Übungsserie 5

Abgabe: 23. April 2010

Aufgabe 1 [*Lineare Antenne*]:

Eine dünne lineare Antenne der Länge d wird durch einen sinusförgigen Strom der Form

$$\mathbf{j}(z,t) = J_0 \sin\left(\frac{2\pi z}{d}\right)\cos(\omega t)\,\mathbf{e}_z \qquad z \in \left[-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right]$$

angeregt.

Berechne direkt das erzeugte elektrische und magnetische Feld in der Wellenzone (also für $r \gg d$ und $r \gg \lambda$, wobei $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$), sowie die Energiestromdichte im Zeitmittel (als Funktion der Richtung) in den Fällen $d = \lambda$ und $d \ll \lambda$. Was ist die gesamte abgestrahlte Leistung in Einheiten von $Z_0 J_0^2 \cdot (d/\lambda)^4$ mit $Z_0 = 4\pi k/c$.

Hinweise: Bestimme zuerst $\mathbf{A}(r,\theta,t)$. Um die gesamte abgestrahlte Leistung bei $d = \lambda$ abzuschätzen, benutze

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x \sin(\pi x)}{1-x^2} \approx 1.557\,.$$

Aufgabe 2 [*Idealer Hohlleiter*]:

Betrachte einen unendlich langen Zylinder, dessen Längsachse entlang der z-Achse liegt, und der einen rechteckigen Querschnitt $0 \leq x \leq L_x$ und $0 \leq y \leq L_y$ hat. Die Wände des Zylinders sind ideale Leiter.

(i) Zunächst wollen wir uns allgemein das Verhalten des magnetischen Feldes an Randflächen anschauen. Dazu betrachte eine Ebene $\mathcal{E}$ im $\mathbb{R}^3$ mit Normalenvektor $\mathbf{n}$ und argumentiere mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen und des Satzes von Gauss, dass die Normalkomponente $\mathbf{B}_n = \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}$ der magnetischen Induktion $\mathbf{B}$ stetig ist.

Argumentiere weiter aus der Maxwell-Gleichung $\mathrm{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$, dass $\mathbf{B}_n = 0$ eine sinnvolle Randbedingung an ideal leitenden Oberflächen darstellt.

Im Folgenden sei $\mathbf{B}_n = 0$ die Randbedingung für das magnetische Feld $\mathbf{B}$.

(ii) Mit dem Ansatz $\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = \mathbf{E}(x,y)\,e^{i(\kappa z - \omega t)}$ und entsprechend für $\mathbf{B}$, bestimme die Feldgleichungen im Innern, sowie die Randbedingungen. Zeige, dass die Feldgleichungen implizieren, dass

$$(\Delta_2 + \lambda)\,\mathbf{E}(x,y) = (\Delta_2 + \lambda)\,\mathbf{B}(x,y) = 0\,,$$

wobei $\lambda = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \kappa^2$ und Δ_2 der 2-dimensionale Laplace-Operator in der x-y-Ebene ist.

Hinweis: Drücke die x- und y-Komponenten der Felder durch die z-Komponenten aus. Die Randbedingungen können ebenfalls in den z-Komponenten geschrieben werden.

(iii) Bestimme die Lösungen für den sogenannten TM-Fall, für den $B_z = 0$ gilt.

Hinweis: Du kannst annehmen, dass $\lambda \neq 0$ — Warum?

(iv) Im TE-Fall ist $E_z = 0$. Finde zunächst die Lösung falls $\lambda \neq 0$. Schliesslich studiere den Fall $\lambda = 0$. Zeige, dass in diesem Fall $E_z = B_z = 0$ (TEM-Fall), und dass die Randbedingungen implizieren, dass es nur die triviale Lösung $\mathbf{E} = \mathbf{B} = 0$ gibt.

Hinweis: Zeige, dass $\int_\Gamma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ gilt für jeden geschlossenen Weg Γ im Hohlraum falls $\lambda = 0$. Führe das Problem auf eines der Elektrostatik zurück, so dass nur $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \Phi$ und $\Delta_2 \Phi = 0$ gelöst werden muss.

(v) Wie verändert sich die Analyse des TEM-Falls wenn der Querschnitt kein Rechteck, sondern ein Kreisring $a \leq r \leq b$ (Koaxialkabel) ist? Finde für diese Geometrie die allgemeine TEM-Lösung.

Hinweis: Löse $\Delta_2 \Phi = 0$ in der Ebene mit der Randbedingung, dass Φ auf den beiden Kreisen jeweils konstant sein muss. Berechne daraus die Felder.

Aufgabe 3 [*Invarianten des elektromagnetischen Feldes*]:

(i) Zeige, dass die beiden Grössen

$$I_1 = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad \text{und} \quad I_2 = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}$$

invariant unter eigentlichen orthochronen Lorentztransformationen sind, und drücke sie durch die elektrischen und magnetischen Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ aus.

(ii) In einem Inertialsystem seien $\mathbf{E}(x)$ und $\mathbf{B}(x)$ orthogonal zueinander. Zeige, dass dieses dann in allen Inertialsystemen gilt.

(iii) In einem Inertialsystem sei $\mathbf{E}(x) = 0$ und $\mathbf{B}(x) \neq 0$. Gibt es dann ein Inertialsystem in dem $\mathbf{B}(x) = 0$ gilt?