Elektrodynamik, Serie 12.

FS 08 *Abgabe:* Woche 13

1. Strahlungsdruck

i) Eine ebene Welle $\vec{E} = E_0 \sin(kx_3 - \omega t)\vec{e}_1$ fällt senkrecht auf einen Körper. Berechne die Impulsstromdichte T_{ik} und den zeitgemittelten Strahlungsdruck (ausgedrückt durch die Intensität I) auf den Körper unter folgenden Annahmen: (a) Absorption (schwarzer Körper), (b) Reflexion (idealer Leiter).

ii) In einem Hohlraum ist das Feld im thermodynamischen Gleichgewicht mit der Wand im Zeitmittel isotrop:

$$\overline{E_i} = \overline{B_i} = 0\,, \qquad \overline{E_i E_k} = c_E \delta_{ik}\,, \qquad \overline{B_i B_k} = c_B \delta_{ik}.$$

Berechne damit $\overline{T_{ik}}$ und insbesondere den Druck als Funktion der mittleren Energiedichte $\overline{u}$.

2. Drehimpuls elektromagnetischer Felder

i) Der Drehimpuls, der den freien elektromagnetischen Feldern $\vec{E}$ und $\vec{B}$ zugeschrieben wird, ist nach (7.11)

$$\vec{L} = \frac{1}{c} \int \mathrm{d}^3x\, \vec{x} \wedge (\vec{E} \wedge \vec{B})\,.$$

Unter der Annahme, dass $\vec{E}$ und $\vec{B}$ kompakten Träger haben, zeige, dass

$$\vec{L} = \frac{1}{c} \int \mathrm{d}^3x \Big(\vec{E} \wedge \vec{A} + \sum_{j=1}^{3} E_j (\vec{x} \wedge \vec{\nabla}) A_j \Big)\,,$$

wobei $\vec{A}$ das Vektorpotential ist. Der erste Beitrag, der unabhängig von der Wahl des Ursprungs ist, kann als Eigendrehimpuls (Spin) aufgefasst werden; der zweite als Bahndrehimpuls. *Hinweis:* Für jeden festen Vektor $\vec{a}$ führt der Unterschied der beiden Ausdrücke für $\vec{a} \cdot \vec{L}$ auf eine Divergenz:

$$\vec{a} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{A}) + \vec{E} \cdot [\vec{a} \cdot (\vec{x} \wedge \vec{\nabla})]\vec{A} - \vec{a} \cdot [\vec{x} \wedge (\vec{E} \wedge \operatorname{rot} \vec{A})] = \operatorname{div} [((\vec{a} \wedge x) \cdot \vec{A})\vec{E}]\,.$$

Zeige dies.

ii) Eine in Richtung $\vec{e}_3$ fortschreitende Welle, S. Seite 23 im Skript, hat Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \operatorname{Re} \sum_{i=\pm} A_i \vec{\varepsilon}_i\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx_3 - \omega t)}$$

mit $k = \omega/c$, $\vec{\varepsilon}_\pm = (\vec{e}_1 \pm \mathrm{i}\vec{e}_2)/\sqrt{2}$. Zeige, dass für eine annähernd ebene, sich über ein Volumen V erstreckende Welle der Spinanteil

$$\vec{L}_{\text{spin}} = \frac{V\omega}{2c^2} (|A_+|^2 - |A_-|^2)\, \vec{e}_3$$

beträgt.

iii) Drücke auch die Energie $cP^0 = \int \mathrm{d}^3x\, u$ der Welle durch $A_\pm$ aus. Was bedeutet dies für $L_{3,\text{spin}}$, wenn die rechts- oder links-polarisierte Welle als Photon der Energie $\hbar\omega$ aufgefasst wird?

3. $E = mc^2$ **im Original**[1]

In der Vorlesung wurde

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

hergeleitet unter Verwendung des Transformationsverhaltens des 4er-Vektors p^μ eines Teilchens. Einstein brauchte dies für seine Herleitung nicht zu postulieren; stattdessen verwendete er dasselbe (aber von der Mechanik unabhängige) Transformationsverhalten des Impulses des elektromagnetischen Feldes.

Ein ruhender Körper emittiert in positiver und negativer 1-Richtung je eine fast ebene Welle der Energie $L/2$, bezogen auf das Ruhesystem O des Körpers. Die Energien des Körpers vor und nach der Emission seien E_0, bzw. E_1. Berechne $E_0 - E_1$, sowie $E_0' - E_1'$, wobei die Striche sich auf ein mit Geschwindigkeit v in 1-Richtung bewegtes Inertialsystem O' beziehen.

Einsteins Überlegung: Ein Körper der Energie E, ruhend bzgl. O, hätte, falls in O' ruhend, die Energie $E + C$, wobei die "von den Qualitäten des Körpers unabhängige" additive Konstante C verschiedene Energienullpunkte berücksichtigt. Also ist

$$K' = E' - (E + C)$$

die kinetische Energie.

Berechne $K_0' - K_1'$ und folgere aus dem nicht-relativistischen Limes

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}\,.$$

[1] A. Einstein, Annalen der Physik 18 (1905)