Übungsserie 3

Abgabe: 26. März 2010

Aufgabe 1 [$SO(4)$]:

Konstruiere die Lie-Algebra $\mathfrak{so}(4)$ der Gruppe $SO(4)$,

$$\mathfrak{so}(4) := \left\{ \frac{d}{dt}\gamma(t) | \gamma(t) \text{ differenzierbarer Weg in } SO(4),\, \gamma(0) = \mathrm{id} \right\} = T_{\mathrm{id}} SO(4)\,. \tag{1}$$

Finde eine Basis von $\mathfrak{so}(4)$ und bestimme die Strukturkonstanten. Zeige, dass $\mathfrak{so}(4)$ isomorph zu $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ ist.

Hinweis: Identifiziere Generatoren der $\mathfrak{so}(4)$, die die Kommutatorrelationen der $\mathfrak{su}(2)$ erfüllen. Bestimme den Kommutator mit den restlichen Generatoren und konstruiere zwei kommutierende $\mathfrak{su}(2)$ Algebren.

Aufgabe 2 [*Pauli-Matrizen*]:

Wir möchten nun zeigen, dass

$$U(\omega, \mathbf{n}) = \exp\left(-i\frac{\omega}{2} n_i \sigma^i\right) \in SU(2)\,, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{R}^3\,, \quad |\mathbf{n}| = 1\,, \tag{2}$$

einer Rotation mit dem Winkel ω um die durch $\mathbf{n}$ in $\mathbb{R}^3$ definierte Achse entspricht. Die Pauli-Matrizen σ^i sind gegeben durch

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

(i) Zeige die Relation

$$\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k\,. \tag{4}$$

(ii) Beweise, dass sich $U(\omega, \mathbf{n})$ wie folgt schreiben lässt:

$$U(\omega, \mathbf{n}) = \cos(\omega/2)\mathbf{1}_2 - i\sin(\omega/2)(n_i\sigma^i)\,. \tag{5}$$

(iii) Mit Hilfe des Isomorphismus $SU(2)/\{\pm\mathrm{id}\} \simeq SO(3)$ zeige, dass $U(\omega, \mathbf{n})$ in der Tat einer Rotation mit dem Winkel ω um die durch $\mathbf{n}$ definierte Achse entspricht.

Hinweis: Berechne $x' = U(\omega, \mathbf{n})xU^\dagger(\omega, \mathbf{n})$, $x \in SL(2, \mathbb{C})$.

Insbesondere folgt also, dass eine Rotation um 2π (die einer trivialen Rotation in SO(3) entspricht) zu einem nicht-trivialen Gruppenelement von $SU(2)$ führt. Eine Rotation um 4π ist hingegen sowohl in $SO(3)$ als auch in $SU(2)$ trivial.

Aufgabe 3 [*Magnetfeld einer Spule*]:

Gegeben sei ein dünner Leiter, der schraubenförmig entlang der z-Achse läuft. Der Radius der Schraube sei R, ihre Länge sei L. Die Zahl der Windungen pro Längeneinheit sei n, und die durch den Leiter fließende Stromstärke sei I. Berechne die z-Komponente des Magnetfeldes für Punkte auf der Symmetrieachse. Zeichne das Magnetfeld als Funktion des Abstandes vom Spulenmittelpunkt. Wie lautet das Magnetfeld für $L \to \infty$ bei konstantem n ?

Hinweis: $\displaystyle\int dx \, \frac{1}{\sqrt{x^2 + w^2}^{\,3}} = \frac{x}{w^2 \cdot \sqrt{x^2 + w^2}}$.