Ladungsverteilung $\rho(\vec{x})$, z.B. kompakter Träger
Coulomb-Gesetz und Superpositionsprinzip

$$\left.\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}) &= -\vec{\nabla}\varphi(\vec{x}) \\ \varphi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi}\int \frac{\rho(\vec{y})\,d^3y}{|\vec{x}-\vec{y}|} \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

$\vec{E}(\vec{x})$: elektrische Feld = Kraft auf Probeladung 1 bei $\vec{x}$

$\varphi(\vec{x})$: el. Potential, $\varphi(\vec{x}) \xrightarrow[|\vec{x}|\to\infty]{} 0$

= Arbeit, um Probeladung 1 von ∞ nach $\vec{x}$ zu bringen.

$(*)$ erfüllt Feldgleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{div}\vec{E} = \rho\,, \quad \operatorname{rot}\vec{E} = 0 \\ &\text{bzw.} \\ &\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi\,, \quad \Delta\varphi = -\rho\,. \end{aligned}\right\} \quad (**)$$

Eindeutigkeit:

(*) ist die einzige Lösung der Feldgl. (**) mit

$$\vec{E}(\vec{x}) \xrightarrow[|\vec{x}|\to\infty]{} 0$$

bzw.

$$\varphi(\vec{x}) \xrightarrow[|\vec{x}|\to\infty]{} 0$$

"Coulomb-Gesetz (mit Superpos.prinzip) $\Longleftrightarrow$ Feldgleichungen & Randbdg. im Unendlichen."

Herleitung mittels

a) Satz vom Fluss : $V \subset \mathbb{R}^3$

$$\int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{o} = \int_V \rho(\vec{x})\, d^3x$$

oder mit

b) $\int d^3x \, \frac{1}{|\vec{x}|} \Delta v(\vec{x}) = -4\pi\, v(0)$

($v(\vec{x})$: glatte Fkt.)

Zu b) : Aus Greenscher Formel

$$\int_{\partial V} (u \vec{\nabla} v - v \vec{\nabla} u) \cdot d\vec{o} = \int_V (u \Delta v - v \Delta u)\, d^3x$$

für $V = \{ |\vec{x}| \geq \varepsilon \}$:

$$\int_{|\vec{x}| \geq \varepsilon} d^3x \, \frac{1}{|\vec{x}|} \Delta u = -\frac{1}{\varepsilon} \int_{|\vec{x}| \leq \varepsilon} d^3x \, \Delta u - \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{|\vec{x}| = \varepsilon} u \cdot do$$

(#)

Oberflächenladung

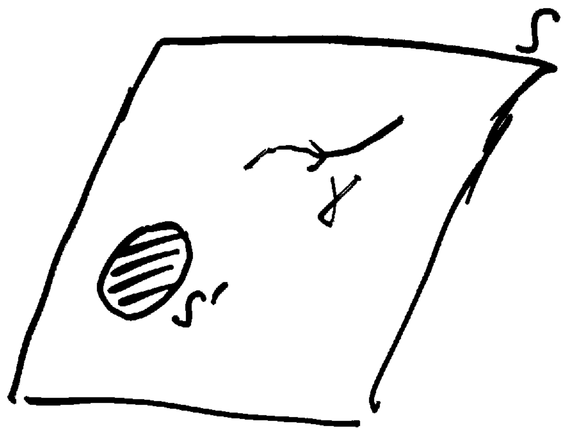
Fläche $S \ni \vec{y}$, Oberflächenelement $do(\vec{y})$

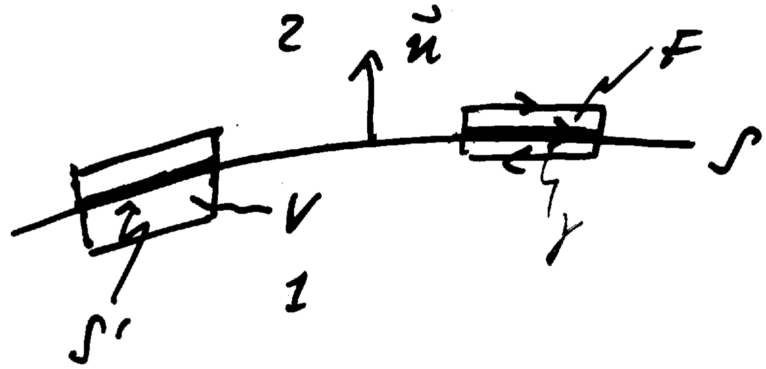
Flächenladungsdichte $\sigma(\vec{y})$; d.h.

$\sigma(\vec{y})\, do(\vec{y})$ ist Ladung in $do(\vec{y})$.

→ räumliche Ladungsdichte

$$\rho(\vec{x}) = \int_S do(\vec{y})\, \sigma(\vec{y})\, \delta(\vec{x}-\vec{y})$$





- $\int_{\partial V} \vec{E}\cdot d\vec{o} = \int_V \rho\, d^3x \longrightarrow \vec{E}\cdot\vec{n}\Big|_1^2 = \sigma$

  Normalkomponente des $\vec{E}$-Felds <u>unstetig</u>

- Stokes für F. $\longrightarrow \vec{E}\cdot\vec{t}\Big|_1^2 = 0$

  Tangentialkomp. <u>stetig</u>

Bemerkung: $\vec{n}$ Aussennormale eines Leiters 1

$\vec{E}\cdot\vec{n} = \sigma$ (Randwert aussen)

Elektrostatisches Potentialproblem auf Gebiet $D \subset \mathbb{R}^3$

Gegeben $\rho(\vec{x})$ in D, $\psi(\vec{x})$ auf ∂D

Gesucht $\varphi(\vec{x})$, $(\vec{x} \in D)$ mit

$$\Delta\varphi = -\rho \quad \text{in } D$$
$$\varphi = \psi \quad \text{auf } \partial D$$
$$\varphi(x) \to 0 \quad (|\vec{x}| \to \infty) \quad [\text{falls } D \text{ unbeschr.}]$$

- Lösung $\varphi(\vec{x})$: dasselbe wie Minimierer des Funktionals

$$\mathcal{F}[\varphi] = \int_D d^3x \left(\frac{1}{2}(\vec{\nabla}\varphi)^2 - \rho(\vec{x})\varphi(\vec{x}) \right)$$

- Greensche Funktion $G(\vec{x},\vec{y})$: Lösung (in $\vec{x}$) für Punktladung 1 bei $\vec{y}$, Rand geerdet:

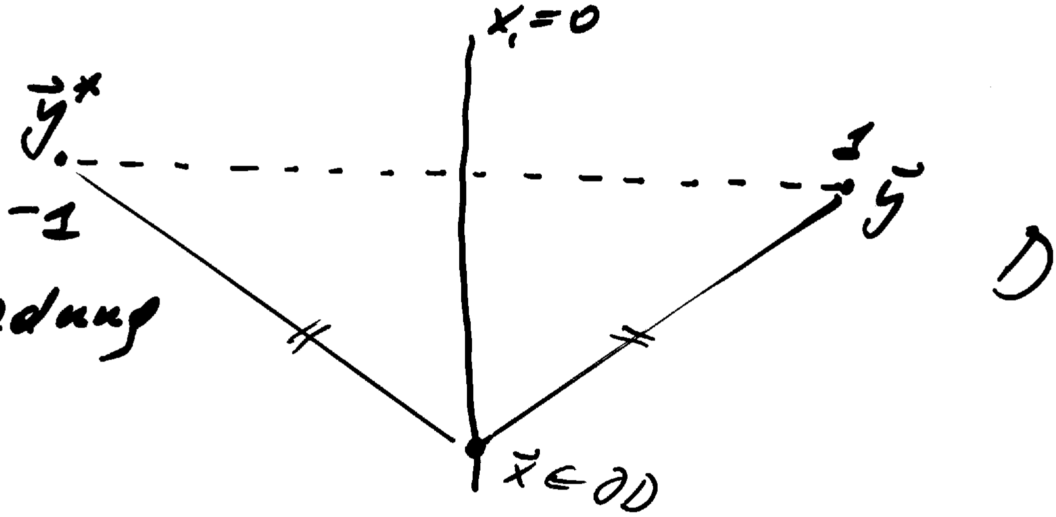
$$\Delta_x G(\vec{x},\vec{y}) = -\delta(\vec{x}-\vec{y})$$
$$G(\vec{x},\vec{y}) = 0 \quad \text{für } \vec{x} \in \partial D \cup \{\infty\}$$

Dann ist

$$\varphi(\vec{x}) = \int_D d^3y\, G(\vec{y},\vec{x})\rho(\vec{y}) - \int_{\partial D} \psi(\vec{y})\, \vec{\nabla}_y G(\vec{y},\vec{x}) \cdot d\vec{o}$$

Bsp. $D = \{ \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 > 0 \}$

(Halbraum)



Spiegelladung

$$\vec{y}^* = (-y_1, y_2, y_3)$$

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} - \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}^*|} \right)$$

$$(\vec{x} \in D \cup \partial D, \ \vec{y} \in D)$$

Felder in 2 Dimensionen resultieren

bei translationsinvarianten Anordnungen (in x_3-Rtg.):

$$\vec{E} = (\underline{E}, E_3) \qquad \text{unabh. von } x_3$$

Dann

- $E_3 = \text{konst}$
- $\underline{E} = (E_1(x_1, x_2), E_2(x_1, x_2))$

  mit

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} &= \rho \quad \longrightarrow 0 \end{aligned}\right\} \text{Cauchy-Riemann Bedingungen}$$

- In einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$, wo $\rho(x_1, x_2) \equiv 0$ ist

$$E(z) = E_1(x_1, x_2) - i E_2(x_1, x_2)$$

$$(z = x_1 + i x_2)$$

analytisch

- Gebiet G, einfach zusammenhängend

$$E(z) = -\frac{d\phi}{dz}$$

ϕ: komplexes Potential

$$\phi = \phi_1 - i\phi_2$$

$$\rightarrow \quad \underline{E} = -\underline{\nabla}\phi_1$$

$$\underline{E}^\perp = (-E_2, E_1) = \underline{\nabla}\phi_2$$

ϕ_1 ist elektrostatisches Potential

Niveaulinien von $\phi_2 \equiv$ Feldlinien von $\underline{E}$

- Gebiet G, <u>nicht</u> einfach zusammenhängend

ϕ_1 wohldefiniert (wegen $\operatorname{rot}\vec{E} = 0$)

ϕ_2 nicht

ϕ existiert als mehrwertige Funktion

Multipolentwicklung

Ladungsdichte ρ, $\quad \operatorname{supp}\rho \subset \{|\vec{x}| \le R\}$

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

für $r = |\vec{x}| \gg R$:

$$4\pi\varphi(\vec{x}) = \frac{e}{r}$$

$e = \int d^3x'\,\rho(\vec{x}')$ Ldg

$$+ \frac{\vec{p}\cdot\vec{x}}{r^3}$$

$p_i = \int d^3x'\,x_i'\,\rho(\vec{x}')$ Dipol

$$+ \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} T_{ij}\,\frac{x_i x_j - \frac{1}{3}\vec{x}^2\delta_{ij}}{r^5}}_{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} Q_{ij}\,\frac{x_i x_j - \frac{1}{3}\vec{x}^2\delta_{ij}}{r^5}}$$

Quadrupolfeld

mit

unabhängig:

$$T_{ij} = 3\int d^3x'\,x_i' x_j'\,\rho(\vec{x}') = T_{ji} \quad \Big| \quad 6$$

$$Q_{ij} = \int d^3x'\,(3x_i'x_j' - \vec{x}'^2\delta_{ij})\,\rho(\vec{x}') = Q_{ji} \quad \Big| \quad 5$$

(Quadrupoltensor)

$\operatorname{tr} Q = 0$

Höhere Ordnung l: $\int d^3x'\,x_1'^{m_1} x_2'^{m_2} x_3'^{m_3}\,\rho(\vec{x}')$

$(m_1 + m_2 + m_3 = l)$ redundant!

$\Omega = S^2$ Einheitskugel $= \{\vec{e} \in \mathbb{R}^3 \mid |\vec{e}| = 1\}$

$L^2(\Omega) = \{ Y : \Omega \to \mathbb{C} \mid \int_\Omega de\, |Y(\vec{e})|^2 < \infty \}$

Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$(Y, Z) = \int_\Omega de\, \overline{Y(\vec{e})}\, Z(\vec{e}).$$

Definition: $Y_\ell : \Omega \to \mathbb{C}$ heisst Kugelfunktion zum Index $\ell = 0, 1, 2, \ldots$, falls Y_ℓ die Einschränkung auf Ω eines homogenen, harmonischen Polynoms $u_\ell(\vec{x})$ $\underbrace{\text{ist:}}_{}$ vom Grad ℓ

$$u_\ell(r\vec{e}) = r^\ell\, Y_\ell(\vec{e}).$$

$\mathcal{Y}_\ell := \{$Kugelfunktionen zum Index $\ell\}$
$\subset L^2(\Omega)$

Satz.

a) $(Y_l, Y_{l'}) = 0$ für $l \neq l'$

b) $\dim \mathcal{Y}_l = 2l+1$

c) $L^2(\Omega) = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \mathcal{Y}_l$

Laplace-Operator in Kugelkoordinaten $(r, \vec{e})$

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_\Omega$$

Winkelanteil, z.B. bei $\vec{e} \leftrightarrow (\theta, \varphi)$

$$\Delta_\Omega = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

- $-\Delta_\Omega Y_l = l(l+1) Y_l$

- $\Delta(r^l Y_l(\vec{e})) = 0$

$$\Delta \frac{Y_l(\vec{e})}{r^{l+1}} = 0 .$$

Drehungen

- auf Polynome

$$(U(R)u)(\vec{x}) := u(R^{-1}\vec{x}) \qquad (R \in SO(3))$$

dabei: $\{$homogene harmonische Polynome vom Grad $\ell\} \circlearrowleft$

- auf $L^2(\Omega)$

$$(U(R)Y)(\vec{e}) = Y(R^{-1}\vec{e})$$

Insb. $U(R) : \mathcal{Y}_\ell \circlearrowleft$

Drehungen $U(R_\varphi)$ um x_3-Achse kommutieren:
gemeinsame Eigenvektoren: $Y_{\ell m}$

$$U(R_\varphi) Y_{\ell m} = e^{-im\varphi} Y_{\ell m}$$

bzw.

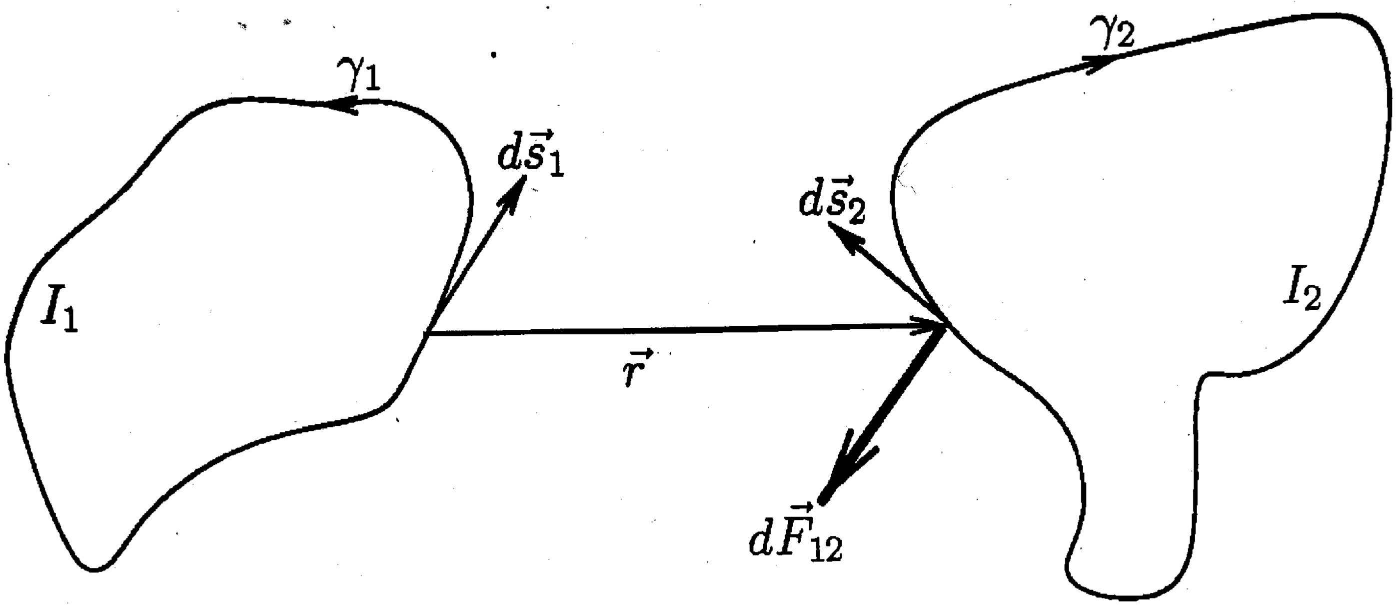
$$Y_{\ell m}(R_\varphi^{-1}\vec{e}) = e^{-im\varphi} Y_{\ell m}(\vec{e})$$

mit $m \in \mathbb{Z}$, da $R_{2\pi} = 1$

Es kommen vor:

$$m = -\ell, -\ell+1, \ldots, \ell-1, \ell$$

insgesamt $2\ell+1$ einfache Eigenwerte



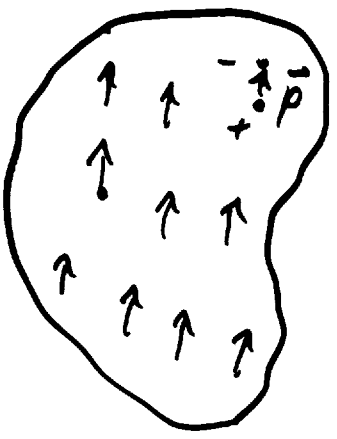
$$\vec{F}_{12} = \int_{\gamma_2}\int_{\gamma_1} d\vec{F}_{12} = \frac{I_1 I_2}{c^2}\int_{\gamma_2}\int_{\gamma_1} \frac{d\vec{s}_2 \wedge (d\vec{s}_1 \wedge \vec{r})}{4\pi r^3}$$

Kraft von Schlaufe 1 auf 2

I_1, I_2 zeitlich konstante Ströme

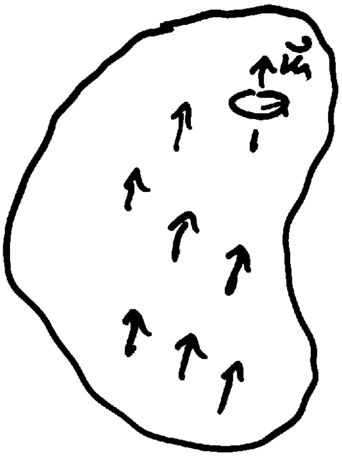
Zwei Vorstellungen über Magnetismus

obsolet



Magnet besteht aus magnetischen <u>Ladungs</u>dipolen
Polarisation "$\vec P$"
Feld "$\vec E$"

gültig



Magnet besteht aus elektrischen <u>Strom</u>dipolen
Magnetisierung $\vec M$
Feld $\vec B$

Falls "$\vec P$" $= \vec M$:

"$\vec E$" $= \vec B$ ausserhalb des Magneten

"$\vec E$" $= \vec B - \vec M$ allgemein.

äquiv Ladungsdichte

$$\rho = -\operatorname{div} \vec P$$

äquiv Stromdichte

$$\vec i = \operatorname{rot} \vec M$$

Maxwell-Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{homogene}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \rho \\ \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{\vec{j}}{c} \end{aligned}\right\} \text{inhomogene}$$

Lorentz-Kraft auf Teilchen der Ldg. e

$$\vec{F} = e\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{B}\right)$$

Energiebilanz : $V \subset \mathbb{R}^3$

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \, d^3x$$

$$= - \int_{\partial V} c (\vec{E} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{o} - \int_V \vec{\imath} \cdot \vec{E} \, d^3x$$

- Für Punktladung : Leistung der L. Kraft

$$\vec{v} \cdot (e\vec{E} + e \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{B}) = e \vec{v} \cdot \vec{E}$$

$$= \int \vec{\imath} \cdot \vec{E} \, d^3x$$

mit $\vec{\imath}(\vec{x}, t) = e \, \delta(\vec{x} - \vec{x}(t)) \vec{v}$

- Für kont. Ldg / Stromverteilung

Leistung $\int \vec{\imath} \cdot \vec{E} \, d^3x$

Monochromatische Wellen (komplexe Schreibweise)

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \vec{E}_0 \, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}$$

$$\vec{B}(\vec{x},t) = \vec{e} \wedge \vec{E}(\vec{x},t)$$

mit: $\omega > 0$ Frequenz

$\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{e}$ Wellenvektor

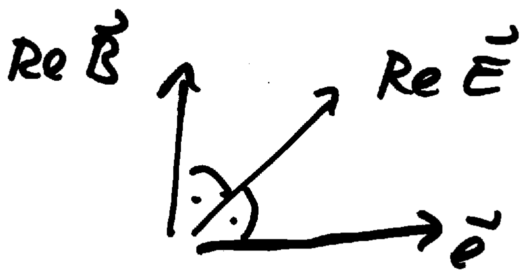
$\vec{e}$ Fortpflanzungsrichtung

$\vec{e}\cdot\vec{E}_0 = 0$ (Welle <u>transversal</u>)

$\vec{E}_0 = \vec{E}_1 + i\,\vec{E}_2$ komplexe Amplitude

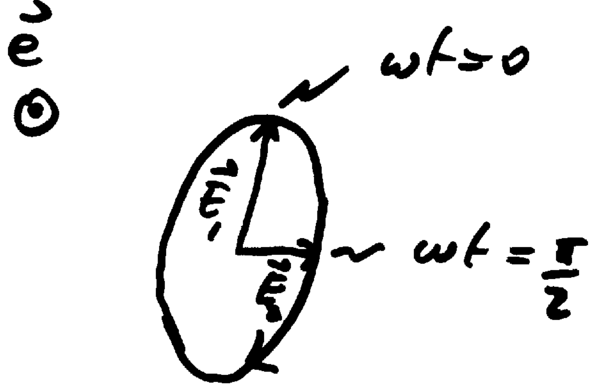
Physikalische Felder

$$\mathrm{Re}\,\vec{E}(\vec{x},t) \quad , \quad \mathrm{Re}\,\vec{B}(\vec{x},t)$$



Polarisation: Bahn von $\mathrm{Re}\,\vec{E}(0,t)$

$$\mathrm{Re}\,\vec{E}(0,t) = \vec{E}_1 \cos\omega t + \vec{E}_2 \sin\omega t$$



(Ellipse)

Spezialfälle:

- $\vec{E}_1 \parallel \vec{E}_2$ lineare Polarisation
- $\vec{E}_1 \perp \vec{E}_2$, $\vec{E}_2 = \pm \vec{e} \wedge \vec{E}_1$ $\Big\}$ rechts / links zirkulare Polarisation

---

Raum der Polarisationen

$$\vec{e}^{\perp} = \{ \vec{E}_0 \in \mathbb{C}^3 \mid \vec{E}_0 \cdot \vec{e} = 0 \}$$

(2-dim. komplexer Vektorraum)

Basis $\{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2\}$ für $\vec{e}^{\perp}$, orthonormiert bzgl. Skalarprodukt

$$(\vec{E}_0, \vec{F}_0) = \vec{\overline{E}}_0 \cdot \vec{F}_0 = (\vec{E}_1 - i\vec{E}_2) \cdot (\vec{F}_1 + i\vec{F}_2)$$

Zerlegung:

$$\vec{E}_0 = \alpha_1 \vec{\varepsilon}_1 + \alpha_2 \vec{\varepsilon}_2 \qquad (*)$$

ist Zerlegung einer beliebigen Polarisation nach zwei ausgewählten.

Beispiele [Sei $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \equiv \vec{e})$ o.n. Basis für $\mathbb{R}^3$]

1) $\vec{\varepsilon}_1 = \vec{e}_1$, $\vec{\varepsilon}_2 = \vec{e}_2$

(*) Zerlegung nach zueinander senkrechten linearen Polarisationen

2) $\vec{\varepsilon}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 + i\vec{e}_2)$, $\vec{\varepsilon}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 - i\vec{e}_2)$

(*) Zerleg. nach rechts / links zirkularen Polarisationen

Anfangswertproblem des freien e.m. Felds

$$\left.\begin{matrix}\vec{E}(\vec{x},0)\\ \vec{B}(\vec{x},0)\end{matrix}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{matrix}\vec{E}(\vec{x},t)\\ \vec{B}(\vec{x},t)\end{matrix}\right.$$

Beachte: • $\Box\vec{E}=0 \quad , \quad \Box\vec{B}=0$

• $\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}(\vec{x},0) = c \operatorname{rot}\vec{B}(\vec{x},0)$

$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}(\vec{x},0) = -c \operatorname{rot}\vec{E}(\vec{x},0)$

Dies führt auf <u>skalare Wellengl.</u>

$$\Box u = 0$$

mit

$u(\vec{x},0), \ \frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},0)$ gegeben

Greensche Funktion:

$$D(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi r}\left[\delta(ct-r) - \delta(ct+r)\right]$$

erfüllt

$$D(\vec{x},0) = 0\,, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t}(\vec{x},0) = \delta^{(3)}(\vec{x})\,, \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 D}{\partial t^2}(\vec{x},0) = 0$$

Bemerkung: $D(\vec{x},t)$ aufgefasst als

- Distribution in $\vec{x}$
- Funktion in t

→ Lösung des Anfangswertproblems

$$u(\vec{x},t) = \int d^3y \left[\frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t}(\vec{x}-\vec{y},t)\, u(\vec{y},0) + \right.$$
$$\left. + D(\vec{x}-\vec{y},t)\frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{y},0)\right]$$

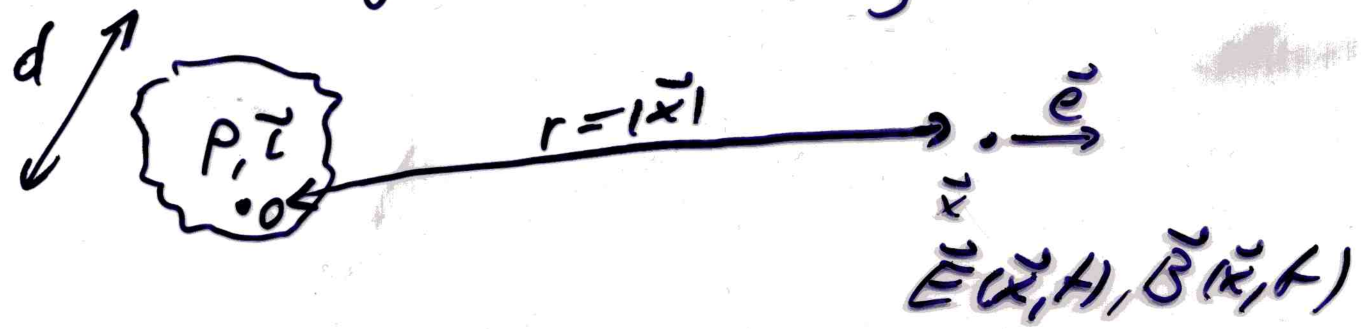
Spezielle Lösung der Maxwell-Gl. für gegebene $\rho(\vec{x},t)$, $\vec{i}(\vec{x},t)$:

<u>Retardierte Potentiale</u> (Lorenz-Eichung)

$$\varphi(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi}\int d^3y \, \frac{\rho\left(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c}\right)}{|\vec{x}-\vec{y}|}$$

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi c}\int d^3y \, \frac{\vec{i}\left(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c}\right)}{|\vec{x}-\vec{y}|}$$

Anwendung: Ausstrahlung



$\rho, \vec{i}$ zeit<u>un</u>abhängig: $\vec{E} = O(r^{-2})$, $\vec{B} = O(r^{-3})$

$\rho, \vec{i}$ zeitabhängig: $\underline{\vec{E}, \vec{B} = O(r^{-1})}$

$\rightarrow \vec{S} = O(r^{-2})$

Energiefluss in $d^2\vec{e}$: $\vec{S} \cdot r^2 d^2\vec{e} = O(1)$

Energie strömt nach Unendlich

ω : typische Frequenz in t-Abhängigkeit von $\rho, \vec{\imath}$

$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$: typische Wellenlänge der Strahlung

Für

$r \gg d, \lambda$ (Wellenzone)

sind die Felder in $\mathcal{O}(r^{-1})$

$$\vec{B} = -\vec{e} \wedge \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad = \vec{e} \wedge \vec{E}$$

$$\vec{E} = \vec{e} \wedge \left(\vec{e} \wedge \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) \qquad = -\vec{e} \wedge \vec{B}$$

mit

$$\vec{A}(\vec{x},t) \equiv \frac{1}{4\pi r c} \int d^3y \; \vec{\imath}\left(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c}\right)$$

Insb.: $\vec{S} = c(\vec{E} \wedge \vec{B}) = c(\vec{E})^2 \vec{e}$ (radial)

Weitere Diskussion für

$d \ll \lambda$

Gesucht: Entwicklung von $\vec{E}, \vec{B}$ nach Potenzen von $\frac{d}{\lambda}$

Das klassische Relativitätsprinzip

- Raum und Zeit erfahren durch Messungen
  - → Massstäbe, Uhren
  - → Festlegung der Einheiten
  - → kartesisches Bezugssystem
- Ereignis $\longleftrightarrow$ $(t, \vec{x}) \in \mathbb{R}^{1+3}$

  t: Zeitkoordinate

  $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$: räumliche Koordinaten

- Invarianten: Vom Bezugssystem unabhängig (→ absolute Bedeutung) sind
  - $|t_1 - t_2|$: Zeitabstand von zwei beliebigen Ereignissen $(t_1, \vec{x}_1)$, $(t_2, \vec{x}_2)$

    (→ Gleichzeitigkeit ist absolut)
  - falls $t_1 = t_2$:

    $|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|$: Raumabstand von zwei gleichzeitigen Ereignissen

Koordinatentransformationen, die diese Grössen invariant lassen:

$$t' = \lambda t + a \qquad (\lambda = \pm 1,\ a \in \mathbb{R})$$

$$\vec{x}' = R(t)\vec{x} + \vec{b}(t) \qquad \begin{pmatrix} R(t) \in O(3) \\ \vec{b}(t) \in \mathbb{R}^3 \end{pmatrix}$$

→ räumliche Bez.-syst. beliebig gegeneinander bewegt.

Physikalisch nicht alle Bez. syst. gleichberechtigt: Besondere Klasse

- Inertialsysteme: Bahn $\vec{x}(t)$ freier Teilchen erfüllt

$$\ddot{\vec{x}} = 0$$

(Trägheitsgesetz)

Verbleibende Koordinatentransformationen: Galilei-Transformationen

$$t' = \lambda t + a \qquad (\lambda = \pm 1,\ a \in \mathbb{R})$$

$$\vec{x}' = R\vec{x} + \vec{v}t + \vec{b} \qquad (R \in O(3),\ \vec{v}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3)$$

→ räumliche Bez.syst. gleichmässig geg. einander beweg.

- Klassische Relativitätsprinzip:

die Bewegungsgleichungen eines isolierten Systems lauten in jedem Inertialsystem gleich (sind forminvariant unter Galilei-Trsf.)

Bsp. Newtonsche Gl. eines N-Teilchen-systems

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_i(\vec{x}_1, \dots \vec{x}_N) \qquad (i=1, \dots N)$$

erfüllt Rel.prinzip, falls

$$\vec{F}_i(R\vec{x}_1 + \vec{a}, \dots R\vec{x}_N + \vec{a}) = R\vec{F}_i(\vec{x}_1, \dots \vec{x}_N)$$

$$(R \in O(3), \vec{a} \in \mathbb{R}^3)$$

Bsp Sonnensystem:

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = G \sum_{j \neq i} m_i m_j \frac{\vec{x}_i - \vec{x}_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|^3}$$

Gesetz der Lichtausbreitung:

$$c^2(t_1-t_2)^2-(\vec{x}_1-\vec{x}_2)^2=0$$

charakterisiert Ereignisse $(t_1,\vec{x}_1)$, $(t_2,\vec{x}_2)$, die durch ein Lichtsignal verbunden sind.

Insb.: Fortpflanzungsgeschwindigkeit c unabhängig von

- Richtung
- Geschw. des Senders

Das Gesetz widerspricht dem klassischen Relativitätsprinzip: Nur form-invariant unter Galilei-Trsf. mit $\vec{v}=0$.

Denn: Bzgl. O: Ereignis $(t,\vec{x})=(0,0)$ löst Lichtwelle aus; Front: $|\vec{x}|=c|t|$.

Galilei-Trsf.: $t'=t$, $\vec{x}'=\vec{x}-\vec{v}t$.

Bzgl. O': auslösendes Ereignis $(0,0)$;

Front: $|\vec{x}'|=c|t'|$? Nein:

$$|\vec{x}'+\vec{v}t'|=c|t'|$$

Jede Matrix $\Lambda \in L$ (homogene Lorentz Trafo)
ist von der Form

$$\Lambda = \Lambda_0 \cdot S$$

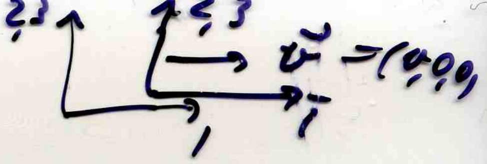
wobei

$S \in \{1, P, T, PT\}$ Spiegelungen

$\Lambda_0 \in L_+^\uparrow = \{\Lambda \in L \mid \Lambda^0{}_0 \geq 1, \det \Lambda = +1\}$

eigentliche, orthochrone LT

Boosts:



$$\Lambda = \left(\begin{array}{cc|cc} \gamma & -\beta\gamma & \multicolumn{2}{c}{0} \\ -\beta\gamma & \gamma & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\beta = v/c$$

$(ct, \vec{x})$ transformiert gemäss

$$\bar{t} = \frac{t}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \frac{v x^1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\bar{x}^1 = -\frac{vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{x^1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\bar{x}^2 = x^2$$

$$\bar{x}^3 = x^3$$

Vektoren : $a \in V$

- Basis : $e_1, \ldots e_n$

$$a = a^\mu e_\mu$$

- Basistransformation

$$\bar{e}_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu e_\nu$$

$$\bar{a}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu$$

mit

$$\Lambda^\mu{}_\nu \Lambda_\mu{}^\sigma = \delta_\nu{}^\sigma$$

Linearformen : $f \in V^*$

$$f(a) = \langle f, a \rangle .$$

- Komponenten $f_\mu = \langle f, e_\mu \rangle$

- duale Basis $e^1, \ldots e^n$: $\langle e^\mu, a \rangle = a^\mu$

$$f = f_\mu e^\mu$$

- Basistraf.

$$\bar{f}_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu f_\nu \quad , \quad \bar{e}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu e^\nu$$

Tensoren

z.B. vom Typ $\binom{1}{1}$: Bilinearform T

$$T(f,a) \quad \text{in } f \in V^*, a \in V$$

Bzgl. eines dualen Basispaars

$$T(f,a) = \underbrace{T(e^\mu, e_\nu)}_{\equiv T^\mu{}_\nu} f_\mu a^\nu$$

Basistransformation

$$\bar{T}^\mu{}_\nu = T(\bar{e}^\mu, \bar{e}_\nu)$$
$$= \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda_\nu{}^\beta \underbrace{T(e^\alpha, e_\beta)}_{\equiv T^\alpha{}_\beta}$$

Allgemein: T vom Typ $\binom{q}{p}$, $T \in \bigotimes^q_p V$,

oder: q-fach kontravariant
p-fach kovariant

ist Multilinearform

$$T(f_{(1)}, \ldots f_{(q)}, a_{(1)}, \ldots a_{(p)})$$

mit $f_{(i)} \in V^*$, $a_{(j)} \in V$.

Komponenten $T^{\mu_1 \ldots \mu_q}{}_{\nu_1 \ldots \nu_p}$ transformieren kontra (ko-) variant in jedem oberen (unteren) Index.

Tensorfelder im $\mathbb{R}^n$

Ein affiner Raum ist – praktisch – $\mathbb{R}^n \ni x = (x^1, .. x^n)$ modulo linear inhomogene Koordinatentransformationen (affine Trsf.)

$$\bar{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu .$$

Tensorfeld, z.B. vom Typ $\binom{1}{1}$, ist durch Komponenten

$$T^\mu{}_\nu(x^1, .. x^n)$$

gegeben, mit dem Trsf. gesetz

$$\bar{T}^\mu{}_\nu(\bar{x}) = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda_\nu{}^\beta T^\alpha{}_\beta(x)$$

Differentiation:

$$T^\mu{}_{\nu,\sigma}(x) := \frac{\partial}{\partial x^\sigma} T^\mu{}_\nu(x)$$

ist ein Tensorfeld vom Typ $\binom{1}{2}$, d.h. es transformiert entsprechend.

Abkürzung:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

Beispiele:

$$f_{,\mu} = \frac{\partial f}{\partial x^\mu}$$ Gradient eines Skalarfeldes

$v^\mu{}_{,\mu}$ Divergenz eines Vektorfelds (Spur von $v^\mu{}_{,\nu}$)

Metrik: Tensor $g_{\mu\nu}$ (unabhängig von x)

- Dann ist

$$\partial_\mu (g_{\alpha\beta} v^\beta) = g_{\alpha\beta} \partial_\mu v^\beta :$$

Differentiation und Runterziehen der Indizes kommutieren.

- Setze $\partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu$
- Laplace-Operator bzgl. $g_{\mu\nu}$

$$\Delta := \partial^\mu \partial_\mu = g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$$

ist ein Skalar: für $\bar{f}(\bar{x}) = f(x)$ ist

$$(\bar{\Delta} \bar{f})(\bar{x}) = (\Delta f)(x).$$

4er Strom

$$j^{\mu} = \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$$

elektromagnetischer Feldtensor

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} = -F_{\nu\mu}$$

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $g_{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right)$. Anders gesagt:

$$E_i = -F^{0i} \quad , \quad B_i = -F^{i+1\, i+2}$$

Maxwell-Gl.

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \,, \quad \operatorname{rot}\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = \rho \,, \quad \operatorname{rot}\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\vec{\iota}}{c}$$

lauten

$$F_{\mu\nu,\sigma} + F_{\sigma\mu,\nu} + F_{\nu\sigma,\mu} = 0$$

$$F^{\mu\nu}{}_{,\mu} = \frac{j^\nu}{c}$$

Tensorgleichungen! Forminvariant unter Lorentz-Transformationen $\bar{x} = \Lambda x + a$ sofern

$$\bar{j}^\mu(\bar{x}) = \Lambda^\mu{}_\alpha\, j^\alpha(x)$$

$$\bar{F}_{\mu\nu}(\bar{x}) = \Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda_\nu{}^\beta F_{\alpha\beta}(x).$$

Insbesondere für Λ einen Boost

$$\bar{\vec{E}}_\parallel = \vec{E}_\parallel \,, \quad \bar{\vec{E}}_\perp = \frac{\vec{E}_\perp + \frac{1}{c}\vec{v}\wedge\vec{B}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\bar{\vec{B}}_\parallel = \vec{B}_\parallel \,, \quad \bar{\vec{B}}_\perp = \frac{\vec{B}_\perp - \frac{1}{c}\vec{v}\wedge\vec{E}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

- Ladungserhaltung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{i} = 0$$

- e.m. Potentiale

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad , \quad \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

(erfüllt homogene Maxwell-Gl.)

- Eichtransformationen

$$\varphi \to \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t} \quad , \quad \vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$$

(lassen $\vec{E}, \vec{B}$ invariant)

- Lorenz-Eichung

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} = 0$$

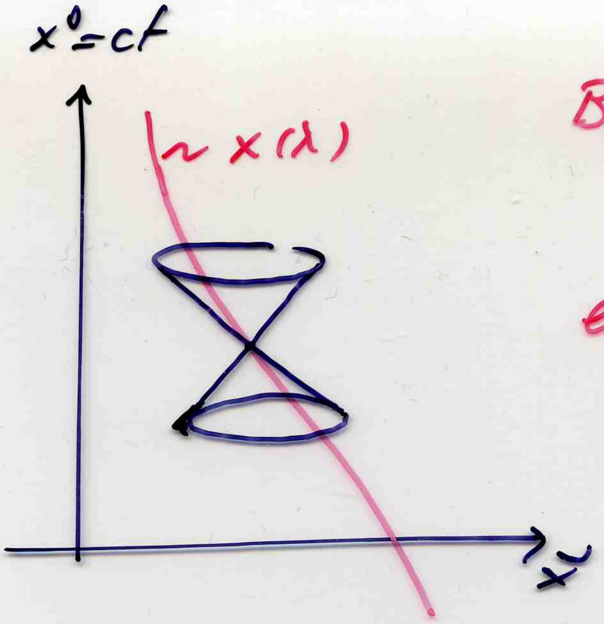
- Inhomog. MG. bei Lorenz-Eichung

$$\Box \varphi = \rho \quad , \quad \Box \vec{A} = \frac{\vec{i}}{c}$$

(Wellengl.)

- Retardierte Green Funktion

$$D_{ret}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi r}\,\delta(ct - r)$$



Bahn (Weltlinie)

$$x = x(\lambda)$$

eines Teilchens

λ: beliebiger Kurvenparameter

Bogenlänge s, bzw. Eigenzeit τ

$$c^2 d\tau^2 = ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$$

$$= (dx^0)^2 - (d\tilde{x})^2$$

$\to$ τ Lorentz-invariant (Skalar)

$$\to \quad d\tau = dt \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

4er-Geschwindigkeit u^μ

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

4er Impuls

$$p^\mu = m u^\mu \qquad \to (p,p) = m^2 c^2$$

$$m > 0 : \text{Masse (Skalar)} \quad \to \quad p^\mu = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} c \\ \tilde{v} \end{pmatrix}$$

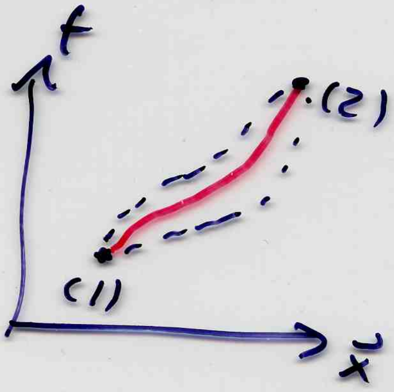
Lagrange Funktion für Teilchen, das sich im $\mathbb{R}^3$ bewegt

$$L(\vec{x}, \underset{\dot{\vec{x}}}{\underset{\shortparallel}{\vec{v}}}, t)$$

Bewegungsgleichung: Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{x}}$$

Äquivalent: Hamiltonsches Variationsprinzip



$$\delta \underbrace{\int_{(1)}^{(2)} dt\, L(\vec{x}(t), \vec{v}(t), t)}_{\text{Wirkung}} = 0$$

bei Variationen der Bahn mit festen Endpunkten in $\vec{x}$ und t

Ladung ist ein Skalar (d.h. invariant) unter Lorentz-Transformationen.

Grund: Falls

$$j^\mu(x) \xrightarrow[|\vec{x}|\to\infty]{} 0$$

(rasch genug) und

$$j^\mu{}_{,\mu} = 0 \; ,$$

dann ist

$$\int_{x^0=0} j^0(x)\, d^3x$$

Lorentz-invariant (orthochr. Trsf.)

Aus Maxwell-Gl.

$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\frac{1}{2}(\vec{E}^2+\vec{B}^2)}_{u} + \operatorname{div}\underbrace{c(\vec{E}\wedge\vec{B})}_{\vec{S}} + \vec{i}\cdot\vec{E} = 0$$

Energiebilanz: $V \subset \mathbb{R}^3$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\int_V u\, d^3x}_{\text{Energie in } V} = -\underbrace{\int_{\partial V} \vec{S}\cdot d\vec{o}}_{\text{Energiestrom aus } V \text{ heraus}} - \underbrace{\int_V \vec{i}\cdot\vec{E}\, d^3x}_{\text{Leistung der Kraftdichte } \vec{f} \text{ in } V}$$

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \frac{\vec{i}}{c}\wedge\vec{B}$$

Energie-Impuls-Tensor

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu}{}_{\sigma} F^{\sigma\nu} - \frac{1}{4} F_{\rho\sigma} F^{\sigma\rho} g^{\mu\nu}$$

- $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$
- $T_{\mu}{}^{\mu} = 0$
- Energie-Impuls-Satz

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = -\frac{1}{c} F^{\mu\nu} j_{\nu} =: -f^{\mu}$$

- Komponenten:

$$T^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) & \vec{E} \wedge \vec{B} \\ \hline \vec{E} \wedge \vec{B} & \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)\delta_{ik} - E_i E_k - B_i B_k \end{array}\right)$$

$$f^{\mu} = \begin{pmatrix} \vec{j} \cdot \vec{E}/c \\ \rho \vec{E} + \frac{\vec{j}}{c} \wedge \vec{B} \end{pmatrix}$$