Übungsserie 10

Abgabe: 28. Mai 2010

Aufgabe 1 [*Quantenmechanischer Runge-Lenz Vektor*]:
In der Quantenmechanik ist der Runge-Lenz Vektor durch

$$\vec{J} = \frac{1}{2\mu}\left(\vec{p} \wedge \vec{L} - \vec{L} \wedge \vec{p}\right) - \kappa\frac{\vec{x}}{r} \tag{1}$$

definiert.

(i) Zeige, dass $\vec{J}$ mit dem Hamiltonoperator $H = \frac{1}{2\mu}\vec{p}^2 - \frac{\kappa}{r}$ vertauscht.

Hinweis: Beweise zunächst, dass die l-te Komponente des Impulsoperators die Vertauschungsrelation $[p_l, \frac{1}{r}] = i\hbar\frac{x_l}{r}$ erfüllt. Dann deduziere, dass $[\vec{L}, \frac{1}{r}] = 0$.

(ii) Zeige, dass in der Quantenmechanik

$$\vec{J}^2 = \frac{2H}{\mu}\left(\vec{L}^2 + \hbar^2\right) + \kappa^2\ . \tag{2}$$

Hinweis: Beweise zunächst, dass $[L_i, p_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}p_k$ und folgere daraus, dass

$$p_l\vec{L}^2 p_l = \vec{p}^2\vec{L}^2 + 2\hbar^2\vec{p}^2\ . \tag{3}$$

Aufgabe 2 [*Mermin's marvellous machine*]:
Eine Quelle emittiert simultan drei Teilchen, die jeweils von einem Detektor in grosser Entfernung nachgewiesen werden. Jeder dieser Detektoren kann eine von zwei möglichen Observablen X oder Y bestimmen, die jeweils die Werte ± 1 annehmen können. Zudem ist die Quelle so konfiguriert, dass das Produkt aller drei Messwerte immer -1 beträgt, sofern zwei der Detektoren die Observable Y und der verbleibende die Observable X misst. Bezeichne X_i, Y_i die Messung von X bzw. Y am i-ten Detektor, so haben wir

$$X_1Y_2Y_3 = -1\,, \qquad Y_1X_2Y_3 = -1\,, \qquad Y_1Y_2X_3 = -3\,. \tag{4}$$

und somit $(X_1Y_2Y_3)(Y_1X_2Y_3)(Y_1Y_2X_3) = -1$.

(i) Begründe, warum im Rahmen der klassischen Physik $X_1X_2X_3 = -1$ gilt.

Falls die Detektoren hinreichend weit voneinander entfernt sind, so dass wir annehmen können, dass sie sich gegenseitig nicht beeinflussen, sollte die Messung von X bei i unabhängig von den Messungen der anderen beiden Detektoren sein. Deshalb sollte $X_1X_2X_3$ auch das Produkt der drei Messungen sein, falls alle drei Detektoren X messen.

Betrachten wir nun das Experiment quantenmechanisch. Hierzu nehmen wir an, dass die Teilchen jeweils Spin 1/2 haben und betrachten die Observablen $X = \sigma_1$ und $Y = \sigma_2$. Die Quelle ist derart konfiguriert, dass sich die drei Teilchen in dem Zustand

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_{+++} + \psi_{---}\right) \tag{5}$$

befinden, wobei die $\pm$-Indices sich auf den jeweiligen σ_3 Eigenwert beziehen.

(ii) Zeige, dass

$$X_1Y_2Y_3\psi = Y_1X_2Y_3\psi = Y_1Y_2X_3\psi = -\psi\,. \tag{6}$$

Damit ist die Voraussetzung (4) erfüllt.

(iii) Mit Hilfe der Antikommutatorrelation der Pauli-Matrizen zeige, dass

$$(X_1Y_2Y_3)(Y_1X_2Y_3)(Y_1Y_2X_3) = X_1(Y_2X_2Y_2)X_3 \tag{7}$$

und begründe, dass $X_1X_2X_3 = +1$.

Damit ergibt sich im quantenmechanischen Fall genau das konträre Ergebnis zum klassischen Fall.

Aufgabe 3 [*anharmonischer Oszillator*]: Betrachte den Hamiltonoperator des anharmonischen Oszillators in einer Dimension,

$$H = H_0 + H_\mathrm{a}\ , \qquad H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\ , \qquad H_\mathrm{a} = \lambda\left(\frac{x}{x_0}\right)^4\ , \tag{8}$$

wobei $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$. Wir wollen nun das Energiespektrum des anharmonischen Oszillators zur zweiten Ordnung in Störungstheorie bestimmen.

(i) Drücke H durch die Auf- und Absteigeoperatoren des harmonischen Oszillators aus.

(ii) Bestimme die Matrixelemente von H_a in der Eigenbasis $|n\rangle$, $n \in \mathbb{N}$, des harmonischen Oszillators.

(iii) Berechne die Eigenwerte von H zu zweiter Ordnung in Störungstheorie.

(iv) Die relativen Korrekturen divergieren für grosse Energie, d.h. für grosse n. Störungstheorie ist für diese Eigenzustände nicht sonderlich brauchbar. Wieso war dies zu erwarten?

Aufgabe 4 [*3d harmonischer Oszillator*]: Betrachte den isotropen 3d harmonischen Oszillator mit Kreisfrequenz ω, dessen Hamiltonoperator durch

$$H = \frac{1}{2m}\vec{p}^{\,2} + \frac{m\omega}{2}\vec{x}^{\,2} \tag{9}$$

definiert ist. Finde die Lösungen der zeitunabhängigen Schrödingergleichung unter Benutztung der Rotationssymmetrie des Problems, d.h. mache den Ansatz

$$\psi(\vec{x}) = \frac{u(r)}{r}Y_{lm}(\theta,\phi)\ , \tag{10}$$

und bestimme die Differentialgleichung für die radiale Wellenfunktion $u(r)$. Betrachte das asymptotische Verhalten der Differentialgleichung und motiviere daraus einen Potenzreihenansatz. Bestimme die resultierenden Rekursionsrelationen und berechne das Energiespektrum sowie die Entartung. Vergleiche das Resultat mit dem Ergebnis von Aufgabe 3 auf Serie 8.