Übungsserie 11

Abgabe: 29.Mai 2009

Aufgabe 1 [*Spiegelladungen und Dielektrika*]:
Man betrachte die folgende Konfiguration. Der Raum $V = \mathbb{R}^3$ sei durch die Ebene $x = 0$ in zwei Halbräume zerlegt. Im Volumen $x > 0$ befinde sich ein Medium mit einer Dielektrizitätskonstanten ϵ_1 und im Volumen $x < 0$ sei ein Medium mit Dielektrizitätskonstante ϵ_2. Im Punkt $(l > 0, 0, 0)$ befinde sich ferner eine Punktladung q.

Man berechne (in kartesischen Koordinaten) das elektrische Feld im ganzen Raum und bestimme die Polarisationsladung an der Grenzfläche $x = 0$.

Hinweis: Die Aufgabe lässt sich in Analogie zur Situation im Vakuum lösen.

Aufgabe 2 [*Oberflächen- und Polarisationsladungen*]: Gegeben seien zwei konzentrische leitende Kugeln vom inneren (äusseren) Radius a (b) die die Ladungen Q $(-Q)$ tragen. Der Raum zwischen den Kugeln sei ferner zur Hälfte mit einem Dielektrikum (Dielektrizitätskonstante ϵ) gefüllt (vergleich Skizze).

(i) Man bestimme das elektrische Feld zwischen den Kugeln.

(ii) Man berechne die Flächenladung auf der inneren Kugel.

(iii) Man berechne die Dichte der auf der Oberfläche des Dielektrikums bei $r = a$ induzierten Polarisationsladung.

Hinweise:

- Wähle ein geeignetes Koordinatensystem.
- Setze nun die allgemeine Lösung als Summe über Kugelfunktionen an und verwende die Symmetrien des Problems.
- Alternativ könnte man einen (einfachen) Ansatz für Φ machen und beweisen, dass dieser die zu fordernden Randbedingungen erfüllt.

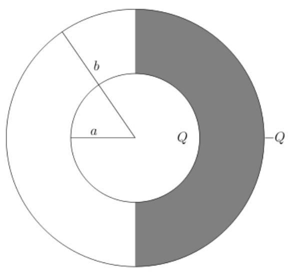

Abbildung 1: Aufgabe 2

Aufgabe 3 [*Gruppengeschwindigkeit*]:

In Medien ist der Brechungsindex manchmal frequenzabhängig, und die ebenen Wellenlösungen sind dann von der Form

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega(\mathbf{k})t} \ ,$$

wobei $\omega(\mathbf{k})$ die Dispersionsrelation beschreibt. (Im Vakuum gilt einfach $\omega(\mathbf{k}) = c|\mathbf{k}|$.)

Wir beschränken uns auf eine Komponente des elektrischen oder magnetischen Feldes und auf die Abhängigkeit von einer Raumvariablen x. Durch Superposition lässt sich die allgemeine Wellenlösung dann als

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk A(k) e^{ikx - i\omega(k)t}$$

schreiben, wobei $A(k)$ die Frequenzverteilung beschreibt.

(i) Bestimme die Gruppengeschwindigkeit der Welle, d.h. die Geschwindigkeit mit der sich das Profil der Welle (abgesehen von einem Phasenfaktor) bewegt. Nimm dazu an, dass die Funktion $A(k)$ ein scharfes Maximum bei k_0 hat und betrachte die Entwicklung

$$\omega(k) = \omega_0 + \frac{d\omega}{dk}(k_0)(k - k_0)$$

wobei $\omega_0 = \omega(k_0)$.

(ii) Wir definieren die Mittelwerte

$$\langle x \rangle = \int dx x |u(x,0)|^2 \ , \qquad \langle k \rangle = \int dk k |A(k)|^2$$

sowie die Varianz

$$(\Delta x)^2 = \int dx (x - \langle x \rangle)^2 |u(x,0)|^2 \ , \qquad (\Delta k)^2 = \int dk (k - \langle k \rangle)^2 |A(k)|^2 \ .$$

Zeige, dass

$$\Delta x \cdot \Delta k \geq \frac{1}{2} \ .$$

Hinweis Benütze die Ungleichung $2|X||Y| \geqslant X\overline{Y} + \overline{X}Y$ und die Cauchy - Schwarz Ungleichung.

(iii) Die Gruppengeschwindigkeit v_g aus (i) hängt von k_0 ab. Falls die Frequenzverteilung Varianz Δk hat, berechne die 'Varianz' der Gruppengeschindigkeit durch

$$\Delta v_g = \frac{dv_g}{dk_0} \cdot \Delta k \ .$$

Während einer Zeit t läuft daher die Welle um $\Delta x(t) = t\Delta v_g$ auseinander. Wie hängt $\Delta x(t)$ von der ursprünglichen Varianz Δx ab?