodass $(\mathbb{F}\varphi_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ punktweise fast überall auf \mathbb{R}^4 gegen $\mathbb{F}f$ konvergiert, wobei in diesem Beweis \mathbb{F} die Faltung mit \mathbb{F} auf $L^2(\mathbb{R}^4)$ bezieht. Da $\mathbb{F}\varphi_m = \tilde{\mathbb{F}}\varphi_m$ folgt somit

$$\mathbb{F}f(p) = \tilde{\mathbb{F}}f(p) \quad \text{für fast alle } p \in \mathbb{R}^4.$$

Analog beweist man die Aussage für $\bar{\mathbb{F}}$.

Für jedes $f \in L^2(\mathbb{R}^4)$ und jedes $m \in \mathbb{N}$ sei $\varphi_m = 1_{\bar{B}_m} \cdot f$, wobei $1_{\bar{B}_m}$ die Indikatorfunktion der abgeschlossenen Kugel $\bar{B}_m = \{x \in \mathbb{R}^4 : |x| \leq m\}$ bezieht. Dann ist $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen aus $L^1(\mathbb{R}^4) \cap L^2(\mathbb{R}^4)$ mit $\mathbb{F}\varphi_m = f_m$ in (18) und es gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \| f - \varphi_m \|_2 = 0.$$

Dann gilt aber

^{*}) Dies beweist man analog wie die Aussage (oben), dass $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ in den $L^p(\mathbb{R}^4)$, $p \in \mathbb{N}$, dicht ist (Übung).

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\tilde{f} - f_m\|_2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \|\tilde{f} - \tilde{f} \varphi_m\|_2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \|f - \varphi_m\|_2 = 0.$$

Analog beweist man die zweite Aussage in (19). \square

Illustration: Es sei $1_{[-\alpha, \alpha]}$ die Indikatorfunktion des abgeschlossenen Intervalls $[-\alpha, \alpha]$. Nun ist einseitig

$$\|1_{[-\alpha, \alpha]}\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} 1_{[-\alpha, \alpha]}(x) dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} dx = 2\alpha.$$

Für die Fourier-Transformierte dieser Indikatorfunktion finden wir

$$\tilde{f}(1_{[-\alpha, \alpha]})(\omega) = (2\alpha)^{-1/2} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-i\omega x} dx = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\sin(\alpha\omega)}{\omega}.$$

Nach dem Plancherel-Theorem ist also

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\sin(\alpha\omega)}{\omega} \right]^2 d\omega = \pi\alpha. \quad (20)$$

Weitere Beispiele werden wir in den Übungen kennenlernen. Wir besprechen nun aber eine Anwendung der Fouriertransformation, welche die Kraft dieser Technik sehr schön illustriert.

3. Anfangswertproblem für die inhomogene Wärmeleitungsgl.

Diese Gleichung lautet – nach Wahl geeigneter Einheiten –

$$\partial_t u - \Delta u = g. \quad (21)$$

Die gegebene Funktion $g(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0, \infty)$ sei in $C(t \geq 0)$. Gesucht ist eine Lösung $u(x,t)$ dieser Gleichung in $C^2(t > 0) \cap C(t \geq 0)$, die (z1) für $t > 0$ erfüllt und für $t \downarrow 0$ in $u_0 \in C(\mathbb{R}^n)$ übergeht:

$$u(x,0) = u_0(x). \quad (z2)$$

Eventuelle weitere Einschränkungen an u_0 werden sich ergeben. (Als Physiker muss man lernen ungeheuernt darauf loszureden. Wenn etwas schief geht merkt man es schon. Im übrigen kann die Richtigkeit der Lösung am Ende meist relativ leicht verifiziert werden.)

Wir führen nun eine partielle Fouriertransformation durch. Sei $\hat{u} = \mathcal{F}_x u$, so erhält man dafür aus (z1) und (z2)

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{u}(k,t) + |k|^2 \hat{u}(k,t) &= \hat{g}(k,t), & (t > 0) \\ \hat{u}(k,0) &= \hat{u}_0(k). \end{aligned} \quad (23)$$

Dafür findet man leicht die Lösung für $t \geq 0$:

$$\hat{u}(k,t) = \underbrace{e^{-t|k|^2}}_{\substack{\uparrow \\ \text{Lösungshomogener} \\ \text{Gl. (erfüllt Anfangsbed.)}}} \hat{u}_0(k) + \int_0^t \underbrace{e^{-(t-\tau)|k|^2}}_{\substack{\uparrow \\ \text{partikuläre Lösung} \\ \text{der inhomog. Gl.}}} \hat{g}(k,\tau) d\tau.$$

Für $t > 0$ ergibt die Rücktransformation

$$u = G * u_0 + \int_0^t G(\cdot, t-\tau) * g(\cdot, \tau) d\tau, \quad (24)$$

wobei $G(x,t)$ für $t > 0$ nach (8) und (9) gerade der Gauss-Wertebass-Kern ist:

$$G = \mathcal{F}_k^{-1}(e^{-t|k|^2}) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/4t} \quad (25)$$

Die benutzten Potenzen von x sind dabei so gewählt, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(x,t) d^n x = 1 \quad (t > 0) \quad (26)$$

Die Anfangsbedingung ist erfüllt, denn nach (24) gilt

$$\begin{aligned} \lim_{t \downarrow 0} u(\cdot, t) &= \lim_{t \downarrow 0} G(\cdot, t) * u_0 \\ &= u_0 \end{aligned}$$

nach dem Satz auf S.V.6 über approximative Einheiten.

Explizit lautet (24) mit (25) für $t > 0$:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x-y|^2/4t} u_0(y) d^n y + \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-|x-y|^2/4(t-\tau)}}{[4\pi(t-\tau)]^{n/2}} g(y,\tau) d^n y d\tau \quad (27) \end{aligned}$$

Unter recht schwachen Voraussetzungen über u_0 und g kann man jetzt auch verifizieren, dass (27) tatsächlich die Lösung des Anfangswertproblems darstellt. (Siehe z.B.: R. Leis, "Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung", B.I 165/165a (1967), Kap. IX.)

4. Laplace-Transformation

Es sei $f \in L^1([0, \infty))$. Die (einsichtige) Laplace-Transformierte, $\mathcal{L}f$, ist definiert durch

$$(\mathcal{L}f)(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx \quad (\operatorname{Re}s \geq 0). \quad (28)$$

Diese ist für $\operatorname{Re}s \geq 0$ wohldefiniert und es gilt dann offensichtlich

$$\|\mathcal{L}f\|_{\infty} \leq \|f\|_1. \quad (29)$$

Außerdem ist $\mathcal{L}f$ für $\operatorname{Re}s > 0$ holomorph. Dies ergibt sich aus der Tatsache, dass das Integral (28) auf kompakten Teilmengen in der rechten Halbebene gleichmäßig konvergiert (und der Integrand holomorph in s ist). Bei der Ableitung von $\mathcal{L}f$ darf man unter dem Integral differenzieren. (Warum? ; siehe die Besprechung der Übungserie 2.)

Inversionsformel

Um eine Umkehrformel zu finden, fassen wir (28) als Fourier-Transformation auf. Dazu setzen wir durch $f(x) = 0$ für $x < 0$ die Funktion f zu einer Funktion in $L^1(\mathbb{R})$ fort, die wir ebenfalls mit f bezeichnen, und schreiben (28) mit $s = \sigma + i\tau$ ($\sigma, \tau \in \mathbb{R}$) so:

$$(\mathcal{L}f)(\sigma + i\tau) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\tau x} \frac{e^{-\sigma|x|}}{e^{-\sigma|x|}} f(x) dx. \quad (30)$$

Für festes $\sigma \geq 0$ ist dies (bis auf $\sqrt{2\pi}$) die Fourier-

Transformierte von $e^{-\sigma|x|} f(x) \in L^1(\mathbb{R})$. Nehmen wir an, dass Ff in $L^1(\mathbb{R})$ enthalten ist, so ist auch die Fourier-Transformierte in $L^1(\mathbb{R})$.

von $e^{-\sigma|x|} f(x)$

*) Dies sieht man folgendermassen. Betrachten wir etwas allgemeiner für ein beliebiges $g \in L^1(\mathbb{R})$ die Fourier-Transformierte von $\hat{g}(x) e^{-\sigma|x|}$ ($\sigma > 0$), oder noch allgemeiner, die Fourier-Transformierte von $\hat{g} \cdot k$ mit einem $k \in L^1(\mathbb{R})$ für welches $u := \hat{k}$ eine gerade Funktion ist, so finden wir mit dem Satz von Fubini durch einfache Rechnung (Übung)

$$\widehat{\hat{g} \cdot k} = g * u.$$

Ist jetzt ausserdem $u \in L^1$, so folgt daraus, dass die linke Seite ebenfalls in $L^1(\mathbb{R})$ ist. Für unser Beispiel ist $k(x) = e^{-\sigma|x|}$ und für die Fourier-Transformierte findet man leicht

$$u(\omega) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{\sigma} \frac{1}{1 + \omega^2/\sigma^2} \tag{31}$$

d.h., u erfüllt die obigen Voraussetzungen. Damit ergibt sich die Behauptung für $g = \hat{f} \in L^1$. //

Für ein $f \in L^1(\mathbb{R})$ mit $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ folgt deshalb mit der Fourier-Inversionsformel aus (30)

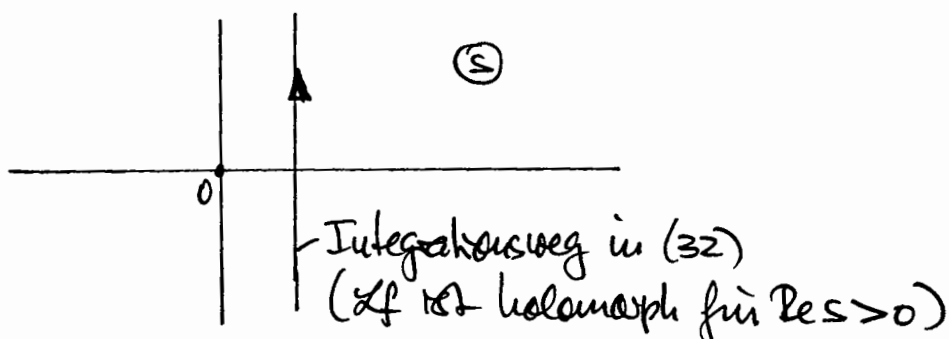
$$e^{-\sigma|x|} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} d\tau e^{i\tau x} (\mathcal{L}f)(\sigma + i\tau).$$

Speziell für $f(x) = 0$ falls $x < 0$ ergibt sich

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} d\tau e^{(\sigma+i\tau)x} (\mathcal{L}f)(\sigma+i\tau)$$

oder mit $s = \sigma + i\tau$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{sx} (\mathcal{L}f)(s) ds \quad (\sigma > 0) \quad (32)$$



5. Ein Anfangs-Randwertproblem

Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u = \Delta u \quad (33)$$

im Halbraum $x_1 \geq 0$ und suchen die Lösung, welche folgende Bedingungen erfüllt

(i) Anfangsbedingung: $u(x, 0) = f(x_1); \quad (34)$

(ii) Randbedingung: $u(x_1=0, t) = w(t). \quad (35)$

Dabei sind f und w gegebene Funktionen. (Über benötigte Eigenschaften können wir uns immer noch unterhalten).

Wir fassen dieses Problem als Problem der 1-dimensionalen Wärmeleitungsgleichung für das Intervall $[0, \infty)$ auf. Die Methode der Laplace-Transformation ist hierfür besonders geeignet.

Aus (27) folgt, dass

$$u_0(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-y)^2/4t} f(y) dy \quad (36)$$

eine Lösung der Gl. (33) mit der Anfangsbedingung $f(x)$ für $x \geq 0$ ist, wenn wir f "irgendwie" auf die ganze x -Achse fortsetzen. Betrachten wir also statt u die Funktion $v := u - u_0$, so erfüllt v die Bedingungen

$$\begin{cases} \partial_t v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} & (37) \\ v(x,0) = 0, \quad v(0,t) = \omega(t) - u_0(0,t) =: g(t) \end{cases} \quad (38)$$

Es sei $\tilde{v}(x,s)$ die partielle Laplace-Transformierte in der Zeit,

$$\tilde{v}(x,s) = \int_0^{\infty} e^{-st} v(x,t) dt. \quad (38)$$

Mit Hilfe von (38) erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\partial_t v) &= \int_0^{\infty} e^{-st} \partial_t v(x,t) dt = e^{-st} v \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} v(x,t) dt \\ &= s \tilde{v}(x,s). \end{aligned}$$

Damit gilt (37)

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}(x,s)}{\partial x^2} = s \tilde{v}(x,s). \quad (39)$$

Diese Differentialgleichung inkorporiert bereits die Anfangsbedingung und hat den grossen Vorteil, dass die Variable s lediglich als Parameter vorkommt. Als Lösung erhält man

$$\tilde{v}(x,s) = a(s) e^{-\sqrt{s} x}$$

(Die Lösung prop. zu $\exp(+\sqrt{s} x)$ ist physikalisch nicht akzeptabel.) Die Amplitude $a(s)$ ergibt sich aus der Randbedingung in (38):

$$a(s) = \tilde{v}(0,s) = \tilde{g}(s) := (\mathcal{L}g)(s).$$

Damit ist die Laplace-Transformierte $\tilde{v}(x,s)$ bestimmt:

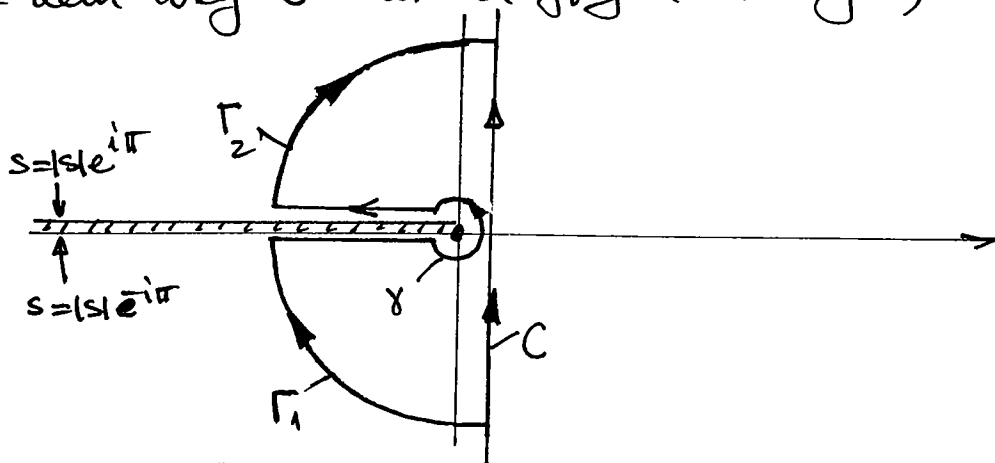
$$\tilde{v}(x,s) = \tilde{g}(s) e^{-x\sqrt{s}}. \quad (40)$$

Da diese ein Produkt ist, gilt für die Umkehrung^{*)}

$$v = g * \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\{s \mapsto e^{-x\sqrt{s}}\}}_{=: \theta(x,t)}, \quad (42)$$

$$\theta(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{st} e^{-s^{1/2}x} ds \quad (43)$$

mit dem Weg C in der folgenden Figur, den wir nun



*) Ähnlich wie bei der Fouriertransformation zeigt man für $f, g \in L^1$:

$$\mathcal{L}(f * g) = (\mathcal{L}f) \cdot (\mathcal{L}g) \quad (44)$$

(Übung).

passend deformieren werden. Der Integrand in (43) hat bei $s=0$ einen Verzweigungspunkt und deshalb legen wir längs der negativen reellen Achse einen Schnitt.

Für $t < 0$ in (43) können wir den Weg beliebig weit nach rechts schieben und deshalb verschwindet $\Delta(x,t)$ für negative t .

Für positive t deformieren wir C in C' , bestehend aus den beiden grossen Kreisbögen Γ_1, Γ_2 und dem kleinen Kreis γ um den Ursprung (s. Fig.), sowie den Linien oberhalb und unterhalb des Verzweigungsschnittes. Diese verschiedenen Kurvenstücke von C' geben die folgenden Beiträge zum Integral (43) längs C' :

(i) Längs Γ_1, Γ_2 ist $s = R e^{i\varphi}$, $|\varphi| < \pi$. Ist R also

$$|\exp(-s^{1/2} x)| = \exp(-R^{1/2} x \cos \frac{\varphi}{2}).$$

Da $\operatorname{Re} s \leq 0$ längs Γ_1, Γ_2 führt e^{st} (für $t > 0$) zu einer weiteren Dämpfung und im Limes $R \rightarrow \infty$ verschwinden also die Beiträge längs Γ_1, Γ_2 .

(ii) Dasselbe gilt für den kleinen Kreis γ mit Radius ε für $\varepsilon \downarrow 0$ (der Integrand ist beschränkt).

(iii) Längs dem oberen Ufer des Schnittes ist $s = \sigma e^{i\pi}$, $ds = -d\sigma$, $s^{1/2} = \sigma^{1/2} e^{i\pi/2} = i\sigma^{1/2}$. Auf dem unteren Ufer gilt $ds = +d\sigma$ ($s = \sigma e^{-i\pi}$), $s^{1/2} = \sigma^{1/2} e^{-i\pi/2} = -i\sigma^{1/2}$. Damit erhält man

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\leftarrow} ds e^{st} e^{-s^{1/2} x} &= \frac{-1}{2\pi i} \int_0^R d\sigma e^{-\sigma t} (e^{-i\sigma^{1/2} x} - e^{i\sigma^{1/2} x}) \\ &\rightarrow + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\sigma e^{-\sigma t} \sin(\sigma^{1/2} x). \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} \theta(x,t) &= + \frac{1}{\pi_0} \int_0^\infty d\sigma e^{-\sigma t} \sin(\sqrt{\sigma} x) \\ &= + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \underbrace{\lambda \sin(\lambda x)}_{-\frac{\partial}{\partial x} \cos(\lambda x)} e^{-\lambda^2 t} d\lambda = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x} e^{-\lambda^2 t} d\lambda \right) \end{aligned}$$

$$\stackrel{(8,9)}{=} -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{(\pi t)^{1/2}} e^{-x^2/4t} \right],$$

d.h.

$$\theta(x,t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{t^{3/2}} e^{-x^2/4t}. \quad (44)$$

Damit wird aus (42)

$$v(x,t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{g(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-x^2/4(t-\tau)} d\tau. \quad (45)$$

Dies stellt die (eindeutige) Lösung des Problems (37), (38) dar.

VI. Distributionen

Die Theorie der Distributionen ist ein sehr ausgedehntes Gebiet der Mathematik. Für die meisten Bedürfnisse der Physik genügen aber relativ bescheidene Kenntnisse. In diesem Kapitel gebe ich eine mehr handverbalische Einführung in das Gebiet.

Für eine weiterführende Lektüre verweise ich vor allem auf die beiden ersten Bände der Reihe:

I.M. Gelfand et al., Verallgemeinerte Funktionen I-V, Deutscher Verlag der Wissenschaften,
[sowie: W.S. Wladimirov, Gleichungen der mathem. Physik, Deutscher Verlag d. W.]
Für die meisten praktischen Zwecke des Physikers genügt das Material in Band I. Gewisse Beweise werden allerdings erst in Band II durchgeführt.

1. Heavisides

Auf die einfachste Distribution, die sog. "δ-Funktion" (Heaviside 1893, Dirac 1926) wird man beim Grenzübergang von einer kontinuierlichen Ladungsverteilung zu einer Punktladung geführt. Man denke sich eine Folge von kontinuierlichen Ladungsverteilungen $\delta_n(x)$ mit der Gesamtladung 1, d.h.

$$\int \delta_n(x) dx = 1, \quad n=1,2,\dots \quad (1)$$

vorgegeben, deren Träger mit $n \rightarrow \infty$ auf den Punkt $x=0$ zusammenschrumpft; z.B.

$$\delta_n(x) = \left(\frac{n}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-nx^2}, \quad n=1,2,\dots \quad (2)$$

Der Limes der Folge (2) ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq 0, \\ \infty & \text{für } x = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Die Physiker haben lange so getan, als ob das "Integral" dieser Grenzfunktion gleich 1 sei und dabei richtige Resultate produziert. Im Sinne des Lebesgue-Integrals ist aber

$$\int \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(\underline{x}) d\underline{x} = 0.$$

Den formalen Manipulationen der Physiker kann aber ein präziser Sinn gegeben werden, wenn man den Schwachen Grenzwert der Folge δ_n betrachtet: Ist $f(\underline{x})$ eine stetige und beschränkte Funktion auf \mathbb{R}^3 , so gilt für die Folge (2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \delta_n(\underline{x}) f(\underline{x}) d\underline{x} = f(0). \quad (4)$$

Fasst man also $\delta_n(\underline{x})$ als lineares Funktional auf dem Raum der "Testfunktionen" auf:

$$\delta_n(f) := \int \delta_n(\underline{x}) f(\underline{x}) d\underline{x}, \quad (5)$$

so konvergiert die Folge dieser Funktionale (in einem zu präzisierenden Sinne) gegen das Funktional (Mass)

$$\delta(f) := f(0). \quad (6)$$

Dafür schreibt man auch

$$\delta(f) \equiv \int \delta(\underline{x}) f(\underline{x}) d\underline{x} = f(0), \quad (7)$$

wobei das Integralzeichen nur symbolische Bedeutung hat und nicht im Sinne der Massentheorie (mit $d\underline{x}$ = Lebesgue Mass) zu verstehen ist.

Die Dirac'sche δ - "Funktion" ist also ein besonders einfaches lineares (stetiges) Funktional (Distribution) auf einem linearen Funktionenraum.

Beschränkt man den Raum der Testfunktionen auf Funktionen die stetige und beschränkte Ableitungen

besitzen, so kann man auch die Ableitung der δ -Distribution definieren. Dazu betrachten wir

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{\partial \delta_n(x)}{\partial x_k} f(x) dx &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \int \delta_n(x) \frac{\partial f}{\partial x_k} dx \\ &= -\delta \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) = - \frac{\partial f(0)}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

Dies legt die folgende Definition nahe:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \delta : f \longmapsto - \frac{\partial f}{\partial x_k}(0). \quad (8)$$

Man sieht an diesem Beispiel folgendes: Je "singulärer" die Distribution, umso regulärer müssen die Testfunktionen sein; für die δ -Distribution genügt Stetigkeit, für die Ableitung der δ -Distribution muss man jedoch stetige Differenzierbarkeit voraussetzen.

Um Operationen mit Distributionen zu erklären, ist es aber günstig, alle Distributionen auf demselben Funktionenraum zu definieren. Je nach Wahl dieses Raumes erhält man eine andere Klasse von Distributionen. Wir beschränken uns im folgenden auf die sog. "temperierten Distributionen". Diese sind in der Physik, insbesondere in der Quantenfeldtheorie, besonders wichtig.

2. Der Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ der Testfunktionen (Repetition von Kap.V)

Definition: Mit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ bezeichnen wir den Raum aller C^∞ -Funktionen, die samt all ihren Ableitungen für $|x| \rightarrow \infty$ rascher verschwinden als jede Potenz von $|x|^{-1}$.

Beispiel: $f(x) = P(x) e^{-|x|^2}$, P : Polynom.

Auf \mathcal{S} führen wir nun einen Konvergenzbegriff ein.

Wir benutzen die folgenden Bezeichnungen: Es sei $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ der Vektor mit den nichtnegativen ganzzahligen Komponenten α_j ; $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$.

Dann ist

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad , \quad D^0 f(x) = f(x) \quad (9)$$

und

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \quad (10)$$

Definition: Eine Folge von Funktionen f_1, f_2, \dots aus \mathcal{F} konvergiert gegen eine Funktion $f \in \mathcal{F}$, wenn für alle α und β *)

$$x^\beta D^\alpha f_k \xrightarrow{\mathbb{R}^n} x^\beta D^\alpha f \quad , \quad k \rightarrow \infty \quad (11)$$

Dafür schreiben wir auch $f_k \rightarrow f, k \rightarrow \infty$ in \mathcal{F} .

Offensichtlich ist \mathcal{F} ein linearer Raum. Der Differentialoperator D^β ist stetig: Aus $f_k \rightarrow f$ in \mathcal{F} folgt $D^\beta f_k \rightarrow D^\beta f$ in \mathcal{F} .

Bezeichnen wir mit Θ_M die Menge aller C^∞ -Funktionen, die nebst allen Ableitungen im Unendlichen nicht schneller anwachsen als ein Polynom: $\varphi \in \Theta_M$ falls

$$|D^\alpha \varphi(x)| \leq C_\alpha (1 + |x|)^{m_\alpha} \quad , \quad (12)$$

so führt die Multiplikation mit $\varphi \in \Theta_M$ nicht aus \mathcal{F} heraus; überdies ist diese Operation stetig, wie man leicht ersieht.

*) Der Doppelpfeil bedeutet gleichmäßige Konvergenz.

3. Temperierte Distributionen

Definition: Eine (temperierte) Distribution ist ein stetiges lineares Funktional auf \mathcal{S} . Die Menge aller Distributionen bezeichnen wir mit $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Stetigkeit eines linearen Funktionals T auf \mathcal{S} bedeutet:

Aus $f_k \rightarrow f$ in \mathcal{S} folgt $T(f_k) \rightarrow T(f)$.

(L. Schwartz)

Lemma: Ein lineares Funktional T über \mathcal{S} gehört genau dann zu \mathcal{S}' , wenn eine Konstante $C > 0$ und eine ganze Zahl $p \geq 0$ existieren derart, dass für alle $f \in \mathcal{S}$ die Ungleichung

$$|T(f)| \leq C \|f\|_p \quad (13)$$

mit

$$\|f\|_p = \sup_{|x| \leq p, x \in \mathbb{R}^n} (1+|x|)^p |D^\alpha f(x)|$$

gilt.

Beweis: Die Bedingung ist hinreichend. Ein lineares Funktional T über \mathcal{S} genüge der Ungleichung (13) für gewisse $C > 0$ und $p \geq 0$. Wir beweisen, dass dann $T \in \mathcal{S}'$ ist. Es gelte $f_k \rightarrow f, k \rightarrow \infty$ in \mathcal{S} . Dann gilt $\|f_k - f\|_p \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, und daher auch $T(f_k) \rightarrow T(f), k \rightarrow \infty$. Das bedeutet aber, dass T ein stetiges Funktional über \mathcal{S} ist.

Die Bedingung ist auch notwendig. Es sei $T \in \mathcal{S}'$. Wir beweisen, dass es Zahlen $C > 0$ und $p \geq 0$ gibt derart, dass für alle $f \in \mathcal{S}$ die Ungleichung (13) gilt. Nehmen wir an, dass solche Zahlen nicht existieren, dann kann man eine Folge von Funktionen $f_k, k=1, 2, \dots$ aus \mathcal{S} angeben derart, dass

$$|T(f_k)| \geq k \|f_k\|_k \quad (14)$$

gilt. Die Folge der Funktionen

-VI.6-

$$g_k(x) = \frac{f_k(x)}{\sqrt{k} \|f_k\|_k}, \quad k=1, 2, \dots$$

konvergiert in \mathcal{S} gegen Null; denn für $k \geq |\alpha|$ und $k \geq |\beta|$ gilt

$$|\alpha^\beta D^\alpha g_k(x)| = \frac{|\alpha^\beta D^\alpha f_k(x)|}{\sqrt{k} \|f_k\|_k} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Hieraus und aus der Stetigkeit von T folgt $T(g_k) \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$. Andererseits schlieszen wir aus der Ungleichung (14)

$$|T(g_k)| = \frac{1}{\sqrt{k} \|f_k\|_k} |T(f_k)| \geq \sqrt{k}.$$

Dieser Widerspruch beweist den Satz. \square

Jedes $T \in \mathcal{S}'$ ist also bezüglich einer gewissen Norm $\|\cdot\|_p$ ein stetiges Funktional. (Man sagt auch T ist von endlicher Ordnung.)

Beispiele

1) Für die δ -Distribution: $\delta(f) = f(0)$ gilt

$$|\delta(f)| \leq \|f\|_0$$

also gehört δ zu \mathcal{S}' .

2) Die Ableitung der δ -Distribution:

$$\frac{\partial \delta}{\partial x_k}(f) := -\frac{\partial f}{\partial x_k}(0)$$

erfüllt

$$\left| \frac{\partial \delta}{\partial x_k}(f) \right| \leq \|f\|_1$$

und deshalb gehört auch $\frac{\partial \delta}{\partial x_k}$ zu \mathcal{S}' .

3) $T(x)$ sei eine stetige Funktion von höchstens polynomialen Wachstum, d.h.

$$(1+|x|^2)^{-\tau} |T(x)| \leq \text{const},$$

für ein genügend grosses r . Durch

$$T(f) = \int T(x) f(x) dx^4, \quad f \in \mathcal{F} \quad (15)$$

wird ein lineares Funktional definiert. Da

$$|T(f)| \leq \|f\|_p \int (1+|x|^2)^{-\frac{p}{2}} |T(x)| dx^4, \quad p > \frac{1}{2}(z+n+1)$$

ist, wird nach dem Lemma ^{von L. Schwartz} durch (15) eine Distribution definiert. Aus $T(f) = 0$, für alle $f \in \mathcal{F}$, folgt ferner $T(x) \equiv 0$, d.h. die Distribution T ist durch die Funktion $T(x)$ eindeutig bestimmt. Wir identifizieren daher die Funktion $T(x)$ mit der Distribution T .

Statt stetiger Funktionen kann man allgemeiner Funktionen $T(x)$ betrachten, für die, für ein passendes r ,

$$(1+|x|^2)^r T(x) \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad (16)$$

ist. Deshalb nennt man die Distributionen häufig auch verallgemeinerte Funktionen und schreibt dann symbolisch:

$$T(f) \equiv \int T(x) f(x) dx^4.$$

Die Bezeichnung $T(x)$ für eine verallgemeinerte Funktion ist ebenfalls eine symbolische Bezeichnung, da der "Wert von T an der Stelle x " im allgemeinen keinen Sinn hat.

* * *

Die weiteren Operationen für Distributionen werden so definiert, dass sie für Funktionen (bei der Identifikation (15)) die übliche Bedeutung haben. Wir geben zu dieser Bemerkung ein einfaches Beispiel. Sei $x' = \Lambda x + a$, $\det \Lambda \neq 0$, eine affine Transformation von \mathbb{R}^n . Für eine Funktion $T(x)$ (vom Typ (16)) und $f \in \mathcal{F}$ gilt

$$\int T(\Lambda x + a) f(x) dx^4 = \int T(x) \frac{f(\Lambda^{-1}(x-a))}{|\det \Lambda|} dx^4.$$

Wir definieren deshalb die transformierte Distribution $T_{(a, \Lambda)}$

einer Distribution T durch

$$T_{(a,\Lambda)}(f) = T(f \circ \Lambda), \quad (17)$$

wobei

$$f_{(a,\Lambda)}(x) = \frac{1}{|\det \Lambda|} f(\Lambda^{-1}(x-a)). \quad (18)$$

Häufig schreiben wir für $T_{(a,\Lambda)}$ auch $T(\Lambda x + a)$.

Analog induzieren allgemeinere Transformationen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ Transformationen in \mathcal{S}' (schreibe dies aus).

4. Der Träger einer Distribution

Der Träger einer Testfunktion f ist die Menge

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}}.$$

Dies bedeutet: Das Komplement von $\text{supp } f$ ist die größte offene Menge auf der f verschwindet.

Man sagt, dass eine Distribution T auf einer offenen Menge G verschwindet, falls $T(f) = 0$ für alle $f \in \mathcal{S}$ mit $\text{supp } f \subset G$. Für stetige Funktionen $T(x)$ bedeutet dies $T(x) = 0$ für alle $x \in G$; zum Beweis verbinde man die Testfunktion

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| > \varepsilon, \\ \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}\right) & \text{für } |x| < \varepsilon, \end{cases} \quad (19)$$

welche als Träger die abgeschlossene ε -Kugel um $x=0$ hat.

Die Aussage, dass zwei Distributionen auf einer offenen Menge übereinstimmen ist also sinnvoll (nicht aber Übereinstimmung in einem Punkt)!

Definition: Der Träger einer Distribution T ist das Komplement der größten offenen Menge auf der T verschwindet.

Bsp. $\text{supp } \delta = \{0\}$.

5. Differentiation einer Distribution

Für eine differenzierbare Funktion T mit höchstens polynomialem Wachstum ist für $f \in \mathcal{S}$

$$\int \frac{\partial T}{\partial x_k}(x) f(x) d^4x = - \int T(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} d^4x.$$

Daher definiert man für eine Distribution $T \in \mathcal{S}'$:

$$\frac{\partial T}{\partial x_k}(f) = -T\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) \tag{20}$$

und allgemeiner

$$\boxed{\mathcal{D}^\alpha T(f) = (-1)^{|\alpha|} T(\mathcal{D}^\alpha f)}. \tag{21}$$

Das lineare Funktional $\mathcal{D}^\alpha T$ ist stetig auf \mathcal{S} , da $f \mapsto \mathcal{D}^\alpha f$ eine stetige Abbildung von \mathcal{S} ist. Distributionen aus \mathcal{S}' sind also unendlich oft differenzierbar.

Die Differentiation ist eine lokale Operation: Falls zwei Distributionen auf einer offenen Menge übereinstimmen, so sind dort auch ihre Ableitungen gleich.

Beispiele:

1) Die Heaviside Funktion: $\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0, \end{cases} \tag{22}$
hat die Ableitung

$$\theta' = \delta, \tag{23}$$

denn

$$\theta'(f) = -\theta(f') = -\int_0^\infty f' dx = f(0).$$

2) Fassen wir $G(x) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|}$ als Distribution aus $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ auf, so ist

$$\Delta G = \delta. \tag{24}$$

von Form (16)

Beweis: $\Delta G(f) = G(\Delta f) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\Delta f(x)}{|x|} d^3x =$

-VI.10-

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{4\pi} \int_{|x| \geq \epsilon} \frac{\Delta f(x)}{|x|} d^3x.$$

Nun ist nach der 2. Green'schen Formel

$$\int_{|x| \geq \epsilon} \frac{\Delta f}{|x|} d^3x = \int_{|x| \geq \epsilon} f(x) \Delta\left(\frac{1}{|x|}\right) d^3x - \int_{|x|=\epsilon} \frac{\partial f}{\partial r} \frac{1}{r} d\sigma \\ + \int_{|x|=\epsilon} f \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r}\right) d\sigma$$

Da $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0$ für $r > 0$, folgt im Limes $\epsilon \rightarrow 0$:
 $\Delta G(f) = f(0)$. \square

6. Produkte

Für Funktionen $T(x)$, $g(x)$ und $f \in \mathcal{D}$ gilt

$$\int [g(x)T(x)] f(x) d^4x = \int T(x) [g(x)f(x)] d^4x.$$

Deshalb definieren wir das Produkt einer Distribution T und einer Funktion g durch

$$(gT)(f) = T(gf). \quad (25)$$

Diese Definition ist sinnvoll falls $g \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$ ist und samt seinen Ableitungen polynomial beschränkt ist; dann ist $f \mapsto gf$ eine stetige Abbildung von \mathcal{D} nach \mathcal{D} .

Für spezielle T sind auch allgemeinere g als Multiplikatoren zugelassen; z.B. ist

$$g \cdot \delta = g(0) \delta \quad (26)$$

für jedes stetige g definierbar. Nicht definiert ist aber im allgemeinen das Produkt von zwei Distributionen; z.B. ist δ^2 sinnlos.

Tensorprodukte

Das Tensorprodukt von zwei Funktionen f und g auf \mathbb{R}^4

bzw. \mathbb{R}^m ist

$$(f \otimes g)(x_1, \dots, x_{n+m}) = f(x_1, \dots, x_n) g(x_{n+1}, \dots, x_{n+m}). \quad (27)$$

Für zwei Funktionen $T(x)$ und $S(y)$ gilt (unter sehr allgemeinen Voraussetzungen)

$$\int T(x) S(y) f(x) g(y) dx dy = \int T(x) f(x) dx \int S(y) g(y) dy$$

und $T \otimes S$ definiert eine Distribution, welche

$$(T \otimes S)(f \otimes g) = T(f) S(g) \quad (28)$$

erfüllt.

Wir zeigen nun, dass zu $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ genau eine Distribution $T \otimes S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$ existiert, welche (28) erfüllt, mit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$.

Dazu beachte man zunächst, dass $f \otimes g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$ ist. Wenn nun eine Distribution $T \otimes S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$ existiert, welche (28) erfüllt, so ist sie eindeutig. Auf Grund der Linearität ist sie nämlich sicher auf allen Testfunktionen der Form

$$h(x, y) = \sum_{i=1}^N f_i(x) g_i(y) \quad (29)$$

eindeutig definiert und diese liegen in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$ dicht.

(Dies kann man mit dem Satz von Weierstrass relativ einfach beweisen.)

Die Existenz von $T \otimes S$ ergibt sich wie folgt. Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$, dann ist $f(x, y)$ für festes $x \in \mathbb{R}^n$ als Funktion von y in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist deshalb (in symbolischer Schreibweise)

$$h(x) = \int S(y) f(x, y) dy \quad (30)$$

definiert. Mit dem Lemma von L. Schwarz beweist man, dass $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist und dass $f \mapsto h$ eine stetige Abbildung von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist. Somit existiert $T(h)$ und $f \mapsto T(h)$ ist eine Distribution in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$,

die offensichtlich (28) erfüllt.

Führt man zuerst die "x-Integration" und dann die "y-Integration" durch, so muss auf Grund der Eindeutigkeit von $T \otimes S$ dasselbe Resultat herauskommen. Es gilt also

$$T \otimes S = S \otimes T. \quad (31)$$

Beispiel: $\delta(x) \cdot \delta(y) = \delta(x, y)$.

7. Faltung von Distributionen

Unter der Faltung $f * g$ von zwei Funktionen versteht man die Funktion

$$(f * g)(x) = \int f(x-y)g(y)dy = \int f(y)g(x-y)dy. \quad (32)$$

Dies lässt sich verallgemeinern. Ist T eine Distribution und f eine Testfunktion, so definieren wir

$$(T * f)(x) = \int T(y)f(x-y)dy = \int T(x-y)f(y)dy. \quad (33)$$

(Alle Integrale sind symbolisch zu verstehen.) Wir zeigen, dass $T * f$ polynomial beschränkt ist. Nach dem Lemma auf S. VI.5 ist für ein passendes p :

$$|(T * f)(x)| \leq C \|f(x-\cdot)\|_p \leq \text{const.} (1+|x|)^p. \quad (34)$$

Als nächstes beweisen wir, dass $g := T * f$ eine C^∞ -Funktion ist. Wir bilden mit $h = (h_1, 0, \dots, 0)$

$$\frac{1}{h_1} [g(x+h) - g(x)] = \int dy T(y) \frac{1}{h_1} [f(x+h-y) - f(x-y)].$$

Nun konvergiert $\frac{1}{h_1} [f(x-y+h) - f(x-y)]$ für $h_1 \rightarrow 0$, bei festem x als Funktion von y gegen $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x-y)$ und zwar in S (beweise dies!). Also gilt

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = \int T(y) \frac{\partial f}{\partial x_1}(x-y) dy = \int \frac{\partial T}{\partial x_1}(x-y) f(y) dy.$$

Eine Wiederholung dieser Überlegung zeigt, dass g unendlich oft differenzierbar ist und somit allen Ableitungen polynomial beschränkt ist. Ferner sehen wir, dass

$$\boxed{D^\alpha(T * f) = (D^\alpha T) * f} \quad (35)$$

ist.

Wir bemerken noch, dass man unter gewissen Bedingungen auch die Faltung von zwei Distributionen definieren kann. Diese ist "definiert" durch $\langle T * S, f \rangle = \langle T(x) \otimes S(y), f(x+y) \rangle$, falls die rechte Seite sinnvoll ist! (s. Gelfand-Schilow, § I.5.)

Anwendung

↑ mehr darüber in Abschnitt 12

Wir betrachten die inhomogene partielle Differentialgleichung

$$D\varphi = \rho, \quad (36)$$

wo D ein linearer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten ist.

Unter einer Grundlösung, oder einer Green'schen Funktion G versteht man eine Distribution, welche

$$DG = \delta \quad (37)$$

erfüllt. Diese ist, bis auf eine Lösung der homogenen Gleichung, bestimmt. Für jedes $\rho \in \mathcal{S}$ ist dann

$$\varphi = G * \rho \quad (38)$$

eine partiikuläre Lösung von (36), denn nach (35) ist

$$D\varphi = D(G * \rho) = (DG) * \rho = \delta * \rho = \rho.$$

* * *

*) Dies ist insbesondere der Fall, wenn T oder S kompakten Träger hat. Zerge $T * \delta = \delta * T = T$, $T \in \mathcal{S}'$.

8. Fouriertransformationen einer Distribution

Jeder Testfunktion $f \in \mathcal{S}$ können wir die Fourier-
transformierte

$$F[f](p) \equiv \tilde{f}(p) := \int f(x) e^{i(p,x)} d^4x \quad (39)$$

In Kap. V, Satz auf S. V.12 wurde gezeigt
zuordnen. ~~Es ist nicht schwierig zu zeigen, dass F eine~~
stetige Abbildung von \mathcal{S} auf \mathcal{S} ist. Dies ist einer
der Gründe, weshalb der Testfunktionen-Raum \mathcal{S} besonders
wichtig ist. Die stetige Umkehrabbildung von (39) lautet

$$\begin{aligned} F^{-1}[g](x) &= (2\pi)^{-4} \int g(p) e^{-i(p,x)} d^4p \\ &= (2\pi)^{-4} F[g(-p)]. \end{aligned} \quad (40)$$

Nun betrachten wir zunächst eine auf \mathbb{R}^4 integrierbare
Funktion $T(x)$. Dann ist ihre Fourier-Transformierte

$$F[T](p) = \int T(x) e^{i(p,x)} d^4x$$

wegen $|F[T](p)| \leq \int |T(x)| d^4x < \infty$

eine stetige und beschränkte Funktion auf \mathbb{R}^4 und de-
finiert somit eine Distribution aus \mathcal{S}' ,

$$F[T](f) = \int F[T](p) f(p) d^4p, \quad f \in \mathcal{S}.$$

Das letzte Integral ist nach dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \int F[T](p) f(p) d^4p &= \int \left[\int T(x) e^{i(p,x)} d^4x \right] f(p) d^4p \\ &= \int T(x) \int f(p) e^{i(p,x)} d^4p d^4x = \int T(x) F[f](x) d^4x, \end{aligned}$$

d.h., es gilt

$$F[T](f) = T(F[f]). \quad (41)$$

Diese Beziehung wählen wir als Definition der Fourier-Transformierten $F[T]$ einer beliebigen Distribution $T \in \mathcal{S}'$:

$$\boxed{F[T](f) = T(F[f]), T \in \mathcal{S}', f \in \mathcal{S}. \quad (42)}$$

Dadurch wird, nach dem Gesagten, eine Distribution $F[T] \in \mathcal{S}'$ definiert.

Wir setzen

$$F^{-1}[T] = (2\pi)^{-n} F[T(-x)], T \in \mathcal{S}'. \quad (43)$$

Man sieht leicht dass F^{-1} die zu F inverse Abbildung ist.

Eigenschaften der Fourier-Transformation

a) Differenzieren der Fourier-Transformierten.

Ist $T \in \mathcal{S}'$, so gilt

$$\boxed{D^\alpha F[T] = F[(ix)^\alpha T]}. \quad (44)$$

Beweis: Für alle $f \in \mathcal{S}$ ist (wir schreiben $\langle T, f \rangle$ für $T(f)$):

$$\langle D^\alpha F[T], f \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle F[T], D^\alpha f \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, F[D^\alpha f] \rangle$$

Aber

$$\begin{aligned} F[D^\alpha f](p) &= \int D^\alpha f(x) e^{i(p,x)} d^4x \\ &= (-ip)^\alpha \int f(x) e^{i(p,x)} d^4x = (-ip)^\alpha F[f](p). \end{aligned}$$

Deshalb gilt

$$\begin{aligned} \langle D^\alpha F[T], f \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle T, (-ip)^\alpha F[f] \rangle = \langle (ix)^\alpha T, F[f] \rangle \\ &= \langle F[(ix)^\alpha T], f \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

b) Fourier-Transformation der Ableitung

Analog zeigt man

$$\boxed{F[D^\alpha T] = (-ip)^\alpha F[T]}. \quad (45)$$

c) Fourier-Transformation der Translation

$$\boxed{F[T(x-x_0)] = e^{i(p, x_0)} F[T]} \quad (46)$$

Für alle $f \in \mathcal{S}$ gilt nämlich

$$\begin{aligned} \langle F[T(x-x_0)], f \rangle &= \langle T(x-x_0), F[f] \rangle = \langle T, F[f](x+x_0) \rangle \\ &= \langle T, F[f e^{i(p, x_0)}] \rangle = \langle F[T], e^{i(p, x_0)} f \rangle \\ &= \langle e^{i(p, x_0)} F[T], f \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

d) Fourier-Transformation des Tensorproduktes

Als Übung zeige man

$$\boxed{F[T \otimes S] = F[T] \otimes F[S], T, S \in \mathcal{S}'} \quad (47)$$

e) Fourier-Transformation der Faltung

Für $T \in \mathcal{S}'$ und $g \in \mathcal{S}$ gilt

$$\boxed{F[T * g] = F[T] \cdot F[g]} \quad (48)$$

Beweis: Nach Definition ist

$$(T * g)(x) = \langle T, g(x-\cdot) \rangle.$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} \langle T, g(x-\cdot) \rangle &= \langle F[T], \underbrace{F^{-1}[g(x-\cdot)]}_{(2\pi)^{-n} F[g(\cdot-x)]} \rangle \\ &= \langle (2\pi)^{-n} e^{-i(p, x)} F[T](p), F[g](p) \rangle. \end{aligned}$$

Damit

$$\underbrace{T * g}_{\text{(Funktion!)}}(x) = \langle (2\pi)^{-n} e^{-i(p, x)} F[T](p), F[g](p) \rangle.$$

Daraus ergibt sich (mit $\tilde{f} := T[f]$):

$$\begin{aligned} \langle F[T * g], f \rangle &= \langle T * g, F[f] \rangle \\ &= \int T * g(x) \tilde{f}(x) d^4x = \int \langle (2\pi)^4 e^{-i(p,x)} F[T](p), F[g](p) \rangle \tilde{f}(x) d^4x \\ &= \int \langle (2\pi)^4 e^{-i(p,x)} \tilde{f}(x) F[T](p), F[g](p) \rangle d^4x. \end{aligned}$$

Nun denke man sich das Integral als Limes von Riemann Summen und benutze die Stetigkeit von $F[T]$. Dann kommt

$$\begin{aligned} \langle F[T * g], f \rangle &= \langle f(p) F[T](p), F[g](p) \rangle \\ &= \langle F[g](p) F[T](p), f(p) \rangle = \langle F[g] F[T], f \rangle, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. \square

Beispiel. Die Fouriertransformierte der δ -Distribution ist

$$\boxed{F[\delta] = 1}, \quad (49)$$

denn

$$\begin{aligned} \langle F[\delta], f \rangle &= \langle \delta, F[f] \rangle = F[f](0) \\ &= \int f(x) d^4x = \langle 1, f \rangle. \end{aligned}$$

9. Weitere Beispiele von Distributionen und ihre Fouriertransf.

1) $\mathcal{P}(1/x)$: Das Hauptwert-Integral (von Cauchy) ist definiert durch

$$\mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)(f) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{|x| \geq \epsilon} \frac{1}{x} f(x) dx. \quad (50)$$

Wir zeigen, dass dadurch eine Distribution aus \mathcal{S}' definiert wird.

Da
$$\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{1}{x} f(x) dx = \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x) - f(-x)}{x} dx$$

und $[f(x) - f(-x)]/x \rightarrow 2f'(0)$ für $x \rightarrow 0$, können wir schreiben

$$\mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)(f) = \int_0^{\infty} \frac{f(x) - f(-x)}{x} dx$$

und dies ist sicher endlich. Da

$$\left| \frac{1}{x} [f(x) - f(-x)] \right| \leq \frac{1}{x} \int_{-x}^{+x} |f'(t)| dt \leq 2 \sup_{t \in \mathbb{R}} |f'(t)|$$

haben wir überdies

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)(f) \right| &\leq 2 \int_0^1 \sup_{t \in \mathbb{R}} |f'(t)| dx + \left| \int_{|x| > 1} \frac{(x f(x))}{x^2} dx \right| \\ &\leq 2 \|f\|_1. \end{aligned}$$

Nach dem Lemma von L. Schwartz ist deshalb $\mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ in \mathcal{S}' .

2) Die Formeln von Sokhotski-Prémelj

Wir beweisen nun die Beziehung

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int \frac{f(x)}{x \pm i\varepsilon} dx = \mp i\pi f(0) + \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)(f), \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \quad (S_1)$$

Diese Beziehung besagt, dass der schwache Limes von $\frac{1}{x \pm i\varepsilon}$, $\varepsilon \rightarrow 0$ in \mathcal{S}' existiert und dass dieser Grenzwert gleich $\mp i\pi \delta(x) + \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ ist. Wir schreiben dafür

$$\boxed{\frac{1}{x \pm i0} = \mp i\pi \delta(x) + \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)}. \quad (S_1')$$

Beweis: Wir zerlegen das Integral in (51) wie folgt

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int \frac{f(x)}{x+i\epsilon} dx = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{-R}^{+R} \frac{x-i\epsilon}{x^2+\epsilon^2} f(x) dx + \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{|x| \geq R} \frac{x-i\epsilon}{x^2+\epsilon^2} f(x) dx. \quad (52)$$

Der erste Term rechts ist

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{-R}^{+R} \frac{x-i\epsilon}{x^2+\epsilon^2} f(x) dx &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} f(0) \int_{-R}^{+R} \frac{x-i\epsilon}{x^2+\epsilon^2} dx + \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{-R}^{+R} \frac{x-i\epsilon}{x^2+\epsilon^2} [f(x)-f(0)] dx \\ &= -2i f(0) \lim_{\epsilon \downarrow 0} \arctan \frac{R}{\epsilon} + \int_{-R}^{+R} \frac{f(x)-f(0)}{x} dx \\ &= -i\pi f(0) + \int_{-R}^{+R} \frac{f(x)-f(0)}{x} dx. \end{aligned}$$

Im letzten Term in (52) darf man den Limes $\epsilon \rightarrow 0$ ebenfalls unter dem Integral ausführen und wir erhalten

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int \frac{f(x)}{x+i\epsilon} dx &= -i\pi f(0) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)-f(0)}{x} dx \\ &= -i\pi f(0) + \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{|x| \geq \epsilon} \frac{f(x)}{x} dx. \quad \square \end{aligned}$$

3) Fourier-Transformation von θ :

Es gilt

$$F[\theta] = \pi \delta(p) + i \mathcal{P}\left(\frac{1}{p}\right). \quad (53)$$

Für $\epsilon > 0$ gilt nämlich

$$\begin{aligned} \langle F[\theta(x) e^{-\epsilon x}], f \rangle &= \langle e^{-\epsilon x} \theta(x), F[f] \rangle = \int_0^{\infty} e^{-\epsilon x} F[f](x) dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\epsilon x} \int_{-\infty}^{+\infty} f(p) e^{ip \cdot x} dp dx. \end{aligned}$$

Darin darf man die beiden Integrale vertauschen und erhält so:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[\Theta(x) \bar{e}^{\epsilon x}], f \rangle &= \int dp f(p) \int_0^{\infty} e^{ip \cdot x} \bar{e}^{-\epsilon x} dx \\ &= \int f(p) \frac{i}{p+i\epsilon} dp = \left\langle \frac{i}{p+i\epsilon}, f \right\rangle, \end{aligned}$$

d.h.

$$\mathcal{F}[\Theta(x) \bar{e}^{\epsilon x}] = \frac{i}{p+i\epsilon}. \quad (54)$$

Im Limes $\epsilon \downarrow 0$ erhält man daraus, wegen (51') die Behauptung (53).

Übungsaufgaben

Zeige:

$$\mathcal{F}[\operatorname{sgn} x] = 2i \mathcal{P}\left(\frac{1}{p}\right),$$

$$\mathcal{F}\left[\mathcal{P}\frac{1}{x}\right] = \pi \operatorname{sgn} p,$$

$$\mathcal{F}\left[\mathcal{P}\frac{1}{x^2}\right] = -\pi |p|, \quad (55)$$

$$\mathcal{F}[\Theta(x) x] = -i\pi \delta'(p) - \mathcal{P}\left(\frac{1}{p^2}\right).$$

10. Distributionen, die auf einer glatten Hyperfläche konzentriert sind

Wir betrachten zunächst die Hyperebene $x_1 = 0$ in \mathbb{R}^n .
Dann wird man naturgemäß unter $\delta(x_1)$ die folgende Distribution verstehen:

$$\langle \delta(x_1), f \rangle = \int f(0, x_2, \dots, x_n) dx^{n-1}. \quad (56)$$

Nun sei $H(x_1, \dots, x_n)$ eine beliebige, hinreichend glatte Funktion derart, dass auf

$$\Sigma_E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid H(x) = E\}$$

der Gradient von H nicht verschwindet. Σ_E ist dann eine differenzierbare Hyperfläche.

Wir möchten als Verallgemeinerung von (56) eine Distribution $\delta(H-E)$ definieren. Intuitiv ist ziemlich klar, was darunter zu verstehen ist. Für eine präzise Definition fassen wir uns hier sehr knapp und verwenden die Theorie der Differentialformen. (Eine ausführliche Diskussion findet man in Gelfand-Szilow, Bd. I, § III.1, S. 201.)

Es sei σ eine $(n-1)$ -Form, sodass

$$dH \wedge \sigma = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n \quad (57)$$

ist. Eine solche Form existiert, wie man leicht sieht. Sie ist aber durch (57) nicht eindeutig definiert. Für zwei Lösungen σ und σ' gilt offensichtlich

$$\sigma - \sigma' = dH \wedge \rho. \quad (58)$$

Nun sei $i: \Sigma_E \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Inklusion und $\omega = i^* \sigma$. Aus (58) folgt

$$i^* \sigma = i^* \sigma' + i^*(dH \wedge \rho) = i^* \sigma',$$

d.h. ω ist unabhängig von der Wahl von σ . Die $(n-1)$ -Form ist ein Volumen auf Σ_E .

Definition:

$$\langle \delta(H-E), f \rangle = \int_{\Sigma_E} f \omega. \quad (59)$$

Man kann leicht zeigen, dass das Mass zu ω gleich $dS / |\text{grad } H|$ ist (dS : Oberflächenelement), d.h. es ist auch

$$\langle \delta(H-E), f \rangle = \int_{\Sigma_E} f \frac{dS}{|\text{grad } H|}, \quad (60)$$

was man auch mit einer einfachen heuristischen Beobachtung erhält.

11. Die Struktur der Distributionen mit einem Punkttträger

Es gilt der

Satz: Gilt, für $T \in \mathcal{S}'$, $\text{supp } T = \{0\}$, so kann T eindeutig in der Gestalt

$$T = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_{\alpha} D^{\alpha} \delta \quad (61)$$

dargestellt werden.

Beweis: Es sei η eine C^{∞} -Funktion, die in einer Umgebung des Punktes 0 den Wert 1 und für $|x| > 1$ den Wert Null annimmt. Nach dem Lemma auf S. VI.5 ist

$$|\langle T, f \rangle| \leq C \|f\|_m \quad (62)$$

für gewisse von f unabhängige $m > 0$ und $C > 0$.

Nun sei f eine beliebige Funktion aus \mathcal{S} . Wir setzen

$$g_k(x) = \left[f(x) - \sum_{|\alpha|=0}^m \frac{D^{\alpha} f(0)}{\alpha!} x^{\alpha} \right] \eta(kx). \quad (63)$$

$[\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!]$

Wendet man die Ungleichung (62) auf die Funktionen g_k an und berücksichtigt man, dass $D^{\beta} \eta(kx) = O(k^{|\beta|})$ für $k \rightarrow \infty$ gilt, so erhält man

$$\begin{aligned} |\langle T, g_k \rangle| &\leq C \|g_k\|_m \\ &= C \sup_{|\beta| \leq m, |x| \leq \frac{1}{k}} |D^{\beta} [f(x) - \sum_{|\alpha|=0}^m \frac{D^{\alpha} f(0)}{\alpha!} x^{\alpha}] \eta(kx)| \\ &= O\left(\frac{1}{k}\right), \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Wegen $T = \eta(kx) T$ ist aber $\langle T, g_k \rangle$ unabhängig von k . Folglich gilt $\langle T, g_k \rangle = 0$ für $k = 1, 2, \dots$. Daraus folgt unter Berücksichtigung von (63):

$$\langle T, f \rangle = \langle \eta T, f \rangle = \langle T, \eta f \rangle = \langle T, g_1 + \sum_{|\alpha|=0}^m \frac{D^{\alpha} f(0)}{\alpha!} x^{\alpha} \eta(x) \rangle$$

$$\begin{aligned}
 &= \underbrace{\langle T, g_1 \rangle}_0 + \sum_{|\alpha|=0}^m \frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} \langle T, x^\alpha \eta(x) \rangle \\
 &= \sum_{|\alpha|=0}^m c_\alpha \langle D^\alpha \delta, f \rangle,
 \end{aligned}$$

wobei

$$c_\alpha = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} \langle T, x^\alpha \eta \rangle$$

gesetzt wurde. Damit ist die Darstellung (61) bewiesen. Diese ist aber auch eindeutig. Denn sei auch

$$T = \sum_{|\alpha|=0}^m c'_\alpha D^\alpha \delta$$

so muss

$$\sum_{|\alpha|=0}^m (c_\alpha - c'_\alpha) D^\alpha \delta = 0$$

gelten. Wendet man diese Beziehung auf die Funktion x^β an, so erhält man

$$(1) \quad \sum_{|\alpha|=0}^m (-1)^{|\alpha|} (c_\alpha - c'_\alpha) \langle \delta, D^\alpha x^\beta \rangle = (-1)^{|\beta|} \beta! (c_\beta - c'_\beta)$$

d.h., es gilt $c_\beta = c'_\beta$. \square

Korollar: Die allgemeine Lösung der Gleichung

$$x^p T = 0 \tag{64}$$

in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ hat die Gestalt

$$T = \sum_{k=0}^{p-1} c_k \delta^{(k)}. \tag{65}$$

Beweis: Offensichtlich ist $\text{supp } T = \{0\}$ und folglich hat T die Form (61). Nun ist aber

$$\begin{aligned}
 \langle x^p \delta^{(k)}, f \rangle &= \langle \delta^{(k)}, x^p f \rangle = (-1)^k \langle \delta, (x^p f)^{(k)} \rangle \\
 &= (-1)^k (x^p f)^{(k)} \Big|_{x=0}.
 \end{aligned}$$

Benutzt man dies in (64), so folgt die Behauptung unmittelbar. \square

12. Ergänzung zur Faltung von Distributionen

Zur Motivation betrachten wir wieder zuerst zwei "reguläre" Distributionen, d.h. zwei Funktionen $T(x)$, $S(x)$, welche wir als Distributionen auffassen, und bilden

$$\langle T \otimes S, f \rangle = \int dx dy T(x) S(y) f(x, y).$$

Speziell für $f(x, y)$ der Form $f(x+y)$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\begin{aligned} \langle T \otimes S, f(x+y) \rangle &= \int dz f(z) \int dx T(x) S(z-x) \\ &= \langle T * S, f \rangle. \end{aligned}$$

Dies legt die folgende Konstruktion nahe.

Sind jetzt $T, S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, wobei \mathcal{S} einen kompakten Träger hat, so ist das folgende lineare Funktional auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ wohldefiniert:

$$f \mapsto \langle T \otimes S, f(x+y) \eta(y) \rangle, \quad (*)$$

wobei η eine C^∞ -Funktion mit kompaktem Träger ist, welche in einer Umgebung des Trägers von \mathcal{S} gleich 1 ist. Tatsächlich ist die rechte Seite sinnvoll, da $f(x+y) \eta(y)$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ ist.

Es ist nicht schwierig, folgendes zu zeigen [siehe

Wladimirov, loc. cit., § 7.4, 5, § 8.6]:

(i) Das lineare Funktional ist stetig auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,
wir bezeichnen es mit $T * S$, wobei

$$\langle T * S, f \rangle = \langle T \otimes S, f(x+y) \eta(y) \rangle. \quad (66)$$

(ii) $T * S$ hängt nicht von der speziellen Wahl
von η ab.

$$(iii) \quad T * S = S * T.$$

$$(iv) \quad \mathcal{D}'(T * S) = (\mathcal{D}'T) * S + T * (\mathcal{D}'S). \quad (67)$$

Aus (66) folgt sofort die wichtige Eigenschaft:

$$T * \delta = \delta * T = T. \quad (68)$$

Ist S speziell eine reguläre Distribution (Funktion),
so stimmt die Definition (66) mit derjenigen in Abschnitt
überein (Übungsaufgabe).

VII. Fundamentallösungen von partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, Anfangs- und Randwertprobleme

Wir untersuchen im folgenden Differentialoperatoren der Form

$$L(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha, \quad a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (1)$$

Insbesondere interessieren wir uns für distributive Lösungen $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ von

$$L(x, D)T = U, \quad U \in \mathcal{S}'(\text{gegeben}). \quad (2)$$

Speziell wichtig sind die sog. Grundlösungen, oder Fundamentallösungen des Operators $L(x, D)$. Dies sind Lösungen von

$$L(x, D)G = \delta. \quad (3)$$

Im allgemeinen ist G durch diese Gleichung nicht eindeutig bestimmt, da man immer eine Lösung der homogenen Gleichung $L(x, D)G_0 = 0$ addieren kann (falls eine solche existiert).

Mit einer Fundamentallösung G findet man auch Lösungen der Gleichung (2), wenn die rechte Seite genügend eingeschränkt wird. Sei nämlich $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ so, dass die Faltung mit G existiert (siehe VI, S. 12), so gilt

$$L(x, D)(G * S) = (L(x, D)G) * S = \delta * S = S. \quad (4)$$

In der Klasse der Distributionen, die sich mit G falten lassen besitzt außerdem

$$L(D)T = S$$

höchstens eine Lösung. Dazu genügt es nachzuweisen, dass die homogene ~~Lösung~~ Gleichung $L(D)T = 0$ in dieser Klasse nur die triviale Lösung besitzt. Dies folgt aber aus

$$T = T * \delta = T * L(D)G = (L(D)T) * G = 0 * G = 0.$$

1. Beispiele von Fundamentallösungen

1) Die Fundamentallösung des Laplace-Operators

Hier ist $L(D) = \Delta = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2$. Wir bestimmen die Fundamentallösungen mit Hilfe der Fourier-Transformation. Wendet man die Fourier-Transformation auf

$$\Delta G = \delta \tag{5}$$

an, so ergibt sich $-|p|^2 F[G] = 1$. Eine (!) Lösung für $n \geq 3$ ist

$$F[G] = -\frac{1}{|p|^2}. \tag{6}$$

Beachte, dass $|p|^{-2}$ für $n \geq 3$ lokal integrierbar ist.

Für die Rückwärts-Transformation behalten wir zunächst

$n \geq 3$:

$$\langle F^{-1}\left[\frac{1}{|p|^2}\right], f \rangle = \left\langle \frac{1}{|p|^2}, F^{-1}[f] \right\rangle = \int \frac{1}{|p|^2} F^{-1}[f] dp^n$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|p| \leq R} \frac{1}{|p|^2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i(p,x)} \frac{dx}{(2\pi)^n} dp^n$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \int_{|p| \leq R} \frac{e^{-i(p,x)}}{|p|^2} dp d^3x \quad -\text{VII.3}-$$

$$= 2\pi \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} f(x) \int_0^R \int_{-1}^{+1} e^{-i|x| \cdot |p| \cdot \mu} d\mu dp d^3x \quad (2\pi)^3$$

$\underbrace{\int_{-1}^{+1} e^{-i|x| \cdot |p| \cdot \mu} d\mu}_{2 \cdot \frac{\sin(|x||p|)}{|x||p|}}$

$$= 4\pi \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(x)}{|x|} \int_0^R \frac{\sin|x|\rho}{\rho} d\rho d^3x \quad (*)$$

Da

$$|x| \left| \int_R^\infty \frac{\sin|x|\rho}{\rho} d\rho \right| = \left| \frac{\cos|x|R}{R} - \int_R^\infty \frac{\cos|x|\rho}{\rho^2} d\rho \right|$$

$$\leq \frac{1}{R} + \int_R^\infty \frac{d\rho}{\rho^2} = \frac{2}{R}$$

geht, dürfen wir in (*) den Grenzübergang $R \rightarrow \infty$ unter dem Integral ausführen und erhalten also mit Neb. 3.1

$$(2\pi)^3 \langle F^{-1}[\frac{1}{|p|^2}], f \rangle = \langle F[\frac{1}{|p|^2}], f \rangle = 4\pi \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(x)}{|x|^2} |x| \int_0^\infty \frac{\sin|x|\rho}{\rho} d\rho d^3x$$

$$= 2\pi^2 \int \frac{f(x)}{|x|} d^3x$$

und somit

$$\boxed{F[\frac{1}{|p|^2}] = \frac{2\pi^2}{|x|} \quad (n=3).} \quad (7)$$

Aus (6) und (7) erhalten wir für die Fundamentallösung

$$\boxed{G(x) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|} \quad (n=3).} \quad (8)$$

In höheren Dimensionen
~~Satz 7~~ findet man (s. Übungen)

$$G(x) = - \frac{1}{(n-2) \omega_n |x|^{n-2}}, \quad n \geq 3, \quad (9)$$

mit

$$\omega_n = \text{vol}(S^{n-1}) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}.$$

Interessant ist auch der Fall $n=2$. ^{Eine Lösung} ~~Dafür folgt aus der~~
 ersten Gleichung von (6) ist

$$F[G] = - \mathcal{F} \frac{1}{|p|^2}. \quad (10)$$

In der Tat gilt ^{*} für $f \in \mathcal{S}$:

$$\begin{aligned} \langle |p|^2 \mathcal{F} \frac{1}{|p|^2}, f \rangle &= \langle \mathcal{F} \frac{1}{|p|^2}, |p|^2 f \rangle = \int_{|p|>1} f(p) d^2p + \\ &+ \int_{|p|\leq 1} \frac{|p|^2 f(p) - |p|^2 f(p)}{|p|^2} \Big|_{p=0} d^2p = \int_{\mathbb{R}^2} f(p) d^2p = \langle 1, f \rangle. \end{aligned}$$

Durch Fourier-Inversion erhalten wir (s. unten)

$$G = \frac{1}{2\pi} \ln|x| + \frac{C_0}{2\pi} \quad (11)$$

mit

$$C_0 = \int_0^1 \frac{1 - J_0(u)}{u} du - \int_1^\infty \frac{J_0(u)}{u} du, \quad J_0: \text{Bessel-Funktion}.$$

* Unter $\mathcal{F}(\frac{1}{|x|^2})$ verstehen wir

$$\langle \mathcal{F}(\frac{1}{|x|^2}), f \rangle = \int_{|x|<1} \frac{f(x) - f(0)}{|x|^2} dx + \int_{|x|>1} \frac{f(x)}{|x|^2} dx, \quad f \in \mathcal{S}.$$

-VII.5-

Übung : Bestimmung der Fourier-Transformation von $\mathcal{F} \frac{1}{|x|^2}$. Für alle $f \in \mathcal{S}$ gilt:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F} \left[\mathcal{F} \frac{1}{|x|^2} \right], f \rangle &= \langle \mathcal{F} \frac{1}{|x|^2}, \mathcal{F}[f] \rangle \\ &= \int_{|x| < 1} \frac{\mathcal{F}[f](x) - \mathcal{F}[f](0)}{|x|^2} dx^2 + \int_{|x| > 1} \frac{\mathcal{F}[f](x)}{|x|^2} dx^2 \\ &= \int_{|x| < 1} \frac{1}{|x|^2} \int_{\mathbb{R}^2} f(p) (e^{i(p,x)} - 1) dp dx^2 + \int_{|x| > 1} \frac{1}{|x|^2} \int_{\mathbb{R}^2} f(p) e^{i(p,x)} dp dx^2 \\ &= \int_0^1 \frac{dr}{r} \int_{\mathbb{R}^2} f(p) \int_0^{2\pi} (e^{i r |p| \cos \varphi} - 1) d\varphi dr^2 \\ &\quad + \int_1^\infty \frac{dr}{r} \int_{\mathbb{R}^2} f(p) \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i r |p| \cos \varphi} \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{dr}{r} \int_{\mathbb{R}^2} f(p) \sqrt{r} [J_0(r|p|) - 1] + 2\pi \int_1^\infty \frac{dr}{r} \int_{\mathbb{R}^2} f(p) J_0(r|p|). \end{aligned}$$

Dabei ist J_0 die Besselfunktion zum Index 0:

$$J_0(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i u \cos \varphi} d\varphi.$$

Durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge kommt

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F} \left[\mathcal{F} \frac{1}{|x|^2} \right], f \rangle &= 2\pi \int_{\mathbb{R}^2} f(p) \left[\int_0^1 \frac{J_0(r|p|) - 1}{r} dr + \int_1^\infty \frac{J_0(r|p|)}{r} dr \right] \\ &= 2\pi \int_{\mathbb{R}^2} f(p) \left[\int_0^{|p|} \frac{J_0(u) - 1}{u} du + \int_{|p|}^\infty \frac{J_0(u)}{u} du \right] \\ &= -2\pi \int_{\mathbb{R}^2} f(p) [C_0 + \ln |p|], \quad \text{d.h. es gilt } \mathcal{F} \left[\mathcal{F} \frac{1}{x^2} \right] = \underline{\underline{-2\pi \ln |p| - 2C_0}}. \end{aligned}$$

Nun beweisen wir den folgenden

Satz: Es sei $U \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $u \geq z$, eine Distribution mit kompaktem Träger. Dann ist jede distributive Lösung aus $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ von $\Delta T = U$ von der Form

$$T = G * U + P, \quad (12)$$

wobei P ein harmonisches Polynom ist.

Beweis: Es bleibt zu zeigen, dass jede Distribution V aus $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ mit $\Delta V = 0$ ein harmonisches Polynom ist. Nun folgt aber durch Fouriertransformation $0 = F^{-1}[\Delta V] = -|p|^2 F^{-1}[V]$. Ist V nicht die Nulldistribution, so ergibt sich, dass der Träger von $F^{-1}[V]$ nur aus dem Nullpunkt besteht. Dann folgt aber die Behauptung sofort aus § VI. 11. \square

2) Die Fundamentallösung des Operators der Wärmeleitung

Durch Fouriertransformation bezüglich der räumlichen Variablen der Gleichung

$$\partial_t G - \Delta G = \delta(x, t) \quad (13)$$

erhalten wir sofort

$$F_x[\partial_t G] + |p|^2 F_x[G] = 1(p) \cdot \delta(t). \quad (14)$$

Diese Gleichung lässt sich leicht lösen. Wir erhalten für $\tilde{G}(p, t) := F_x[G](p, t)$

$$\tilde{G}(p, t) = \theta(t) e^{-|p|^2 t}, \quad (15)$$

Wie man sofort verifiziert. Für die Rücktransformation dieser Lösung in \mathcal{L}' erhalten wir mit (V.3.25)

$$\begin{aligned} G(x,t) &= \mathcal{F}_p^{-1} [\tilde{G}(p,t)] \\ &= \theta(t) (2\pi)^{-n} \int e^{-|p|^2 t} e^{-i(p,x)} d^n x \\ &= \theta(t) \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/4t} \end{aligned}$$

Wir halten das Resultat fest

$$\boxed{G(x,t) = \theta(t) (4\pi t)^{-n/2} e^{-|x|^2/4t}} \quad (16)$$

Ist z.B. $u(x,t)$ eine integrierbare Funktion mit kompaktem Träger, so ist $T = G * u$ explizit

$$T = \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-|x-y|^2/4(t-\tau)}}{(t-\tau)^{n/2}} \cdot u(y,\tau) d^n y d\tau \quad (17)$$

und erfüllt natürlich

$$\partial_t T - \Delta T = u \quad (18)$$

3) Fundamentallösungen des Wellenoperators

Hier ist $L(\square) = \square := \partial_t^2 - \Delta$. Auf die definierende Gleichung

$$\square G = \delta \quad (19)$$

wenden wir wieder die partielle Fouriers Transformation an.

Für $\tilde{G}(k,t) = F_x[G]$ ergibt sich

$$\partial_t^2 \tilde{G}(k,t) + |k|^2 \tilde{G}(k,t) = 1(k) \cdot \delta(t). \quad (20)$$

Eine(!) Lösung in \mathcal{S}' ist

$$\tilde{G}(k,t) = \theta(t) \frac{\sin(|k|t)}{|k|}, \quad (21)$$

wie man leicht verifiziert. Somit ist $G \in \mathcal{S}'$ gegeben durch

$$G(x,t) = \theta(t) F_k^{-1} \left[\frac{\sin(|k|t)}{|k|} \right]. \quad (22)$$

Unten zeigen wir, dass für $n=3$

$$F[\delta(|x|-R)] = 4\pi R \frac{\sin |k|R}{|k|} \quad (n=3). \quad (23)$$

daraus ergibt sich (siehe auch (20) unten):

$$G(x,t) = \frac{1}{4\pi |x|} \theta(t) \delta(|x|-t) \quad (n=3). \quad (24)$$

Zum Beweis von (23) benötigen wir das folgende

Lemma: Es sei $T \in \mathcal{S}'$ mit kompaktem Träger. Dann gehört ihre Fourier-Transformierte zur Klasse Θ_n (vgl. S. VI.4) und wird durch die Formel

$$F[T](k) = \langle T(x), \eta(x) e^{i(k,x)} \rangle \quad (25)$$

*) Bemerkung zur partiellen Fouriertransf.: Es sei $T(x,y) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$, $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$. $F_x[T]$ bezüglich x ist so definiert: $\langle F_x[T], f \rangle = \langle T, F_k[f] \rangle$. Da $F_k[f]$ eine stetige Abbildung von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$ nach $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$ ist, ist $F_x[T]$ aus $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$.

dargestellt. Dabei ist η eine C^∞ -Funktion mit kompaktem Träger mit dem Wert 1 in einer Umgebung des Trägers von T .

Beweis: Zunächst ist

$$\begin{aligned}\langle F[T], f \rangle &= \langle T, F[f] \rangle = \langle T, \eta(x) F[f] \rangle \\ &= \langle T(x), \underbrace{\int \eta(x) f(k) e^{i(k,x)} d^n k}_{\in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})} \rangle.\end{aligned}$$

Da allgemein $T \otimes 1 = 1 \otimes T$, d.h., für $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n+m})$

$$\langle T, \int g(x, y) d^m y \rangle = \int \langle T(x), g(x, y) \rangle d^m y$$

gilt, ist damit

$$\langle F[T], f \rangle = \int \langle T, \eta(x) e^{i(k,x)} \rangle f(k) d^n k.$$

Dies beweist (25). Ebenso findet man

$$D^\alpha F[T](k) = \langle T(x), \eta(x) (ix)^\alpha e^{i(k,x)} \rangle. \quad (26)$$

(Dies reduziert sich auf (25) für $\alpha = 0$.) Aus dieser Darstellung kann man folgern^{*)}, dass $F[T]$ aus $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist. Ferner existieren nach dem Lemma von L. Schwartz Zahlen $C > 0$ und $p \geq 0$ derart, dass $|T(f)| \leq C \|f\|_p$. Wendet man dies auf die rechte Seite von (26) an, so ergibt sich

$$|D^\alpha F[T](k)| = |\langle T, \eta(x) (ix)^\alpha e^{i(k,x)} \rangle| \leq C \|\eta(x) (ix)^\alpha e^{i(k,x)}\|_p$$

^{*)} Siehe dazu das Lemma in Vladimirov, loc. cit., p. 95.

$$= C \sup_{|p| \leq P, x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^P) |\mathcal{F}[\eta(x) x^\alpha e^{i(k,x)}]|$$

$$\leq C_\alpha (1 + |k|^P);$$

hieraus folgt $\mathcal{F}[T] \in \mathcal{O}_M$, womit das Lemma bewiesen ist. \square

Herleitung von (23):

Wir betrachten (25) speziell für $\delta(|x| - R)$:

$$\mathcal{F}[\delta(|x| - R)](k) = \langle \delta(|x| - R), \eta(x) e^{i(k,x)} \rangle$$

$$= \int_{S^2_R} \eta(x) e^{i(k,x)} \underbrace{d\sigma_x}_{R^2 d\Omega_x} = R^2 \int_{S^2} e^{iR(k, \hat{x})} d\Omega_{\hat{x}}$$

$$= R^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{iR|k|\cos\theta} \sin\theta d\theta d\varphi = 4\pi R \frac{\sin(|k|R)}{|k|}.$$

* * *

Für $n=2$ betrachten wir die Methode der Reduktion bezüglich der Variablen x^3 . Diese besteht in folgendem. Zunächst ist zu zeigen, dass G_3 (Gl. (24)) auf Testfunktionen der Gestalt $f(x,t) 1(x_3)$, $x = (x_1, x_2)$, gemäss

$$\langle G_3(x, x_3, t), f(x,t) 1(x_3) \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle G_3(x, x_3, t), f(x,t) \eta_k(x_3) \rangle, \quad (27)$$

beliebiger Folge mit $\eta_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und $\eta_k \xrightarrow{\mathbb{R}} 1$, festgesetzt werden kann.

Es ist dann naheliegend, dass G_2 durch

$$\langle G_2, f \rangle = \langle G_3, f(x,t) 1(x_3) \rangle \quad (28)$$

gegeben ist (Übung; vgl. Wladimirow, §10.4).

Zur Überprüfung von (27) sei also $\eta_k \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^1)$, und $\eta_k(x_3)$ konvergiere in \mathbb{R} gegen 1. Da nach (24) für eine beliebige Testfunktion $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^4)$

$$\begin{aligned} \langle G_3, f \rangle &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty (\delta_{S_t^2}, f) \frac{dt}{t} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{1}{t} \int_{S_t^2} f(x, t) d\sigma_x dt \end{aligned} \quad (29)$$

so erhalten wir für die rechte Seite von (27)

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \langle G_3, f(x, t) \eta_k(x_3) \rangle &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{1}{t} \int_{S_t^2} f(x, t) \eta_k(x_3) d\sigma_x dt \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{1}{t} \int_{S_t^2} f(x, t) d\sigma_x dt = \langle G_3, f(x, t) 1(x_3) \rangle. \end{aligned}$$

Dieser Grenzwert existiert also, ist unabhängig von der Folge η_k und definiert ein stetiges Funktional auf $\mathcal{F}(\mathbb{R}^3)$. Damit können wir (28) anwenden

$$\langle G_2, f \rangle = \langle G_3, f(x, t) 1(x_3) \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{1}{t} \int_{S_t^2} f(x, t) d\sigma_x dt, \quad f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^3). \quad (30)$$

Das letzte Integral können wir nun umformen, da f nicht von x_3 abhängt. In den Übungen werden wir sehen, dass

$$\begin{aligned} \langle G_2, f \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{|x| \leq t} \frac{f(x, t)}{\sqrt{t^2 - |x|^2}} dx dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\theta(t - |x|)}{\sqrt{t^2 - |x|^2}} f(x, t) dx dt. \end{aligned} \quad (31)$$

Hieraus folgt

$$\boxed{G_2(x, t) = \frac{\theta(t - |x|)}{2\pi \sqrt{t^2 - |x|^2}} \quad (32)}$$

Durch eine weitere Reduktion (Integration über x_2) findet man (wie in den Übungen gezeigt wird)

$$G_1(x, t) = \frac{1}{2} \theta(t - |x|). \quad (33)$$

Natürlich lässt sich die Richtigkeit dieser Formel (wie auch von (32)) auch leicht direkt verifizieren (vgl. Wladimirov, p. 91).

4) Fundamentallösung des Helmholtz-Operators

Unter diesem Operator verstehen wir $\Delta + k^2$, $k \in \mathbb{C}$.
In den Übungen werden wir zeigen, dass für $u=3$

$$G_3(x) = - \frac{e^{\pm i k |x|}}{4\pi |x|} \quad (34)$$

Fundamentallösungen sind. (Für eine direkte Verifikation siehe Wladimirov, § 6.5, e.)

* * *

2. Das Cauchyproblem für die Wärmeleitungsgleichung

Wir betrachten zuerst die klassische Cauchy Aufgabe:

$$\partial_t u - \Delta u = f, \quad (35)$$

$$u|_{t=0} = u_0, \quad u_0 \in C(\mathbb{R}^n), \quad f \in C(t \geq 0),$$

welche wir bereits in §V.3 gelöst haben. Im Hinblick auf die distributive Verallgemeinerungen, formulieren wir dieses Problem noch etwas um. Wir setzen u und f für $t < 0$ mit dem Wert Null fort und erhalten wir die so fortgesetzten Funktionen \tilde{u} und \tilde{f} in \mathbb{R}^{n+1} die Gleichung

$$\partial_t \tilde{u} - \Delta \tilde{u} = \tilde{f} + u_0(x) \cdot \delta(t). \quad (36)$$

In dieser Formulierung übernimmt die Anfangsverteilung u_0 die Rolle einer zusätzlichen Quelle $u_0(x) \delta(t)$, welche nur momentan wirkt.

Dies legt die folgende Definition nahe: Es sei $U_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ mit dem Träger $\text{Tr} F \subset \overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$. Als Lösung des Cauchyproblems für die Wärmeleitungsgleichung bezeichnen wir jede Distribution $U \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ mit $\text{Tr} U \subset \overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$ für welche gilt

$$\partial_t U - \Delta U = F + U_0 \otimes \delta. \quad (37)$$

wohere: $\text{supp} \equiv \text{Tr}$

Wählen wir U_0 und F mit kompaktem Träger, so ist sicher

$$U = G * (F + U_0 \otimes \delta), \quad (38)$$

mit G in (16) eine Lösung dieses Cauchyproblems.

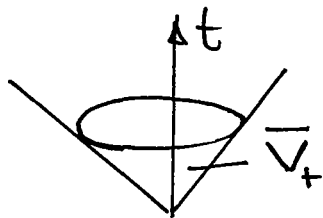
Werkwurdigerweise ist diese Lösung nicht die einzige. Es gibt z. B. regulare^{*} nicht identisch verschwindende Distributionen, die das Cauchyproblem mit $F=0$ und $U_0=0$ lösen. Sind sämtliche am Cauchyproblem beteiligten Distributionen regulär, so kann man durch Zusatzforderungen an das Wachstum für $|x| \rightarrow \infty$ und $t \rightarrow \infty$ Eindeutigkeit erzwingen. (Siehe dazu: A. Friedman: Partial differential equations of parabolic type. Prentice-Hall, 1964.)

Im klassischen Fall (35) gibt (38) wieder die Lösung, welche wir schon in § V.3 gefunden haben.

3. Das Cauchyproblem für die Wellengleichung

A. Retardiertes Potential

Aus (24) und (32) folgt, dass der Träger von G_2 mit der abgeschlossenen Hülle des Lichtkegels der Zukunft,



$V_+ = \{(t, x) : t \geq |x|\}$ übereinstimmt, während der Träger von G_2 der Rand ∂V_+ dieses Kegels ist. Dies hat wichtige physikalische Implikationen, wie wir sehen werden.

* Unter einer regulären Distribution versteht man eine Distribution vom Typ einer Funktion $\varphi \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) = \{ \text{Menge der Funktionen, welche in jeder abgeschlossenen und beschränkten Teilmenge von } \mathbb{R}^n \text{ integrierbar sind} \}$:

$$\langle T_\varphi, f \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) f(x) dx.$$

Wir zeigen nun, dass die Fundamentallösungen G_2, G_3 bezüglich der Zeitvariablen t im Intervall $[0, \infty)$ der Klasse C^∞ angehören und für $t \rightarrow +0$ die Limesrelationen

$$G_n(x, t) \rightarrow 0, \quad \partial_t G_n(x, t) \rightarrow \delta(x), \quad \partial_t^2 G_n(x, t) \rightarrow 0, \quad (39)$$

in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ erfüllen.

Was damit gemeint ist, muss noch etwas präzisiert werden. Sei allgemein $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ und $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Unter $\langle T(x, t), f(x) \rangle$ verstehen wir die Distribution aus $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ für die

$g \mapsto \langle \dots \rangle$ ist Element von $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

$$\langle \langle T(x, t), f(x) \rangle, g \rangle = \langle T, f \otimes g \rangle, \quad g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad (40)$$

gilt. Aus dieser Definition folgt

$$\langle \frac{\partial^k T}{\partial t^k}(x, t), f(x) \rangle = \frac{d^k}{dt^k} \langle T(x, t), f(x) \rangle. \quad (41)$$

Dies ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \langle \langle \frac{\partial^k T}{\partial t^k}(x, t), f(x) \rangle, g \rangle &\stackrel{(40)}{=} \langle \frac{\partial^k T}{\partial t^k}, f \otimes g \rangle = (-1)^k \langle T, f \otimes \frac{d^k g}{dt^k} \rangle \\ &\stackrel{(40)}{=} (-1)^k \langle \langle T(x, t), f(x) \rangle, \frac{d^k g}{dt^k} \rangle = \langle \frac{d^k}{dt^k} \langle T(x, t), f(x) \rangle, g \rangle. \end{aligned}$$

Man sagt nun, die Distribution $T(x, t)$ gehöre bezüglich der Variablen t in (a, b) oder $[a, b]$ zur Klasse C^p , $0 \leq p \leq \infty$, wenn für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ die Distribution $\langle T(x, t), f(x) \rangle$ zu $C^p(a, b)$ bzw. $C^p([a, b])$ gehört.*

*) Eine verallgemeinerte Funktion gehört zur Klasse C^p , wenn sie mit einer Funktion der Klasse C^p übereinstimmt.

Wir beweisen nun die obigen Behauptungen für G_n .

Sei $n=3$, $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^3)$. Dann folgt aus (29) die Formel ($\hat{x} := x/|x|$):

$$\langle G_3(x,t), f(x) \rangle = \frac{\theta(t)}{4\pi t} \int_{S_t^2} f(x) d\Omega_x = \frac{\theta(t)t}{4\pi} \int_{S^2} f(t\hat{x}) d\Omega_{\hat{x}}. \quad (42)$$

Da die rechte Seite bezüglich t beliebig oft differenzierbar ist, gehört G_3 bezüglich t tatsächlich der Klasse C^∞ an. Außerdem ergibt sich die erste Beziehung von (39). Für die zweite Beziehung von (39) benutzen wir (41) für $T=G_3$ und $k=1$ bei $t \rightarrow +0$:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial G_3}{\partial t}(x,t), f(x) \right\rangle &= \frac{d}{dt} \left[\frac{t}{4\pi} \int_{S^2} f(t\hat{x}) d\Omega_{\hat{x}} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} f(t\hat{x}) d\Omega_{\hat{x}} + \frac{t}{4\pi} \frac{d}{dt} \int_{S^2} f(t\hat{x}) d\Omega_{\hat{x}} \rightarrow f(0) = \langle \delta, f \rangle. \end{aligned} \quad (43)$$

Für $k=2$ ergibt sich sofort

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial^2 G_3}{\partial t^2}(x,t), f(x) \right\rangle &= \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \int_{S^2} f(t\hat{x}) d\Omega_{\hat{x}} + \frac{t}{4\pi} \frac{d^2}{dt^2} \int_{S^2} f(t\hat{x}) d\Omega_{\hat{x}} \\ &\rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow +0; \end{aligned} \quad (44)$$

denn $t \mapsto \int_{S^2} f(t\hat{x}) d\Omega_{\hat{x}}$ ist bezüglich t gerade und unendlich oft differenzierbar, so dass ihre erste Ableitung bei $t=0$ gerade Null ist.

Für $n=2$ ist nach (31) für $t > 0$

$$\langle G_2(x,t), f(x) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{|x| \leq t} \frac{f(x)}{\sqrt{t^2 - |x|^2}} dx = \frac{t}{2\pi} \int_{|y| \leq 1} \frac{f(ty)}{\sqrt{1 - y^2}} dy. \quad (45)$$

Hieraus folgen wie für $u=3$ die obigen Behauptungen.

Für eine Testfunktion $u(x,t)$ ist nach §VI.7 und (24) (Übung)

$$G_3 * u = \frac{1}{4\pi} \int \frac{u(y, t - |x-y|)}{|x-y|} d\vec{y}. \quad (46)$$

Die rechte Seite ist natürlich auch für jedes $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$ sinnvoll. Faltungen $G_n * U$ lassen sich für relativ allgemeine $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)$ definieren. Dies wird im Buch von Wladimirow ausgeführt (speziell in §11.2). Wir gehen darauf nicht näher ein. Für eine reguläre Distribution $U = u(x,t)$ ist aber erwartungsgemäss $G_3 * U$ durch die Formel (46) gegeben.

§. Lösung des Cauchyproblems

Das klassische Anfangswertproblem für die Wellengleichung lautet folgendermassen. Es seien drei Funktionen $g(x,t)$, $u_0(x)$ und $u_1(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, gegeben. Wir setzen voraus, dass g im Halbraum $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{(x,t) : x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0\}$ stetig, u_0 in \mathbb{R}^n stetig differenzierbar und u_1 in \mathbb{R}^n stetig ist. Gesucht ist eine im Gebiet $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{(x,t) : x \in \mathbb{R}^n, t > 0\}$ zweimal stetig differenzierbare und im Halbraum \mathbb{R}^{n+1}_+ stetig differenzierbare Funktion $u(x,t)$ mit

$$\begin{aligned} \square u &= g, \\ u(x,0) &= u_0(x), \quad \partial_t u(x,0) = u_1(x). \end{aligned} \quad (47)$$

Wie schon bei der Wärmeleitungsgleichung formulieren wir

dieses Problem um. Die Funktionen u und g werden mit dem Wert Null für $t < 0$ zu den Funktionen \tilde{u} und \tilde{g} fortgesetzt. Dann gilt als Folge von (47)

$$\square \tilde{u} = \tilde{g} + u_0(x) \cdot \delta'(t) + u_1(x) \cdot \delta(t). \quad (48)$$

In der Tat ist für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$

$$\langle \square \tilde{u}, f \rangle = \langle \tilde{u}, \square f \rangle = \int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}^n} d^4x \, u \underbrace{\square f}_{\partial_t^2 f - \Delta f}$$

$$= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left[\int_\epsilon^\infty dt \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_t^2 u - \Delta u) f \right]$$

(partielle Integ.)
$$- \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t f(x, \epsilon) u(x, \epsilon) d^4x + \int_{\mathbb{R}^n} f(x, \epsilon) \partial_t u(x, \epsilon) d^4x$$

$$= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} g f d^4x dt - \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t f(x, 0) u(x, 0) d^4x + \int_{\mathbb{R}^n} f(x, 0) \partial_t u(x, 0) d^4x$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \tilde{g} f d^4x dt - \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) \partial_t f(x, 0) d^4x + \int_{\mathbb{R}^n} u_1(x) f(x, 0) d^4x$$

$$= \langle \tilde{g} + u_0(x) \cdot \delta'(t) + u_1(x) \cdot \delta(t), f \rangle.$$

Wieder übernehmen die Anfangsbedingungen die Rolle von zusätzlichen Quellen, die momentan bei $t=0$ wirken.

Die verallgemeinerte Cauchy Aufgabe kann nun so formuliert werden:

Es sei $U_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $U_1 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ mit $\text{Tr} F \subset \overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$. Als Lösung des Cauchyproblems bezeichnen wir jede Distribution $U \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ mit $\text{Tr} U \subset \mathbb{R}_+^{n+1}$ und

$$\square U = F + U_0 \otimes \delta' + U_1 \otimes \delta. \quad (49)$$

Sind U_0, U_1 und F reguläre Distributionen, so kann man umgekehrt zeigen^{*)}, dass diese Formulierung äquivalent zum klassischen Anfangswertproblem ist.

Man kann auch zeigen, dass die Faltung von G_n mit der rechten Seite von (49) wohldefiniert ist. Damit ist nach (4)

$$U = G_n * (F + U_0 \otimes \delta' + U_1 \otimes \delta) \quad (50)$$

eine Lösung des Cauchyproblems. Ferner ist, nach dem was im Anschluss an (4) ausgeführt wurde, dies auch die einzige Lösung. (Jede Lösung des Cauchyproblems lässt sich mit G_n falten.)

Nun wollen wir nach (50) für reguläre Distributionen explizite aus. Wir zeigen, dass für $U_0 = u_0(x)$, $U_1 = u_1(x)$, $F = f(x, t)$, $T_+ F \subset \mathbb{R}_+^{n+1}$ die Lösung des ~~dreidimensionalen~~ Cauchyproblems (50) gegeben ist durch

$$\boxed{u = G_n * f + G_n(x, t) * u_1(x) + \partial_t G_n(x, t) * u_0(x).} \quad (51)$$

Dabei erfordern uns die beiden letzten Terme eine nähere Begründung. Ist einmal gezeigt, dass

$$G_n * (U_1 \otimes \delta) = G_n(x, t) * u_1(x) \quad (52)$$

gilt, so folgt auch mit bekannten Regeln

*) Siehe, z.B., H. Triebel: "Höhere Analysis", Verlag Harri Deutsch, 1980; Lemma 15.1.

$$G_n * (U_0 \otimes \delta') = G_n * \partial_t (U_0 \otimes \delta) = \partial_t [G_n * (U_0 \otimes \delta)]$$

$$\stackrel{(52)}{=} \partial_t [G_n(x,t) * u_0] = [\partial_t G_n(x,t)] * u_0(x),$$

d.h. der letzte Term in (51).

Ein Physiker wird sich mit (52) nicht lange aufhalten. Sie werden formal folgendermassen argumentieren:

$$G_n * (U_1 \otimes \delta)(x,t) \stackrel{''}{=} \int G_n(x-x', t-t') \underbrace{(U_1 \otimes \delta)(x', t')}_{u_1(x') \delta(t')} dx' dt'$$

$$\stackrel{''}{=} \int G_n(x-x', t) u_1(x') dx' = G_n(x,t) * u_1(x).$$

(nach "Integration" über t')

Solche von uns dauernd getätigten Manipulationen sind natürlich mathematisch unhaltbar, führen aber "immer" zum richtigen Ergebnis. Für unser Problem findet man eine mathematische korrekte Begründung von (52) z.B. in Wladimirov, §11.2. Interessierte werden feststellen, dass dabei einiger Aufwand betrieben werden muss.

Dasselbe gilt auch für die explizite Auswertung der Faltungen in (51). Auch hier verweise ich für eine stenge Version auf Wladimirov, §11.34. Wiederum möchte ich mit den folgenden Bedingungen zu einem formalen Vorgehen ermuntern. (Man kann später notfalls immer noch verifizieren, dass das Ergebnis in Ordnung ist.)

Für $n=3$, mit (s. Gl. (24))

$$G_3(x,t) = \frac{1}{4\pi|x|} \theta(t) \delta(|x|-t),$$

verläuft dies folgendermassen:

$$\begin{aligned}
 (G_3 * f)(x, t) & \stackrel{''}{=} \frac{1}{4\pi} \int_{||} \frac{\delta(|x-x'| - (t-t'))}{|x-x'|} f(x', t') d^3x' dt' \\
 & = \frac{1}{4\pi} \int_{|x-x'| \leq t} \frac{f(x', t - |x-x'|)}{|x-x'|} d^3x' \quad ; \quad \underline{\text{retardiertes Potential}} ;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_3(x, t) * u_1(x) & = \frac{1}{4\pi} \theta(t) \int \frac{\delta(|x-x'| - t)}{|x-x'|} u_1(x') d^3x' \\
 & = \frac{\theta(t)}{4\pi t} \int_{|x-x'|=t} u_1(x') d\sigma_{x'} ;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \partial_t G_3(x, t) * u_0(x) & = \partial_t [G_3(x, t) * u_0(x)] \\
 & = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\theta(t)}{t} \int_{|x-x'|=t} u_0(x') d\sigma_{x'} \right].
 \end{aligned}$$

Führen wir also für eine Funktion $u(x)$ die folgende Operation ein (sphärische Mittelbildung)

$$M_t(u)(x, t) := \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} u(x + tn) d\Omega_n \quad (53)$$

so erhalten wir für die Lösung (51) des Cauchyproblems ($t \geq 0$):

$$\left[u(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{|x-x'| \leq t} \frac{f(x', t - |x-x'|)}{|x-x'|} d^3x' + t M_t(u_1) + \frac{\partial}{\partial t} \left[t M_t(u_0) \right]. \right. \quad (54)$$

Man kann jetzt nachlässiger relativ leicht verifizieren, dass (54) tatsächlich das Cauchyproblem (47) (mit f statt g) löst. (Siehe dazu: R. Leis, "Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen, B.I 165/165a, Kap. X.) Dabei muss man aber annehmen, dass

$u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^3)$, $f \in C^2(\overline{\mathbb{R}_+^4})$ damit $u(x,t)$
~~regulär~~, d.h. eine Lösung des klassischen Cauchyproblems
ist.

Für $u=z$ findet man an Stelle von (54) auf ähnliche
Weise mit Hilfe von (32) für $t \geq 0$

$$\left\{ \begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^t \int_{|x-x'| \leq t-t'} \frac{f(x',t')}{\sqrt{(t-t')^2 - |x-x'|^2}} dx' dt' \\ &+ \tilde{M}_t(u_1) + \frac{\partial}{\partial t} \tilde{M}_t(u_0), \end{aligned} \right. \quad (55)$$

wobei hier die Mittelung definiert ist durch

$$\tilde{M}_t(h)(x,t) := \frac{1}{2\pi} \int_{|x-x'| \leq |t|} \frac{h(x')}{\sqrt{t^2 - |x-x'|^2}} dx'. \quad (56)$$

Damit u eine Lösung des klassischen Cauchyproblems
ist, müssen dieselben Annahmen für u_0, u_1 und f ge-
macht werden.

Man kann übrigens auch die Eindeutigkeit der
Lösungen (54) und (55) zeigen.

* * *

C. Wellenausbreitung

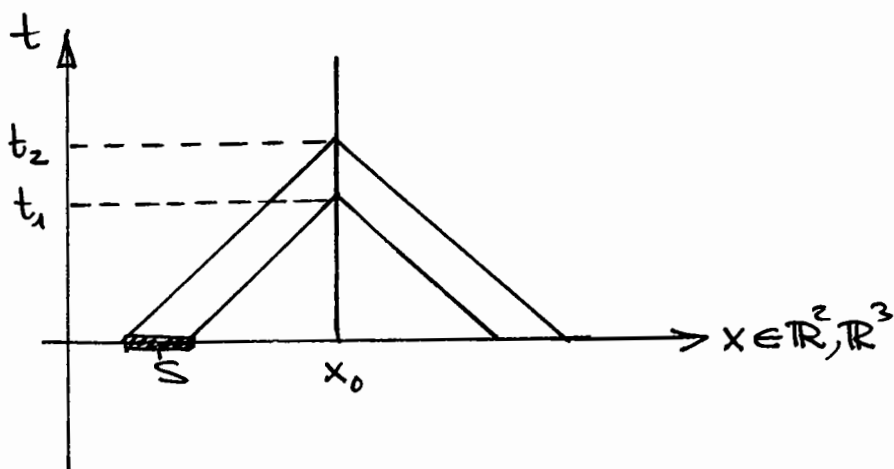
Wir betrachten nun die Lösungen (54) und (55) im homogenen Fall ($f=0$) etwas näher.

Für $u=2$ ist dann

$$u(x,t) = \tilde{M}_t(u_1) + \partial_t \tilde{M}_t(u_0) \quad (57)$$

und folglich ist der Wert von $u(x,t)$ bestimmt durch die Werte von $u_0(x)$ und $u_1(x)$ in $\{x' : |x-x'| \leq t^2\}$.

Im Falle $u=3$ ist dies ganz anders: Für $u(x,t)$ gehen uns die Werte auf der Kugeloberfläche $\{x' : |x-x'| \leq t^2\}$ ein. Diese Dimensionsabhängigkeit (sie setzt sich in höheren Dimensionen fort) hat sehr wichtige Konsequenzen. Es sei z.B. u_0, u_1 im Gebiet S der Fig. verschieden von Null. Wir wollen untersuchen, wie sich diese Störung fortpflanzt.



Im Punkt x_0 herrscht bis zur Zeit t_1 Ruhe. Dann setzt die Störung ein. Für $u=2$ ist diese noch beliebig lange zu spüren. (Natürlich nimmt die Intensität ab.) Ganz anders für $u=3$: für $t > t_2$ herrscht dann wieder Ruhe.

Man sagt, die Differentialgleichung habe die huygensche
Eigenschaft. Gottlob leben wir in einem ungeradzahigen
Raum, sonst fände nur Wellendiffusion statt und
der Lärm wäre gänzlich unerblicklich.

4. Eine Anfangs-Randwertaufgabe für die Wärmeleitung

Als Verallgemeinerung von § V.5 diskutieren wir nun noch das folgende Anfangs-Randwertproblem für ein beschränktes Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$:

Gesucht ist eine Lösung u der Wärmeleitungsgleichung

$$(\partial_t - \Delta)u = 0$$

in $G \times (0, \infty)$ mit $u \in C(\bar{G} \times [0, \infty)) \cap C^2(G \times (0, \infty))$

und

(i) für alle $t > 0$ und $x \in \partial G$ ist

$$u(x, t) = g(x) ;$$

(ii) für alle $x \in G$ ist $u(x, 0) = f(x)$.

Dabei sind f und g vorgegebene Funktionen mit $f|_{\partial G} = g$.

Die Aufgabe kann zunächst etwas vereinfacht werden. Dazu sei v eine Lösung der Dirichlet'schen Randwertaufgabe für das Gebiet G :

$$\Delta v = 0 \quad \text{in } G ;$$

$$v|_{\partial G} = g.$$

Falls der Rand ∂G glatt ist hat dieses Problem für $g \in C(\partial G)$ eine eindeutige Lösung. (Für den Existenzbeweis benötigt man die Theorie der Integralgleichungen;

siehe dazu Wadimitow, Kap. IV.)

Durch Übergang von u zu $u-v$ kann man deshalb homogene Randwerte ($g=0$) verlangen, was wir nun tun wollen.

Es ist leicht die Eindeutigkeit der Aufgabe zu beweisen. Dazu betrachten wir eine Lösung der homogenen Aufgabe ($f=0$) und zeigen, dass diese identisch verschwindet. Es sei

$$E(t) = \int_G (\nabla u)^2 dx^3 \geq 0. \quad (58)$$

Da u am Rand ∂G für alle t verschwindet, gilt

$$\begin{aligned} \dot{E}(t) &= 2 \int \nabla u \cdot \nabla u_{,t} dx^3 = -2 \int (\Delta u) u_{,t} dx^3 \\ &= -2 \int_G (u_{,t})^2 dx^3 \leq 0. \end{aligned}$$

Aus $E(0) = 0$ ($u(x,0) = 0$) folgt daher $E(t) \leq 0$ und deshalb mit (58) $E(t) = 0$. Deshalb ist $\nabla u = 0$, also $u(x,t) = u(t)$, und wegen der homogenen Randbedingung erhalten wir in der Tat $u = 0$ in $G \times (0, \infty)$.

Zur Gewinnung einer Lösung machen wir zunächst einen Separationsansatz

$$u(x,t) = T(t)v(x) \quad (59)$$

und erhalten

$$\frac{\dot{T}}{T} = \frac{\Delta v}{v} = \text{const} =: -\lambda.$$

Dies zeigt, dass

$$\Delta v + \lambda v = 0, \quad v|_{\partial G} = 0; \quad \dot{T} + \lambda T = 0. \quad (60)$$

Die zweite Gleichung gibt $T(t) = e^{-\lambda T}$. Die Werte von λ sind aber Eigenwerte des Operators $-\Delta$ im Gebiet G mit Dirichlet'schen Randbedingungen. Dafür gibt es eine vollkommene Theorie, nach der folgendes gilt:

Diese Randwertaufgabe besitzt eine Folge $\{\lambda_n\}$ von Eigenwerten und zugehörigen Eigenfunktionen v_n mit $\lambda_n \rightarrow \infty$. Ausserdem lässt sich jede Funktion $h \in C^\#(G)$ mit $h|_{\partial G} = 0$ in eine absolut und gleichmässig konvergente Reihe nach den Eigenfunktionen entwickeln, wenn h genügend oft differenzierbar ist:

$$h(x) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i v_i(x), \quad h_i = \int_G h(x) v_i(x) dx. \quad (61)$$

Witkin konvergiert die Reihe

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} h_n v_n(x) \quad (62)$$

für alle $t \geq 0$ absolut und gleichmässig gegen eine Funktion $u(x,t)$ und es gilt

$$u(x,t) = 0, \quad x \in \partial G$$

$$u(x,0) = h(x), \quad x \in G.$$

Erwartungsgemäss erfüllt u auch die Wärmeleitungsgleichung, was sich ebenj beweisen lässt.

Die hier vorgeführte Fouriersche Methode lässt sich natürlich auch auf andere partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik anwenden.

Beispiel: Wärmeleitung in einer Kugel

Wir benötigen die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Randwertproblems

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{in } \mathbb{B}(0; R), \quad u|_{S^2_R} = 0. \quad (63)$$

In diesem Fall lautet der Separationsansatz

$$u(x) = u_\ell(r) Y_{\ell m}(\hat{x}), \quad r = |x|, \quad (64)$$

wo $Y_{\ell m}$ die Kugelfunktionen (Kap. IV) sind. Nach (IV.A.16) ist

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^2}, \quad (65)$$

wobei Δ_{S^2} der Laplace-Operator von S^2 (zu natürlichen Koordinaten) ist. Für letzteren gilt, wie wir wissen,

$$\Delta_{S^2} Y_{\ell m} = -\ell(\ell+1) Y_{\ell m}. \quad (66)$$

Damit reduziert sich die Eigenwertgleichung (63) auf die folgende gewöhnliche Differentialgleichung für $u_\ell(r)$

$$(r^2 u_\ell')' + [\lambda r^2 - \ell(\ell+1)] u_\ell = 0. \quad (67)$$

Davon brauchen wir die in Ursprung reguläre Lösung $|u_\ell(0)| < \infty$ und ferner müssen wir nach (63) die Randbedingung $u_\ell(R) = 0$ erfüllen.

Gl. (67) ist die Besselsche Differentialgleichung und hat in Standardbezeichnungen die reguläre Lösung (im Ursprung)

$$u_l(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda} r). \quad (68)$$

(Diese Funktionen werden wir in den Übungen behandeln.)

Die positiven Nullstellen von $J_{l+\frac{1}{2}}$ bezeichnen wir mit μ_{lj} . Die Randbedingung in (63) gibt dann für die Eigenwerte λ :

$$\lambda_{lj} = \frac{\mu_{lj}^2}{R^2}, \quad l=0,1,\dots; j=1,2,\dots, \quad (69)$$

und die zugehörigen Eigenfunktionen lauten

$$u_{l,j}(x) = \# \frac{1}{\sqrt{r}} J_{l+\frac{1}{2}}\left(\mu_{lj} \frac{r}{R}\right) Y_{l,l}(x). \quad (70)$$

(Über die Normierungskonstanten kann man verfügen.)

Für die Lösung (62) des Wärmeleitungsproblems benötigt man dann nur noch die Fourierskoeffizienten der Anfangsbedingung.

Den langsamsten Zerfall erhält man vom Grundmode zu $l=0$. Dafür ist wegen $J_{1/2}(x) \sim \sqrt{x} - \mu_0 = \pi$, also

$$\lambda_0 = \frac{\pi^2}{R^2}. \quad (71)$$

5. Wärmeausgleich einer im Zentrum geheizten Kugel

Die unendliche Reihenentwicklung (62) des Wärmeausgleichs ist oft nicht sehr nützlich. Dies betrifft besonders auf das Kurzzeitverhalten zu, für welches viele Terme in der Summe (62) wesentlich beitragen. Wir zeigen nun an einem Beispiel, wie man zu einer komplexen Integraldarstellung gelangen kann, mit deren Hilfe sich gute Approximationen für lange und für kurze Zeiten systematisch ableiten lassen.

Zur Zeit $t=0$ setzen wir eine Wärmequelle (z.B. ein radioaktives Präparat) ins Zentrum der Kugel $B(0;R)$. Die anfängliche Temperatur sei gleich Null und die Oberfläche der Kugel werde auf der konstanten Temperatur Null gehalten. Nach Wahl geeigneter Einheiten haben wir dann das folgende Problem zu lösen:

$$(\rho_T - \Delta) u = \delta^3, \quad (72)$$

$$u(x,0) = 0, \quad (73)$$

$$u(x,t) = 0 \text{ für } x \in S_R^2. \quad (74)$$

Wir gehen ähnlich vor wie in § V.5 und wenden auf diese Gleichungen die partielle Laplace-Transformation in der Zeit an:

$$\tilde{u}(x, s) = \int_0^{\infty} e^{-st} u(x, t) dt.$$

Aus (72) wird (siehe §. V. 22)

$$s \tilde{u}(x, s) - \Delta \tilde{u}(x, s) = \frac{1}{s} \delta(x). \quad (75)$$

Dabei wurde die Anfangsbedingung (73) bereits inkorporiert. Aus (74) ergibt sich die Bedingung

$$\tilde{u}(x, s) = 0 \quad \text{für } |x| = R. \quad (76)$$

Das Problem (75), (76) ist sphärisch symmetrisch und deshalb wird u (und damit \tilde{u}) nur von $r = |x|$ abhängen. Für $r > 0$ lautet deshalb (75)

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d\tilde{u}(r, s)}{dr} - s \tilde{u}(r, s) = 0 \quad (0 < r \leq R). \quad (77)$$

Den Quellterm in (75) ersetzen wir durch eine Randbedingung im Ursprung. Dazu "integrieren" wir (75) über eine kleine Kugel $B(0; \varepsilon)$:

$$s \int_{|x| \leq \varepsilon} \tilde{u}(x, s) d^3x - \int_{|x| \leq \varepsilon} \Delta \tilde{u}(x, s) d^3x = \frac{1}{s}. \quad (78)$$

Der Wärmefluss durch S_ε^2 ist proportional zu $-\int_{S_\varepsilon^2} \nabla u \cdot d\sigma$ und sollte mit $\varepsilon \downarrow 0$ endlich bleiben. Deshalb antizipieren wir $\tilde{u}(x, s) \sim \frac{1}{r}$ für $r \downarrow 0$.

Dann verformt der erste Term in (78). Den 2. Term formen wir mit dem Gauss'schen Satz um

$$\int_{|\mathbf{x}| \leq \varepsilon} \Delta \tilde{u} d\vec{x} = \int_{S_\varepsilon^2} \nabla \tilde{u} \cdot d\vec{s} = 4\pi\varepsilon^2 \left. \frac{d\tilde{u}(t,s)}{ds} \right|_{s=\varepsilon}$$

Damit erhalten wir die Randbedingung

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} 4\pi\varepsilon^2 \left. \frac{d\tilde{u}}{ds} \right|_{s=\varepsilon} = -\frac{1}{s}. \quad (79)$$

Unabhängige Lösungen von (77) sind

$$\frac{1}{s^{1/2+r}} \sinh(s^{1/2+r}), \quad \frac{1}{s^{1/2+r}} \cosh(s^{1/2+r}).$$

Die Randbedingung (76) führt zur folgenden Linearkombination dieser beiden Lösungen

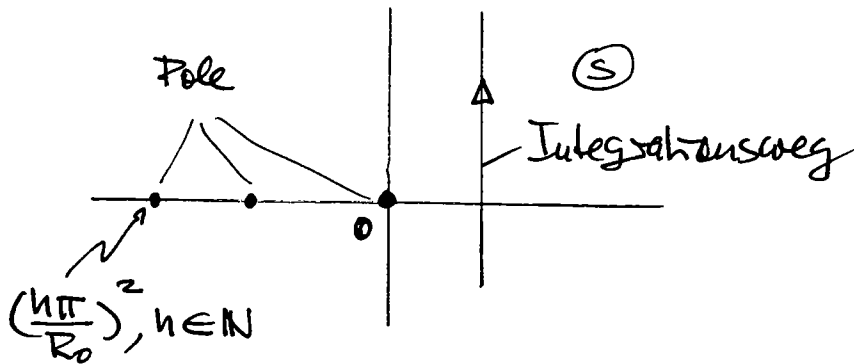
$$\tilde{u}(t,s) = A(s) \frac{\sinh[s^{1/2}(R-t)]}{s^{1/2+r}}$$

Entwicklung für kleine t und Vergleich mit (79) gibt den Vorfaktor $A(s)$. Man findet sofort

$$\tilde{u}(t,s) = \frac{1}{4\pi r} \frac{1}{s} \frac{\sinh[s^{1/2}(R-t)]}{\sinh(s^{1/2}R)}. \quad (80)$$

Dies substituieren wir in die Inversionsformel (V.32) und erhalten die folgende Integraldarstellung der gesuchten Lösung

$$u(t,t) = \frac{1}{4\pi r} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{st}}{s} \frac{\sinh[s^{1/2}(R-t)]}{\sinh(s^{1/2}R)} ds. \quad (81)$$



Der Integrand ist meromorph mit einfachen Polen bei $s=0$ (Residuum $= 1-t/R$) und ~~einfachen Polen~~ längs der negativen reellen Achse an den Stellen $s_n = -(\frac{n\pi}{R})^2, n=1,2,\dots$

Durch Verbiegen des Integrationsweges erhalten wir die Lösung in folgender Reihenentwicklung:

$$u(t,t) = \underbrace{\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{R} \right)}_{\text{stationäre Lösung (von Pol bei } s=0)} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi t} \sin\left(\frac{n\pi t}{R}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{R^2}t}}_{\text{(von Polen auf der negativen reellen Achse)}} \quad (82)$$

Der führende Term in der Summe für das Langzeitverhalten kommt vom nächstgelegenen Pol bei $s_1 = -(\pi/R)^2$. zu imaginären Achse

Die Lösung (82) könnte man auch leicht mit der Fourierschen Methode finden. Ausgehend von (81) können wir nun aber auch schnell konvergierende Entwicklungen für kurze Zeiten ableiten. Dazu setzen wir in (81) $\zeta = st$

$$u(r,t) = \frac{1}{4\pi r} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{d\zeta}{\zeta} e^{\zeta} \frac{\sinh[(R+r)(\zeta/t)^{1/2}]}{\sinh[R(\zeta/t)^{1/2}]} \quad (83)$$

und bemerken, dass $R/t^{1/2}$ für $t \rightarrow 0$ sehr gross wird.
Für grosse x gilt

$$\frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} = 2e^{-x} \sum_{p=0}^{\infty} e^{-2px}$$

und somit erhalten wir die exakte Entwicklung

$$u(r,t) = \frac{1}{4\pi r} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{d\zeta}{\zeta} e^{\zeta} \sum_{p=0}^{\infty} \{ \dots \}, \quad (84a)$$

wobei

$$\{ \dots \} = \exp[-(r+2pR)(\frac{\zeta}{t})^{1/2}] - \exp[-(2R-r+2pR)(\frac{\zeta}{t})^{1/2}]. \quad (84b)$$

Jeden einzelnen Summanden in dieser Entwicklung können wir exakt ausrechnen. Wir benötigen dazu Integrale der Form

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{d\zeta}{\zeta} e^{\zeta} e^{-a\zeta^{1/2}} \quad (85)$$

Ein solches ähnliches Integral haben wir bereits in Abschnitt V.5, (s. Gl. (43)) ausgewertet. (Der Integrand hat hier den zusätzlichen Faktor $1/\zeta$.) Solch ähnlich wie dort findet man (Übung)

$$J = -\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2}\right).$$

Dabei ist

$$\operatorname{erfc}(x) := 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\pi^{1/2}} \int_x^{\infty} dy e^{-y^2}. \quad (86)$$

Damit ergibt sich aus (84)

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi t} \sum_{p=0}^{\infty} \left\{ \operatorname{erfc}\left(\frac{x+2pR}{2t^{1/2}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{2R-x+2pR}{2t^{1/2}}\right) \right\}. \quad (87)$$

Man sieht übrigens sofort, dass dieser Ausdruck tatsächlich die Anfangs- und Randbedingungen (73), (74) erfüllt. Er hat den Vorteil, dass die Konvergenz für kleine t extrem schnell ist, da

$$\operatorname{erfc}(x) \sim \frac{e^{-x^2}}{\pi^{1/2} x} \quad \text{für } x \rightarrow \infty. \quad (88)$$

Näherungsweise gilt also

$$u(x,t) \approx \frac{1}{4\pi t} \left\{ \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2t^{1/2}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{2R-x}{2t^{1/2}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{x+2R}{2t^{1/2}}\right) + \dots \right\} \quad \text{für } t \rightarrow 0. \quad (89)$$

Damit ist die Nützlichkeit der Integraldarstellung (81) demonstriert. Die hier geschilderte Methode ist über das gewählte Beispiel hinaus von Bedeutung.

* * *

Übungen zu "Mathematische Methoden der Physik"⁴

1. Serie, Abgabetermin: Di 3. Mai 1988, 14^h

1. Bestimme das Bild der oberen Halbebene unter der Abbildung

$$w \mapsto z = \frac{1+iw}{1-iw}.$$

2. Zeige, dass eine holomorphe Funktion mit zusammenhängendem Definitionsbereich, die nur reelle Werte annimmt, konstant sein muss.

3. Man gebe an, für welche $a, b \in \mathbb{R}$ das Polynom $x^2 + 2axy + by^2$ Realteil einer holomorphen Funktion auf \mathbb{C} ist und bestimme für jedes solche (a, b) alle diese holomorphen Funktionen.

4. Es sei $f(z) = \frac{\sin z}{(z-1-i)^2}$ für $z \neq 1+i$ und $c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$.

Man bestimme den Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$.

5. Man bestimme — ohne Residuensatz, z.B. mit Hilfe der Integralformel für die Taylorkoeffizienten — das Integral

$$\int_{|z-1|=2} \frac{\sin z}{z^4} dz \quad (\text{positiver Umlauf}).$$

Übungen zu "Mathematische Methoden der Physik"

2. Serie, Abgabetermin: Mi 11. Mai 1988, 16^h

1. Beweise den folgenden Satz von Morera: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und für jede ganz in U gelegene Dreiecksfläche sei das Integral

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

für die Randumlaufkurve γ des Dreiecks. Dann ist f holomorph.

2. a) Beweise den Satz von Morera zum Beweis der folgenden Aussage. Es sei $\{f_n\}$ eine Folge in $H(U) = \{ \text{Menge der holomorphen Funktionen auf } U \}$ und $f \in C(U, \mathbb{C}) = \{ \text{stetige Funktionen} \}$. Diese Folge konvergiere im folgenden Sinne gegen f : Es gelte $f_n(x) \rightarrow f(x)$ gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen. Dann ist f holomorph.

- b) Es sei $f: [a, \infty) \times U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und

$$F(z) = \int_a^{\infty} f(t, z) dt$$

auf kompakten Teilmengen von U gleichmäßig konvergent. Ferner sei $f(t, \cdot)$ für jedes $t \in (a, \infty)$ eine holomorphe Funktion. Beweise, dass dann $F(z)$ holomorph ist.

3. Berechne mit dem Residuensatz $\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{1+x^4} dx$.

Übungen zu "Mathematische Methoden der Physik"

3. Serie, Abgabetermin: Mi. 18. Mai 1988, 16h

1. Zeige

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

(Bemerkung: $\frac{\sin x}{x}$ ist in $[0, \infty)$ nicht Lebesgue-integrierbar, wohl aber Riemann-integrierbar.)

Anleitung: Benutze den Satz von Cauchy für $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ und eine geeignete geschlossene Kurve.

2. Zeige, dass für $a > 1$,

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{a + \cos \theta} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

Anleitung: Setze $z = e^{i\theta}$ und schreibe das Integral als ein komplexes Wegintegral und werte dieses mit dem Residuensatz aus.

3. Berechne das Fourier-Integral

$$\int_0^\infty \frac{x \sin(px)}{(x^2 + a^2)^2}.$$

4. Zeige: Wenn $f(z)$ bei $z=a$ einen Pol der Ordnung n hat, so ist das zugehörige Residuum

$$\text{Res } f|_a = \frac{1}{(n-1)!} \left. \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} f(z)(z-a)^n \right|_{z=a}.$$

Übungen zu "Mathematische Methoden der Physik"

4. Serie, Abgabetermin: Mi. 25. Mai 1988, 16h

1. Berechne das Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}}$$

2. Zeige: $\int_a^b \frac{[(x-a)(x-b)]^{1/2}}{x^2} dx = \frac{\pi}{2} \frac{a+b}{\sqrt{ab}} - \pi$, $0 < a < b$.

Ableitung: Lege den Schnitt zwischen a und b und beachte das Integral über "den grossen Kreis".

3. Ausgehend von der Hankel-Darstellung für $\frac{1}{\Gamma(z)}$ (Skript, S.51, Gl.(29)) beweise man:

a) die Funktionalgleichung:

$$\Gamma(z+1) = z \Gamma(z) ;$$

b) $\Gamma(n+1) = n!$ für $n \in \mathbb{N}$.

Daraus folgere man:

c)
$$\lim_{z \rightarrow -m} \frac{1}{(z+m)\Gamma(z)} = (-1)^m m! , m \in \mathbb{N}.$$

Übungen zu "Mathematische Methoden der Physik"

4. Serie, Abgabetermin: Mi 1. Juni, 16⁰⁰h

1. Man diskutiere das Strömungsbild zum komplexen Potential (vgl. § I.6)

$$W(z) = z + \frac{1}{z} + ia \log z, \quad a > 0.$$

Bestimme die Staupunkte. Was passiert qualitativ mit anwachsendem a ?

2. Beweise die Vollständigkeit des l_2 -Raumes (vgl. §. II.6).

3. Es sei \mathcal{H} ein (Prä-) Hilbert-Raum und $\{u_1, \dots, u_n\}$ eine orthonormierte Menge von Vektoren. Betrachte die Funktion $f: \mathbb{C} \times \dots \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_+$,

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \left\| x - \sum_{k=1}^n \alpha_k u_k \right\|, \quad x \in \mathcal{H}.$$

Zeige, dass diese genau am Punkt $\alpha_k = (u_k, x)$ ein absolutes Minimum annimmt.

Ableitung: Bringe f^2 in eine Form, bei der die α -Abhängigkeit bloss in Summanden

$$\sum_{k=1}^n |(u_k, x) - \alpha_k|^2$$

vorkommt.

$$(ii) \quad \int_{\mathbb{R}} \varphi_n^2 dx = 2n \int_{\mathbb{R}} \varphi_{n-1}^2 dx ;$$

$$(iii) \quad \int_{\mathbb{R}} \varphi_n^2 dx = 2^n n! \int_{\mathbb{R}} \varphi_0^2 dx = \sqrt{\pi} 2^n n! .$$

Damit bilden die Funktionen

$$\psi_n = (\pi^{1/2} 2^n n!)^{-1/2} (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

die Orthonormalbasis in $L^2(\mathbb{R})$ zur Dichte $\rho = e^{-x^2}$ in \mathbb{R} .
(Sie bilden die Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators
siehe QM I.)

Übungen zu "Mathematische Methoden der Physik"

s. Serie, Abgabetermin: 8. Juni 16⁰⁰

Hermiteische Polynome, Hermiteische Funktionen

(Illustration von § III.1)

- 1) Nach der Definition auf S. III.3 sind die Hermiteischen Polynome die orthogonalen Polynome im Intervall $(-\infty, \infty)$ zur Dichte $\rho = e^{-x^2}$. Konstruiere die ersten vier Hermiteischen Polynome mit dem Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren.
- 2) Zeige, dass das n -te Polynom gegeben ist durch

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}), \quad n = 1, 2, \dots$$

Ableitung: Man überzeuge sich zunächst, dass es genügt zu zeigen, dass die Hermiteischen Funktionen

$$\varphi_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x), \quad n = 1, 2, \dots,$$

in $L^2(\mathbb{R})$ ein orthonormiertes System bilden. Um letzteres nachzuweisen, leite man die folgende Differentialgleichung her:

$$\varphi_n''(x) = (x^2 - 2n - 1) \varphi_n(x).$$

Mit deren Hilfe berechne man für $m \neq n$ das Integral $\int_{\mathbb{R}} \varphi_n \varphi_m dx$.

- 3) (freiwillig). Zur Normierung der φ_n etabliere man die Reihe nach die folgenden Punkte:

$$(i) \quad H_n' = 2n H_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots;$$

Übungen zu "Mathematische Methoden der Physik"

6. Serie, Abgabetermin: 15. Juni 16⁰⁰

- 1) Entwickle die Funktion $f(x) = x^2$ im Intervall $(-\pi, \pi)$ nach Fourier. Setze im Resultat $x = \pi, 0$ und schliesse auf

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Integriere die erhaltene Fourierreihe zweimal nach x und zeige (wichtig in der Quantenstatistik):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} = \frac{7}{8} \frac{\pi^4}{90}.$$

- 2) Es sei $\mathcal{H}_k, k=1,2,\dots$ eine Folge von Hilberträumen mit den Skalarprodukten $(\cdot, \cdot)_k$. \mathcal{H} bezeichne den Raum aller Folgen $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots)$ mit $\sum_k \|x_k\|^2 < \infty$, wobei $x_k \in \mathcal{H}_k$.

- a) Zeige, dass \mathcal{H} ein Vektorraum ist

Wir machen \mathcal{H} zu einem Prä-Hilbertraum, indem wir \mathcal{H} mit dem Skalarprodukt

$$(x, y) := \sum_k (x_k, y_k)_k$$

versehen.

- b) Zeige, dass dieses Skalarprodukt wohldefiniert ist.

- c) Beweise, dass \mathcal{H} ein Hilbertraum ist.

Man nennt \mathcal{H} die Hilbertsche Summe der \mathcal{H}_k .

Übungen zu "Mathematische Methoden der Physik"

7. Serie, Abgabetermin: 22. Juni, 16⁰⁰.

1) Beweise den folgenden

Kontraktionsatz: Sei X ein vollständiger metrischer Raum und $A: X \rightarrow X$ eine (nichtlineare) Kontraktion, d.h. es gelte

$$d(Ax, Ay) \leq \alpha d(x, y) \text{ für alle } x, y \in X,$$

mit $\alpha < 1$. A besitzt dann genau einen Fixpunkt $x_0 \in A$ ($Ax_0 = x_0$). Dieser lässt sich durch eine Iterationsfolge $x, x_1 = Ax, x_2 = Ax_1, \dots, x_n = Ax_{n-1}, \dots$ approximieren. Schätze den Fehler $d(x_n, x_0)$ durch $d(x, Ax)$ ab.

2) Anwendung des Kontraktionsatzes: Betrachte die lineare Integralgleichung in $C[a, b]$:

$$f(t) = \lambda \int_a^b K(t, s) f(s) ds + g(t)$$

mit $K \in C([a, b] \times [a, b])$ und $g \in C[a, b]$. Zeige, dass diese Gleichung für $|\lambda| < [M(b-a)]^{-1}$, mit $M = \max_{t, s \in [a, b]} |K(t, s)|$, genau eine Lösung $f \in C[a, b]$ hat.

Die hier dargestellte Lösungsmethode ist konstruktiv und kann auf dem Computer implementiert werden.

Übungen zu "Mathematische Methoden der Physik"

8. Serie, Abgabetermin: 29. Juni, 16⁰⁰.

- 1) Es sei, für $a > 0$, $f(x) = (1 - \frac{|x|}{a}) \mathbb{1}_{[-a, a]}$. Berechne die Fouriertransformierte von f und folgere aus dem Plancherel-Theorem

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\sin(ax)}{x} \right]^2 dx = \frac{2a^3 \pi}{3}.$$

- 2) Beweise die Leibnizsche Produktregel

$$\partial_i (gT) = (\partial_i g)T + g \partial_i T, \text{ für } T \in \mathcal{S}', g \in \mathcal{O}_M.$$

- 3) Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Zeige, dass $\frac{1}{h} [f(x+h) - f(x)]$ im Limes $h \rightarrow 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ gegen df/dx konvergiert. (Deshalb ist $T * f$ ($T \in \mathcal{S}', f \in \mathcal{S}$) eine C^∞ -Funktion.)

- 4) Für $T, S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ zeige man die folgende Regel:

$$\mathcal{F}(T \otimes S) = \mathcal{F}(T) \otimes \mathcal{F}(S).$$

- 5) (freiwillig). Mit Hilfe der Schwarz'schen Ungleichung und dem Lemma von Schwartz (Skript, p. VI 5) zeige man, dass sich $L^2(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ einbetten lässt.
- stetig

Übungen zu "Mathematische Methoden der Physik"

9. Serie, Abgabetermin: 6. Juli, 16⁰⁰

- 1) Zeige, dass die Fouriertransformierte von $T(x-a)$, $T \in \mathcal{S}'$, gegeben ist durch

$$\mathcal{F}[T(x-a)] = e^{ip \cdot a} \mathcal{F}[T].$$

- 2) Leite die folgende Beziehung her

$$\mathcal{F}[\partial^\alpha T] = (-ip)^\alpha \mathcal{F}[T], \quad T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

- 3) Man löse mit Hilfe der räumlichen Fouriertransformation das Anfangswertproblem für die kreisfreie Schrödinger-Gleichung:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi = i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad \psi(x, 0) = u(x).$$

Antwort:

$$\psi(x, t) = K_t * u,$$

mit ($t > 0$)

$$K_t(x) = \frac{1}{(2\pi i \hbar)^{3/2}} \left(\frac{m}{t}\right)^{3/2} e^{i \frac{m}{\hbar} \frac{|x|^2}{2t}}.$$

- 4) (freiwillig). Verifiziere im \mathbb{R}^3

$$(\Delta + k^2)G = \delta \quad \text{für} \quad G(x) = -\frac{1}{4\pi|x|} e^{\pm ik|x|},$$

oder leite dieses Ergebnis mit der Methode der Fouriertransformation her.

Übungen zu "Mathematische Methoden der Physik"

10. Serie, Abgabetermin: 13. Juli, 16⁰⁰

- 1) Man zeige, unter Verwendung der Formeln [S. Skript, Gl. (53)]

$$\mathcal{F}[\theta] = \pi \delta(p) + i \mathcal{P}\left(\frac{1}{p}\right),$$

$$\mathcal{F}[\theta(-x)] = \pi \delta(p) - i \mathcal{P}\left(\frac{1}{p}\right)$$

und der Gleichung $\mathcal{P}\left(\frac{1}{p^2}\right) = -\left(\mathcal{P}\frac{1}{p}\right)'$, dass die folgenden Beziehungen gelten

$$\mathcal{F}[\text{sign } x] = 2i \mathcal{P}\left(\frac{1}{p}\right), \quad \mathcal{F}\left[\mathcal{P}\frac{1}{x}\right] = i\pi \text{sign } p$$

$$\mathcal{F}\left[\mathcal{P}\frac{1}{x^2}\right] = -\pi |p|, \quad \mathcal{F}[|p|] = -2 \mathcal{P}\frac{1}{p^2}$$

$$\mathcal{F}[\theta(x)x] = -i\pi \delta'(p) - \mathcal{P}\left(\frac{1}{p^2}\right).$$

- 2) Man bestimme die Fundamentallösung für Δ in \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, mit der Methode der Reduktion bezüglich der Variablen t aus der Fundamentallösung des Operators der Wärmeleitungsgleichung.

- 3) (freiwillig). Leite die Formel (31) auf S. VII.11 für G_2 des Wellenoperators aus dem Ausdruck (30) her.