Übungsserie 0

Abgabe: 5.März 2010

Aufgabe 1 [*Identitäten der Vektoranalysis*]: In der Elektrodynamik treten häufig Standardidentitäten der Vektoranalysis auf. Diese sollen mit dieser Aufgabe wieder ins Gedächtnis zurückgerufen werden. Dazu beweise:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}) &= \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\wedge\mathbf{a}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}) \\
\mathbf{a}\wedge(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}) &= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c} \\
(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\wedge\mathbf{d}) &= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})\,(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) \\
\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\psi &= 0 \\
\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\mathbf{A}) &= 0 \\
\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\mathbf{A}) &= \mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A} \\
\mathrm{div}(\psi\mathbf{A}) &= \mathbf{A}\cdot\mathrm{grad}\,\psi + \psi\,\mathrm{div}\,\mathbf{A} \\
\mathrm{rot}(\psi\mathbf{A}) &= (\mathrm{grad}\,\psi)\wedge\mathbf{A} + \psi\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A} \\
\mathrm{grad}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) &= (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A}\wedge\mathrm{rot}\,\mathbf{B} + \mathbf{B}\wedge\mathrm{rot}\,\mathbf{A} \\
\mathrm{div}(\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}) &= \mathbf{B}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{B}\,.
\end{aligned}
$$

[**Tipp**: die i-te Komponente des Vektorproduktes $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ ist

$$(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk}\, a_j\, b_k \ ,$$

wobei ϵ_{ijk} der total-anti-symmetrische Tensor in drei Dimensionen ist mit $\epsilon_{123} = 1$. Zeige zunächst, dass

$$\sum_i \epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} \qquad \text{und} \qquad \sum_{ij} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijm} = 2\delta_{km}\ .$$

Mit Hilfe dieser Identitäten kannst Du dann leicht die obigen Gleichungen beweisen.]

Aufgabe 2 [*Stokesscher Integralsatz*]: Das Feld $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ besitzt an jedem Punkt im Raum dieselbe Richtung.

(i) Unter welcher Bedingung ist das Feld wirbelfrei, d.h. $\mathrm{rot}\,\mathbf{D}(\mathbf{x}) = 0$?

(ii) Wähle ein einfaches Beispiel eines nicht-wirbelfreien Feldes $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ der oben beschriebenen Art. Betrachte eine geschlossene Kurve, entlang derer das Linienintegral über das als Beispiel gewählte Feld nicht verschwindet, und überprüfe daran die Aussage des Stokesschen Integralsatzes.