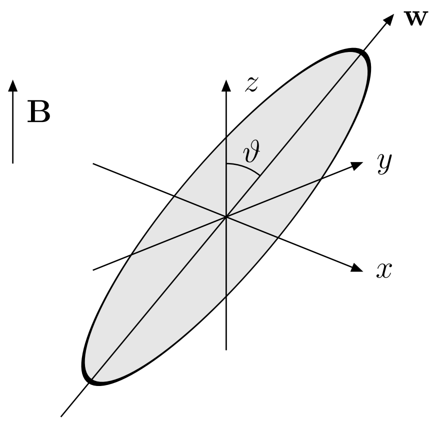
Übungsserie 4

Abgabe: 13. April 2010 (in der Übungsgruppe)

Aufgabe 1 [*Induktion im Magnetfeld*]:
Gegeben sei ein homogenes Magnetfeld $\mathbf{B}$ parallel zur z-Achse. Im Magnetfeld befinde sich ein kreisförmiger Leiter mit Radius R, der mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\mathbf{w}$ rotiert. Die Rotationsachse des Leiters verläuft durch den Mittelpunkt des Leiters und durch zwei Punkte auf dem Leiter und bildet mit der Magnetfeldrichtung den Winkel ϑ (siehe Zeichnung). Berechne die im Leiter induzierte Spannung U als Funktion der Zeit.



Aufgabe 2 [*Magnetischer Monopol*]:
Der Dirac Ansatz für das Vektorpotential eines magnetischen Monopols ist

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{g}{4\pi} \int_L \frac{d\mathbf{l}' \wedge \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}'\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} ,$$

wobei das Linienintegral entlang des Dirac Strings L zu nehmen ist. Wir betrachten den Fall, wo L die negative z-Achse von $z = -\infty$ nach $z = 0$ ist.

(i) Berechne $\mathbf{A}$ explizit und zeige, dass die Komponenten des Vektorpotentials in Kugelkoordinaten $A_r = 0$, $A_\theta = 0$ und $A_\phi = \frac{g(1-\cos\theta)}{r\sin\theta} = \frac{g}{r}\tan\frac{\theta}{2}$ sind.

(ii) Zeige, dass das zugehörige Magnetfeld $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$ überall (abgesehen von $\theta = \pi$) dieselbe Form wie das Coulomb-Feld einer elektrischen Punktladung hat.
Hinweis: in sphärischen Koordinaten ist

$$\nabla \wedge (A_\phi \mathbf{e}_\phi) = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi \sin\theta)\,\mathbf{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\mathbf{e}_\theta .$$

(iii) Ausgehend von dem in (ii) berechneten Feld $\mathbf{B}$, bestimme den magnetischen Gesamtfluss, der durch den in Abb. 1 gezeigten Kreis vom Radius $R\sin\theta$ hindurchtritt. Betrachte die beiden Fälle $\theta < \frac{\pi}{2}$ und $\theta > \frac{\pi}{2}$ separat, aber betrachte in beiden Fällen den nach oben gerichteten Fluss.

(iv) Berechne das Linienintegral $\oint \mathbf{A}d\mathbf{l}$ entlang des Kreisrandes und vergleiche das Ergebnis mit dem Resultat aus (iii). Warum stimmen die beiden Ergebnisse für $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ überein, aber unterscheiden sich für $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ um eine Konstante? Interpretiere die Differenz.

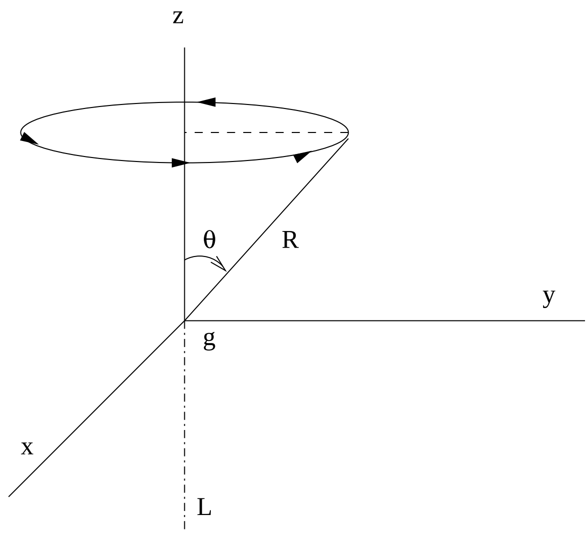


Abbildung 1: zu Aufgabe 2 (iii)

Aufgabe 3 [*Drehimpuls elektromagnetischer Felder*]:

Der Drehimpuls, der den elektromagnetischen Feldern $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ im ladungs- und stromfreien Raum zugeschrieben wird, ist

$$\mathbf{L} = \frac{1}{4\pi k\, c} \int d^3\mathbf{x}\ [\mathbf{x} \wedge (\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \wedge \mathbf{B}(\mathbf{x}, t))]\ .$$

(i) Unter der Annahme, dass die Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ kompakten Träger besitzen, zeige, dass

$$\mathbf{L} = \frac{1}{4\pi k\, c} \int d^3\mathbf{x} \left[\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \wedge \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + \sum_{j=1}^{3} E_j(\mathbf{x}, t)(\mathbf{x} \wedge \nabla) A_j(\mathbf{x}, t) \right],$$

wobei $\mathbf{A}$ das Vektorpotential ist. Der erste Term kann als Beitrag des 'Spins' der Photonen zum Gesamtdrehimpuls interpretiert werden; der zweite Term ist der Bahndrehimpuls.
Hinweis: Verwende die Identität $\epsilon_{ijk}\epsilon_{kmn} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$ und schreibe das Magnetfeld als $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$.

(ii) In der Coulomb Eichung ist das Vektorpotential durch die ebene Welle

$$\mathbf{A}(z, t) = \mathrm{Re}\left(A_+ \epsilon_+ e^{i(kz - \omega t)} + A_- \epsilon_- e^{i(kz - \omega t)} \right)$$

gegeben, wobei $\epsilon_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e_x} \pm i\mathbf{e_y})$ und $A_\pm$ beliebige Konstanten sind. Zeige, dass dieses Vektorpotential die Coulomb Eichung $\mathrm{div}\mathbf{A} = 0$ erfüllt, und bestimme die zugehörigen elektrischen und magnetischen Felder. Zeige, dass diese die Maxwell Gleichungen im leeren Raum lösen.

(iii) Unter den Annahmen von (ii) zeige, dass der Zeitmittelwert des ersten (Spin) Terms des Drehimpulses

$$\mathbf{L}_{spin} = \frac{1}{4\pi kc} \frac{|\mathbf{k}|}{2} \mathbf{e}_z \left(|A_+|^2 - |A_-|^2 \right)$$

ist. Interpretiere das Ergebnis.