Übungsserie 7

Abgabe: 7. Mai 2010

Aufgabe 1 [*Teilchen in einer eindimensionalen Box*]:
Wir betrachten ein eindimensionales Teilchen, dessen Bewegung auf das Intervall $[0, a]$ eingeschränkt ist. Die zugehörigen Energieeigenzustände sind

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) , \quad n = 1, 2, 3, \ldots . \tag{1}$$

(i) Bestimme den Erwartungswert $\langle x \rangle$ und die Varianz $\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$ im n-ten Eigenzustand. Zeige weiter, dass man im Limes $n \to \infty$ die klassischen Werte erhält. *(Im klassischen Fall wird das Teilchen an beiden Wänden der Box reflektiert und ist damit innerhalb der Box statistisch gleichverteilt.)*

(ii) Bestimme in einer ähnlichen Weise den Erwartungswert und die Varianz des Impulses p und verifiziere die Heisenberg'sche Unschärferelation $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$ für jeden Energieeigenzustand.

Aufgabe 2 [*Teilchen in einer sich ausdehnenden Box*]:
Wir betrachten wieder ein eindimensionales Teilchen, dessen Bewegung auf ein Intervall $[0, a]$ beschränkt ist. Es sei im niedrigsten (stationären) Energieeigenzustand, wenn die Box instantan zum Zeitpunkt t_0 auf $[0, 2a]$ vergrössert wird. Durch eine Entwicklung der ursprünglichen Wellenfunktion in Energieeigenfunktionen für das Intervall $[0, 2a]$, bestimme die Wellenfunktion für $t > t_0$ und zeige, dass dies eine Superposition von Eigenzuständen der Energien

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{8ma^2} , \quad n = 2 \text{ und } n = 1, 3, 5, \ldots ,$$

ist. Zeige weiter, dass die Wahrscheinlichkeit, nach dem Ausdehnen eine unveränderte Energie des Teilchens vorzufinden, $1/2$ beträgt.

Aufgabe 3 [*Allgemeine Potentiale*]:

(i) Sei $V(x)$ ein beliebiges eindimensionales Potential mit $\lim_{x \to \pm\infty} V(x) = 0$. Sei weiter $\chi(x)$ ein stationärer Zustand, der an $V(x)$ gestreut wird, mit asymptotischen Verhalten $\chi(x) = e^{ikx} + Ae^{-ikx}$ bei $x \ll 0$ und $\chi(x) = Be^{ikx}$ bei $x \gg 0$. Zeige, dass der Wahrscheinlichkeitsstrom unabhängig von x ist, und folgere weiter, dass $|A|^2 + |B|^2 = 1$. Wie ist dieses zu interpretieren?

(ii) Zeige, dass für einen beliebigen Zustand $\langle T \rangle \geq 0$ gilt, wobei $T = p^2/2m$. Betrachte $\langle T + V \rangle$ und folgere, dass für einen beliebigen Potentialwall $V(x)$ der niedrigste Energieeigenzustand einen Energieeigenwert besitzt, der grösser ist als $\inf_x V(x)$.