

KLASSISCHE ELEKTRODYNAMIK

Frühjahrssemester 2009

Matthias R. Gaberdiel

Institut für Theoretische Physik

Hönggerberg, KIT 23.1

ETH Zürich

CH-8093 Zürich

Email: gaberdiel@itp.phys.ethz.ch

Contents

1	Einleitung	5
2	Elektrostatik	6
2.1	Das Coulomb Gesetz und das elektrische Feld	6
2.2	Das elektrische Potential und die Feldgleichungen	7
2.3	Beispiele einfacher Ladungsverteilungen	10
2.3.1	Elektrischer Dipol	10
2.3.2	Homogen geladene Kugel	11
2.3.3	Flächenhafte Ladungsverteilungen	12
2.4	Die elektrostatische Energie einer Ladungsverteilung	13
2.5	Die Potentialgleichung	15

2.6	Allgemeine Lösungen der Potentialgleichung mit Randbedingungen . . .	17
2.6.1	Dirichlet Randbedingungen	17
2.6.2	Neumann Randbedingungen	19
2.7	Explizite Lösungen ausgewählter Randwertprobleme	19
2.7.1	Der leitende Halbraum	20
2.7.2	Aussenraum einer Kugel	20
2.7.3	Eigenfunktionen	22
2.7.4	Kapazitätskonstanten	24
2.8	Multipolentwicklung	25
2.8.1	Laplace Gleichung in Kugelkoordinaten	26
2.8.2	Die Legendre Gleichung	27
2.8.3	Zwischenspiel: Darstellungstheorie von $SO(3)$	31
2.8.4	Sphärische Multipolmomente	37
3	Die Maxwell Gleichungen	41
3.1	Stationäre Ströme und das Ampère'sche Gesetz	41
3.2	Das Vektorpotential und die Grundgleichungen der Magnetostatik	43
3.3	Einfache Stromverteilungen	46
3.3.1	Der magnetische Dipol	46
3.3.2	Oberflächenstrom	47
3.4	Das Faraday'sche Induktionsgesetz	48
3.5	Der Maxwell'sche Verschiebungsstrom	50
3.6	Die Maxwell Gleichungen und ihre Konsequenzen	50
3.6.1	Das freie elektromagnetische Feld	51
3.6.2	Spezielle Relativitätstheorie	51
3.6.3	Erhaltungsgrößen	52
3.6.4	Elektromagnetische Potentiale	52
4	Elektromagnetische Wellen	55
4.1	Das freie Feld	55
4.1.1	Monochromatische Felder	56
4.2	Dynamik des freien Feldes	58
4.3	Das Feld einer Ladungs- und Stromverteilung	61
4.3.1	Die retardierten und avancierten Potentiale	62
4.4	Ausstrahlung	63
4.4.1	Elektrische Dipolstrahlung	66
4.4.2	Magnetische Dipolstrahlung	67
4.4.3	Elektrische Quadrupolstrahlung	67
4.4.4	Lineare Antenne	69
5	Die spezielle Relativitätstheorie	72
5.1	Galileisymmetrie und die Postulate von Einstein	72
5.2	Lorentzgruppe und Poincarégruppe	74

5.3	Lorentztransformationen	76
5.4	Zwischenspiel: Tensoranalysis	80
5.4.1	Operationen auf Tensoren	83
5.4.2	Tensorfelder	85
5.5	Invarianz der Maxwell Gleichungen unter Lorentztransformationen	88
5.5.1	Elektro-magnetische Dualität	92
5.5.2	Potential, Eichinvarianz und Kontinuitätsgleichung	93
5.6	Lagrange Formulierung	94
6	Erhaltungssätze	96
6.1	Ladung	96
6.2	Energie und Impuls	96
6.2.1	Freie Felder	98
6.2.2	Statische Felder	98
6.3	Drehimpuls	99
6.3.1	Freie Felder	100
6.3.2	Statische Felder	101
7	Das Feld einer Punktladung	102
7.1	Das retardierte Potential	102
7.2	Retardiertes Feld	103
7.3	Dreidimensionale Form	103
7.4	Ausgestrahlte Energie	104
7.4.1	Linearbeschleuniger	105
7.4.2	Kreisbeschleuniger	106
7.5	Strahlungscharakteristik schneller Teilchen	107
8	Elektrodynamik von Materie	109
8.1	Das Modell und mittlere Felder	109
8.1.1	Multipolentwicklung	109
8.2	Die makroskopischen Maxwell Gleichungen	113
8.3	Dispersion	114
8.3.1	Dissipativität	117
8.4	Wellen im Dielektrikum	118
8.5	Erhaltungssätze	121
8.6	Stetigkeitsbedingungen an Grenzflächen	121
9	Anwendungen	123
9.1	Reflexion und Brechung	123
9.1.1	Transversales elektrisches Feld (TE)	124
9.1.2	Transversales magnetisches Feld (TM)	125
9.2	Diskussion	126
9.2.1	Senkrechte Inzidenz	126
9.2.2	Brewster Winkel	126

9.2.3	Totalreflexion	126
9.3	Das Feld in einem Leiter	127
9.4	Das Feld in einem Supraleiter	129
9.5	Streuung von Licht an Materie	130
A	Identitäten der Vektoranalysis	133

1 Einleitung

Elektrische und magnetische Erscheinungen waren schon seit der Antike bekannt [z.B. Aufladbarkeit von Bernstein, magnetische Wechselwirkungen des Magneteisensteins]. Als quantitative Wissenschaft entwickelte sich die Elektrodynamik jedoch erst zwischen etwa 1770 und 1909. Den Beginn dieser Untersuchungen bilden die Experimente von Cavendish von 1771-1773, sowie die Arbeiten von Coulomb (ab 1785). Coulomb hat das nach ihm benannte Kraftgesetz zwischen elektrischen Ladungen formuliert.

Aufgrund der Oersted'schen Versuche von 1819 (Ablenkung einer Magnetnadel in der Nähe eines von elektrischem Strom durchflossenen Leiters) hat Ampère (1820-1825) die Gesetze entdeckt, welche die magnetische Wirkung von Strömen (und dadurch ihre Wechselwirkungen) beschreiben. In der Version des Biot-Savart'schen Gesetzes handelt es sich dabei um eine der inhomogenen Maxwell-Gleichungen (in welcher allerdings der Maxwell'sche Verschiebungsstrom noch fehlt). [Die zweite inhomogene Maxwell Gleichung ist die allgemeine Fassung des Coulombschen Gesetzes.]

Zunächst wurden in der Elektrodynamik Fernwirkungsgesetze nach dem Newton'schen Vorbild formuliert. Der konzeptuelle Durchbruch gelang Faraday (1791-1867), der die Idee elektrischer und magnetischer Kraft- oder Feldlinien einführte und damit die Elektrodynamik als Feldtheorie formulierte. Diese Entdeckungen wurden durch Maxwell in mathematische Sprache übersetzt. Insbesondere hat Maxwell die endgültige Formulierung der (nach ihm benannten) elektromagnetischen Grundgleichungen als Feldgleichungen gefunden (1873). Um diese mathematisch konsistent zu machen führte er den nach ihm benannten *Verschiebungsstrom* ein.

Natürlich müssen wir im Zusammenhang mit der endgültigen Ausgestaltung der klassischen Elektrodynamik auch Einstein und Minkowski erwähnen, deren revolutionäre Beiträge zur speziellen Relativitätstheorie und deren Anwendung auf die Elektrodynamik bewegter Körper (1905, bzw. 1909) unsere heutige Denkweise massgeblich beeinflussen.

Seit 1905 war das Hauptproblem der theoretischen Physik, die klassische Elektrodynamik mit der Quantentheorie (Planck'sche Strahlungsformel; photoelektrischer Effekt) zu vereinen, woraus schliesslich die *Quantenelektrodynamik* wurde. Sie ist wohl die präziseste physikalische Theorie, die wir besitzen; ihre mathematische Struktur ist aber immer noch nicht befriedigend verstanden.

Die klassische Elektrodynamik wird heute als Grenzfall der Quantenelektrodynamik aufgefasst. Darauf werden wir allerdings nicht eingehen können.

2 Elektrostatik

2.1 Das Coulomb Gesetz und das elektrische Feld

In diesem Kapitel wollen wir uns mit statischen (d.h. zeit-unabhängigen) Phänomenen elektrischer Ladungen beschäftigen. Das zentrale Gesetz ist dabei das Coulomb Gesetz, das die Kraft zweier Punktladungen aufeinander beschreibt:

$$\mathbf{F} = k q_1 q_2 \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^3} \quad (2.1.1)$$

ist die Kraft auf die Punktladung q_2 am Punkt \mathbf{x}_2 , die von der Punktladung q_1 am Punkt \mathbf{x}_1 hervorgerufen wird. Die Konstante $k > 0$ hängt vom Masssystem ab: im sogenannten Gauss'schen System wählt man $k = 1$, wohingegen im SI-System

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad \epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{A^2 s^2}{Nm^2}. \quad (2.1.2)$$

Wir werden in dieser Vorlesung meistens einfach k schreiben und uns nicht auf ein Masssystem festlegen.

Die zwei Punkte können im Allgemeinen weit voneinander entfernt sein. Wenn wir die Position einer der beiden Punktladungen ändern, hat das einen (sofortigen) Einfluss auf die Kraft, die von der anderen Punktladung gespürt wird. Wie wir später sehen werden (und wie Ihr vielleicht schon gehört habt), gibt es jedoch eine endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit (die Lichtgeschwindigkeit — das ist eine der zentralen Einsichten der Speziellen Relativitätstheorie); diese Fernwirkung ist daher physikalisch problematisch. [Das eben geschilderte Problem tritt erst bei dynamischen Prozessen (d.h. bei zeitabhängigen Prozessen) auf; für die Beschreibung der Elektrostatik ist die folgende Umformulierung daher nicht direkt notwendig, aber da wir sie für die korrekte Beschreibung der Elektrodynamik benötigen werden, macht es Sinn, sie bereits jetzt einzuführen.]

Um dieses Problem der Fernwirkung zu umgehen, führen wir das Konzept des *elektrischen Feldes* $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ ein: dazu betrachten wir eine kleine Probeladung e am Punkt \mathbf{x} , und definieren

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{e} \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad (2.1.3)$$

wobei $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ die Kraft ist, die die Probeladung e am Punkt \mathbf{x} erfährt. [Streng genommen definiert man das elektrische Feld vermittlems der obigen Formel im Limes $e \rightarrow 0$; damit kann man den Effekt, den die Probeladung auf die Ladungskonfiguration, die die Kraft (und daher das elektrische Feld) erzeugt, ausschliessen.] In der Gegenwart eines elektrischen Feldes ist die Kraft auf ein Probeteilchen mit Ladung q am Punkt \mathbf{x} dann gerade

$$\mathbf{F} = q \mathbf{E}(\mathbf{x}).$$

Das Coulomb Gesetz besagt dann einfach, dass eine Punktladung q am Punkt \mathbf{x}_0 das elektrische Feld

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = k q \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3} \quad (2.1.4)$$

erzeugt.

Es ist eine experimentelle Tatsache, dass sich die elektrischen Felder mehrerer Punktladungen vektoriell addieren:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = k \sum_{i=1}^n q_i \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3} \quad (2.1.5)$$

ist dann das elektrische Feld, das von Punktladungen q_i bei \mathbf{x}_i erzeugt wird. Für ein System vieler kleiner Punktladungen wird die Ladungsverteilung besser durch eine *Ladungsdichte* $\rho(\mathbf{x})$ beschrieben; das daraus resultierende elektrische Feld ist dann

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = k \int d^3\mathbf{y} \rho(\mathbf{y}) \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3}. \quad (2.1.6)$$

In dieser Sprache wird eine Punktladung q bei \mathbf{x}_0 durch die sogenannte *Dirac Delta-Funktion* (die eigentlich eine Distribution und keine Funktion ist) beschrieben,

$$\rho(\mathbf{x}) = q \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (2.1.7)$$

Die Dirac Delta-Funktion ist dadurch charakterisiert, dass

$$\int_V d^3\mathbf{y} f(\mathbf{y}) \delta^{(3)}(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) = \begin{cases} f(\mathbf{x}_0) & \text{falls } \mathbf{x}_0 \in V \\ 0 & \text{falls } \mathbf{x}_0 \notin V, \end{cases} \quad (2.1.8)$$

wobei $f(\mathbf{y})$ eine beliebige (hinreichend glatte) Funktion ist. Die Ableitung der Delta-Funktion kann vermittels partieller Integration definiert werden:

$$\int d^3\mathbf{y} f(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y^i} \delta^{(3)}(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) = - \int d^3\mathbf{y} \left(\frac{\partial}{\partial y^i} f(\mathbf{y}) \right) \delta^{(3)}(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0). \quad (2.1.9)$$

2.2 Das elektrische Potential und die Feldgleichungen

Wie wir oben erklärt haben, ist das elektrische Feld einer Punktladung gerade durch

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = q k \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3} \quad (2.2.1)$$

beschrieben. Für das weitere ist es nützlich, dies als

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = q k \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3} = -\nabla \left[q k \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \right] \quad (2.2.2)$$

zu schreiben. Hier haben wir ausgenutzt, dass

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|\mathbf{x}|} = \frac{\partial}{\partial x_i} (x_j x_j)^{-1/2} = -\frac{1}{2} (x_j x_j)^{-3/2} 2x_i = - \left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \right)_i \quad (2.2.3)$$

gilt. Die Funktion, deren Gradient das elektrische Feld beschreibt, nennen wir das *elektrische Potential* $\Phi(\mathbf{x})$,

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla \Phi(\mathbf{x}) = -\text{grad } \Phi(\mathbf{x}). \quad (2.2.4)$$

Für ein gegebenes elektrisches Feld ist das elektrische Potential natürlich durch (2.2.4) nicht eindeutig bestimmt; insbesondere können wir zu einer Lösung von $\Phi(\mathbf{x})$ immer eine Konstante dazu addieren, ohne das zugehörige elektrische Feld zu verändern. (Inwieweit das elektrische Potential durch Randbedingungen eindeutig festgelegt werden kann, wird weiter unten diskutiert werden.)

Für eine beliebige Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{x})$ im freien Raum \mathbb{R}^3 können wir das zugehörige elektrische Potential durch

$$\Phi(\mathbf{x}) = k \int d^3\mathbf{y} \rho(\mathbf{y}) \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \quad (2.2.5)$$

definieren. Da das elektrische Feld der Gradient einer (skalaren) Funktion (nämlich des elektrischen Potentials) ist, gilt sofort

$$\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\text{rot grad } \Phi(\mathbf{x}) = 0. \quad (2.2.6)$$

[Dies kann am einfachsten in Komponenten gezeigt werden: die *ite* Komponente des Vektorproduktes auf der rechten Seite ist einfach

$$(\nabla \wedge \mathbf{E})_i = \epsilon_{ijk} \partial_j E_k = -\epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \Phi = 0, \quad (2.2.7)$$

wobei ϵ_{ijk} der total anti-symmetrische Tensor in drei Dimensionen (mit $\epsilon_{123} = +1$) ist, und das Verschwinden der letzten Gleichung direkt aus der Antisymmetrie folgt. Im folgenden werden wir solche Identitäten nicht mehr ableiten; die wichtigsten sind im Appendix zusammengestellt.] Dies ist eine der Feldgleichungen der Elektrostatik. Sie besagt, dass das durch das elektrische Feld definierte Kraftfeld *konservativ* ist, d.h. dass

$$\oint d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0. \quad (2.2.8)$$

Dies ist eine direkte Konsequenz des *Stokes'schen Theorems*, das besagt, dass

$$\oint_{\partial S} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \int_S d\mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{E}, \quad (2.2.9)$$

wobei S eine zwei-dimensionale Fläche mit (ein-dimensionalem) Rand ∂S ist, und $d\mathbf{A}$ das gerichtete Flächenelement auf S ist. [$d\mathbf{A}$ ist ein Vektor, der normal zu S steht, und dessen 'Länge' proportional zu dem Flächenelement auf S ist.]

Die andere Feldgleichung ist eine Folge des *Gauss'schen Gesetzes*, das besagt, dass der Fluss des elektrischen Feldes durch eine geschlossene Oberfläche proportional zu der im Innern dieser Oberfläche enthaltenen Ladung ist: sei V ein drei-dimensionales

Volumen und sei $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ ein gegebenes elektrisches Feld, das auf dem Rand von V , ∂V , wohl definiert ist. Dann gilt

$$\int_{\partial V} d\mathbf{S}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{y}) = 4\pi k \int_V d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}), \quad (2.2.10)$$

wobei $\rho(\mathbf{x})$ die Ladungsdichte ist, die $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ mittels (2.1.6) generiert, und $d\mathbf{S}(\mathbf{y})$ das gerichtete Flächenelement auf ∂V ist. [$d\mathbf{S}(\mathbf{y})$ ist ein Vektor, der normal zu der Tangentialebene bei \mathbf{y} ist, und dessen 'Länge' proportional zum Flächenelement dS ist.]

Das Gauss'sche Gesetz ist eine Konsequenz des Coulomb Gesetzes. Wegen des Superpositionsprinzip genügt es, das Gauss'sche Gesetz für eine Punktladung abzuleiten. Ferner können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass diese Punktladung bei $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ sitzt. Wir müssen daher zeigen, dass

$$\int_{\partial V} d\mathbf{S}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{y}) = \begin{cases} 4\pi k q & \text{falls } \mathbf{0} \in V, \\ 0 & \text{falls } \mathbf{0} \notin V, \end{cases} \quad (2.2.11)$$

wobei $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ durch (2.2.1) gegeben ist (mit $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$).

Zunächst betrachten wir den Fall, bei dem $\mathbf{0}$ nicht in V enthalten ist. Dann ist $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ tatsächlich überall im Inneren von V definiert, und wir können das Divergenz Theorem anwenden. [Das Divergenz-Theorem besagt, dass

$$\int_V d^3\mathbf{x} \operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \int_{\partial V} d\mathbf{S}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{y}).] \quad (2.2.12)$$

Wir berechnen dann

$$\operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{x}) = qk \sum_i \partial_i (x_i(x_j x_j)^{-3/2}) \quad (2.2.13)$$

$$= qk \sum_i \left(\delta_{ii}(x_j x_j)^{-3/2} - \frac{3}{2} x_i(x_j x_j)^{-5/2} 2x_i \right) = 0, \quad (2.2.14)$$

wobei wir benutzt haben, dass $\delta_{ii} = 3$. Wegen des Divergenz Theorems verschwindet dann das Oberflächenintegral, und wir haben die zweite Möglichkeit in (2.2.11) bewiesen.

Im anderen Fall, d.h. falls $\mathbf{0} \in V$, können wir daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit V durch eine kleine Kugel mit Zentrum $\mathbf{0}$ und Radius r ersetzen. Dann gilt

$$\int_{\partial V} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = qk \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 \frac{1}{r^2}, \quad (2.2.15)$$

wobei wir Kugelkoordinaten gewählt haben, d.h.

$$x_1 = r \sin \theta \cos \phi, \quad x_2 = r \sin \theta \sin \phi, \quad x_3 = r \cos \theta. \quad (2.2.16)$$

[Das Flächenelement auf der Oberfläche der Kugel ist dann $r^2 \sin \theta d\theta d\phi$, und die Integrationsgrenzen sind wie oben angegeben. Ferner haben wir benutzt, dass das elektrische

Feld gerade proportional zu der Normalen ist und dass daher das Skalarprodukt einfach $1/r^2$ ist.] Das Integral in (2.2.15) kann nun einfach ausgeführt werden, und wir erhalten

$$\int_{\partial V} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 4\pi q k \quad \text{falls } \mathbf{0} \in V. \quad (2.2.17)$$

Dies beweist (2.2.11). Das Oberflächenintegral über das elektrische Feld ist daher also gerade zur eingeschlossenen Ladung proportional (wobei die Proportionalitätskonstante durch $4\pi k$ gegeben ist).

Um die infinitesimale Version dieser Gleichung zu erhalten, benutzen wir nochmals das Divergenz-Theorem und erhalten daher

$$\int_V d^3\mathbf{x} \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 4\pi k \int_V d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}). \quad (2.2.18)$$

Da dies für beliebige V gilt, folgt daraus, dass

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 4\pi k \rho(\mathbf{x}). \quad (2.2.19)$$

Zusammen mit (2.2.6) sind das die Feldgleichungen der Elektrostatik.

Wie wir gesehen haben, können wir das elektrische Feld als Gradienten des elektrischen Potentials Φ schreiben

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla \Phi(\mathbf{x}). \quad (2.2.20)$$

Dann ist (2.2.6) offensichtlich, und (2.2.19) ist gerade die *Poisson-Gleichung*

$$\Delta \Phi = -4\pi k \rho. \quad (2.2.21)$$

Hier ist $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ der Laplace Operator. Anstelle der beiden Feldgleichungen (2.2.6) und (2.2.19) können wir daher ebensogut (2.2.21) lösen; das elektrische Feld kann dann durch (2.2.20) aus dem elektrischen Potential bestimmt werden.

2.3 Beispiele einfacher Ladungsverteilungen

Bevor wir eine allgemeine Lösungsmethode für die Berechnung des elektrischen Potentials (und des dadurch beschriebenen elektrischen Feldes) besprechen wollen, ist es vielleicht instruktiv, ein paar einfache Beispiele zu analysieren.

2.3.1 Elektrischer Dipol

Betrachte zwei Punktladungen, eine mit Ladung e bei \mathbf{a} und eine zweite mit Ladung $-e$ bei $\mathbf{0}$. Die Gesamtladung dieser Konfiguration verschwindet, aber sie erzeugt dennoch ein nicht-triviales elektrisches Feld. Wegen des Superpositionsprinzips ist das elektrische Potential dieser Konfiguration nämlich einfach

$$\Phi(\mathbf{x}) = k e \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} - \frac{1}{|\mathbf{x}|} \right). \quad (2.3.1)$$

Um einen *Dipol* zu beschreiben, betrachten wir nun den Limes, in dem $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{0}$, wobei gleichzeitig $e \rightarrow \infty$ in solcher Weise, dass $\mathbf{p} = e\mathbf{a}$ konstant bleibt. Um das Potential zu berechnen, schreiben wir $e = 1/\lambda$, $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{p}$ und nehmen den Limes $\lambda \rightarrow 0$. Dann finden wir

$$\Phi_d(\mathbf{x}) = k \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \lambda\mathbf{p}|} - \frac{1}{|\mathbf{x}|} \right) \quad (2.3.2)$$

$$= k \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{x}|} \right) \cdot (-\mathbf{p}) \quad (2.3.3)$$

$$= k \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}. \quad (2.3.4)$$

Die Ladungsdichte eines Dipol ist andererseits

$$\rho_d(\mathbf{x}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} (\delta(\mathbf{x} - \lambda\mathbf{p}) - \delta(\mathbf{x})) \quad (2.3.5)$$

$$= -\mathbf{p} \cdot \nabla \delta^{(3)}(\mathbf{x}). \quad (2.3.6)$$

2.3.2 Homogen geladene Kugel

Als nächstes Beispiel diskutieren wir das elektrische Feld, das von einer homogen geladenen Kugel bei $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ mit Radius R und konstanter Ladungsdichte ρ erzeugt wird. Da das System rotationsinvariant ist, muss auch das elektrische Potential rotationsinvariant sein, d.h. Φ ist (in Kugelkoordinaten) nur eine Funktion von r . Das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ ist daher überall proportional zu \mathbf{x} . Die Stärke des elektrischen Feldes kann dann direkt aus dem Gauss'schen Gesetz abgeleitet werden:

$$4\pi r^2 |\mathbf{E}(|\mathbf{x}| = r)| = \int_{S_r} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S} = 4\pi k Q_r, \quad (2.3.7)$$

wobei S_r die Kugel mit Radius r ist und Q_r die darin eingeschlossene Ladung beschreibt. Da die Ladungsverteilung homogen ist, gilt einfach

$$Q_r = \begin{cases} \frac{r^3}{R^3} Q & r \leq R \\ Q & r \geq R, \end{cases} \quad (2.3.8)$$

wobei $Q = \frac{4\pi R^3}{3} \rho$ die Gesamtladung der Kugel ist. Das elektrische Feld ist daher also

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{kQ}{R^3} \mathbf{x} & |\mathbf{x}| \leq R \\ kQ \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} & |\mathbf{x}| \geq R. \end{cases} \quad (2.3.9)$$

Das zugehörige Potential ist

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{3kQ}{2R} - \frac{kQ}{2R^3} |\mathbf{x}|^2 & |\mathbf{x}| \leq R \\ \frac{kQ}{|\mathbf{x}|} & |\mathbf{x}| \geq R. \end{cases} \quad (2.3.10)$$

2.3.3 Flächenhafte Ladungsverteilungen

Ein häufiges Problem in der Elektrostatik ist die Bestimmung des elektrischen Feldes, das durch eine flächenhafte Ladungsverteilung generiert wird. Das Gauss'sche Gesetz erlaubt es uns, dieses Problem zumindest partiell zu lösen. Betrachte ein glattes Flächenstück S (mit Normalenvektor \mathbf{n}), auf dem eine stetige (flächenhafte) Ladungsverteilung σ konzentriert ist. Seien \mathbf{E}_1 und \mathbf{E}_2 die elektrischen Felder direkt oberhalb und unterhalb dieser Fläche. Das Gauss'sche Gesetz impliziert dann direkt, dass

$$(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{n} = 4\pi k\sigma. \quad (2.3.11)$$

[Hier haben wir V so gewählt, dass es von zwei Flächen parallel zu S , eine oberhalb und eine unterhalb von S begrenzt wird. Im Limes, in dem der Abstand zwischen diesen beiden Flächen verschwindet, tragen nur diese beiden Flächen zum Oberflächenintegral bei, und die obige Gleichung folgt.]

Diese Gleichung bestimmt noch nicht \mathbf{E}_1 und \mathbf{E}_2 vollständig; sie impliziert lediglich, dass die Normalkomponente von \mathbf{E} um den Betrag $4\pi k\sigma$ an der Fläche springt. Andererseits sind die Tangentialkomponenten von \mathbf{E} stetig an S : dies kann mit Hilfe von (2.2.6) gezeigt werden. Dazu betrachte eine kleine Schlaufe L , die (abgesehen von zwei beliebig kurzen Endstücken) aus zwei Liniensegmenten besteht, von denen eines gerade oberhalb von S , während das andere gerade unterhalb von S verläuft. (Die beiden Liniensegmente haben dann unterschiedliche Orientierung.) Wegen Stokes' Theorem (und (2.2.6)) verschwindet dann das Linienintegral entlang L ; dies impliziert, dass

$$(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{t} = 0, \quad (2.3.12)$$

wobei \mathbf{t} ein beliebiger Tangentialvektor auf S ist. Die Tangentialkomponente von \mathbf{E} ist daher bei S stetig.

Ein einfacher Fall ist zum Beispiel eine homogen geladene Ebene. Sei S die Ebene $x^3 = 0$ mit homogener Flächenladungsdichte σ . Da das System unter Translationen in der x^1 und x^2 Richtung invariant ist, muss auch das elektrische Potential von x^1 und x^2 unabhängig sein. Das elektrische Feld hat daher nur eine nicht-triviale Komponente in der 3-Richtung. Weiterhin folgt aus (2.3.11), dass sich die 3-Komponente des elektrischen Feldes für $x^3 > 0$ um $4\pi k\sigma$ von derjenigen für $x^3 < 0$ unterscheidet.

Eine Lösung für das elektrische Feld, die die beiden Feldgleichungen (2.2.6) und (2.2.19) erfüllen, ist dann

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 4\pi \alpha k\sigma \mathbf{e}_3 & x^3 > 0 \\ 4\pi (\alpha - 1) k\sigma \mathbf{e}_3 & x^3 < 0, \end{cases} \quad (2.3.13)$$

wobei α eine Konstante ist. Das zugehörige elektrische Potential ist dann

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 4\pi \alpha k\sigma x^3 & x^3 > 0 \\ 4\pi (\alpha - 1) k\sigma x^3 & x^3 < 0 \end{cases} \quad (2.3.14)$$

und ist daher für jede Wahl von α stetig. Um die Lösung eindeutig zu bestimmen (d.h. um α festzulegen) muss man jedoch noch die Randbedingungen bei $x^3 = \pm\infty$

spezifizieren. [Die ‘natürliche’ Wahl der Randbedingungen, nämlich, dass das elektrische Feld im Unendlichen verschwindet, ist in diesem Fall nicht mit den Feldgleichungen kompatibel.]

Eine ein wenig natürlichere Konfiguration ist die des *Plattenkondensators*. In einer idealisierten Beschreibung besteht dieser aus zwei parallelen unendlichen (geladenen) Ebenen, einer bei $x^3 = 0$ mit Ladungsdichte σ , und einer bei $x^3 = a$ mit Ladungsdichte $-\sigma$. Wegen des Superpositionsprinzips ist das elektrische Feld dieser Konfiguration gerade die Summe (bzw. Differenz) der obigen Lösungen. Insbesondere kann man nun eine (eindeutige) Lösung finden, für die das elektrische Feld im Unendlichen verschwindet:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{0} & x^3 < 0 \\ 4\pi k\sigma \mathbf{e}_3 & 0 < x^3 < a \\ \mathbf{0} & x^3 > a. \end{cases} \quad (2.3.15)$$

Das zugehörige elektrische Potential ist

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} C & x^3 < 0 \\ -4\pi k\sigma x^3 + C & 0 < x^3 < a \\ -4\pi k\sigma a + C & x^3 > a, \end{cases} \quad (2.3.16)$$

wobei C eine Konstante ist. Die Differenz des elektrischen Potentials bei $x^3 > a$ und $x^3 < 0$ ist also gerade $4\pi k\sigma a$. Dies ist die Arbeit $W = aE^3$, die eine Einheitsladung beim Durchgang durch den Kondensator leisten muss.

2.4 Die elektrostatische Energie einer Ladungsverteilung

Die Kraft, die eine Probeladung q in dem elektrischen Feld $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ erfährt, ist einfach $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = q\mathbf{E}(\mathbf{x})$. Das elektrische Feld ist seinerseits der negative Gradient des elektrischen Potentials $\Phi(\mathbf{x})$. Daher ist die elektrische Kraft, die eine Probeladung q erfährt, gerade der negative Gradient von $q\Phi(\mathbf{x})$. Diese Grösse beschreibt daher die *potentielle (elektrische) Energie*, die die Probeladung im elektrischen Kraftfeld besitzt. Insbesondere ist die Arbeit

$$W = - \int_A^B \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{l} = q \int_A^B \nabla\Phi(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{l} = q\Phi(\mathbf{x}_B) - q\Phi(\mathbf{x}_A) \quad (2.4.1)$$

gerade die Differenz der potentiellen Energie an den Endpunkten. Wie wir schon oben gesehen haben ist das elektrische Potential einer Punktladung q_0 bei \mathbf{x}_0

$$\Phi(\mathbf{x}) = k \frac{q_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}. \quad (2.4.2)$$

Das Potential ist hier so normiert worden, dass Φ im Unendlichen verschwindet.

Betrachte nun die Konfiguration von N Punktladungen q_i bei \mathbf{x}_i . Die elektrostatische Energie dieser Konfiguration kann dadurch berechnet werden, dass man die Ladungen

sukzessive aus dem Unendlichen im Potential der schon vorhandenen Punktladungen einführt. Wegen des Superpositionsprinzips ergibt das

$$\begin{aligned}
W_N &= W_{N-1} + k \sum_{i=1}^{N-1} \frac{q_i \cdot q_N}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_N|} \\
&= k \sum_{i < j} \frac{q_i \cdot q_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} \\
&= \frac{k}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i \cdot q_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}.
\end{aligned} \tag{2.4.3}$$

Für eine kontinuierliche Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{x})$ ist dann entsprechend

$$\begin{aligned}
W &= \frac{k}{2} \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{y} \frac{\rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}) \\
&= -\frac{1}{8\pi k} \int d^3\mathbf{x} \Delta\Phi(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi k} \int d^3\mathbf{x} \nabla\Phi(\mathbf{x}) \cdot \nabla\Phi(\mathbf{x}) \\
&= \frac{1}{8\pi k} \int d^3\mathbf{x} |\mathbf{E}(\mathbf{x})|^2 \geq 0,
\end{aligned} \tag{2.4.4}$$

wobei wir (2.2.5) sowie (2.2.21) benutzt haben. Die elektrostatische Energie dieser Konfiguration kann also dem elektrischen Feld zugeschrieben werden, und zwar vermittels der Energiedichte

$$U(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi k} |\mathbf{E}(\mathbf{x})|^2. \tag{2.4.5}$$

Bemerkenswerterweise ist diese Energiedichte immer positiv. Dies ist ein wenig überraschend, da die elektrostatische Energie W_N (2.4.3) nicht immer positiv ist. Der Grund dafür besteht darin, dass sich diese beiden Energien um die ‘renormalisierte’ Selbstenenergie unterscheiden. Falls wir nämlich (2.4.4) für das Feld einer oder mehrerer Punktladungen ausrechnen, divergiert der Ausdruck und stimmt daher insbesondere nicht mit (2.4.3) überein. Zum Beispiel betrachte die Konfiguration zweier Punktladungen

$$\rho(\mathbf{x}) = q_1\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) + q_2\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2). \tag{2.4.6}$$

Dann ist W gerade

$$W = W_{ww}(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) + (q_1^2 + q_2^2)\Sigma, \tag{2.4.7}$$

wobei $W_{ww}(d)$ die ‘Wechselwirkungsenergie’

$$W_{ww}(d) = k \frac{q_1 q_2}{d} \tag{2.4.8}$$

ist und

$$\begin{aligned}
\Sigma &= \frac{k}{2} \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{y} \frac{\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \delta^{(3)}(\mathbf{y} - \mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \\
&= \frac{1}{8\pi k} \int d^3\mathbf{x} \left| k \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3} \right|^2 \\
&= \frac{k}{2} \int_0^\infty dr r^2 \frac{1}{r^4}
\end{aligned} \tag{2.4.9}$$

die quadratisch divergente *Selbstenergie* einer Punktladung beschreibt. Das Problem divergenter Selbstenergien, obwohl quantenmechanisch die Divergenz zahmer ist, ist bis heute noch nicht befriedigend verstanden.

2.5 Die Potentialgleichung

Da das elektrische Potential einer Punktladung gerade durch (2.2.1) gegeben ist, folgt aus (2.2.21) [oder durch direktes Nachrechnen]

$$\Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = -4\pi \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (2.5.1)$$

wobei $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ durch

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \quad (2.5.2)$$

definiert ist. Eine Funktion $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$, die (2.5.1) erfüllt, wird üblicherweise *Green'sche Funktion* genannt. Sie ist jedoch durch diese Gleichung noch nicht eindeutig bestimmt; das soll nun diskutiert werden.

Seien Φ_1 und Φ_2 zwei Lösungen der Poissongleichung (2.2.21) zur selben Ladungsdichte ρ (wobei wir nun nicht notwendigerweise annehmen, dass ρ eine Punktladung beschreibt). Dann ist ihre Differenz, $\Phi_0 = \Phi_1 - \Phi_2$ eine Lösung der *Laplace Gleichung*

$$\Delta \Phi_0 = \Delta \Phi_1 - \Delta \Phi_2 = -4\pi k (\rho - \rho) = 0. \quad (2.5.3)$$

Lösungen der Laplace Gleichung nennt man *harmonische Funktionen*. In zwei Dimensionen ist jede harmonische Funktion lokal der Realteil einer holomorphen (oder analytischen) Funktion. [Realteil u und Imaginärteil v einer holomorphen Funktion erfüllen die Cauchy-Riemann Gleichungen $\partial_x u = \partial_y v$, und $\partial_y u = -\partial_x v$. Dies impliziert dann, dass u (wie auch v) die Laplace Gleichung $\Delta u = 0$ erfüllt. Umgekehrt sei u eine harmonische Funktion. Dann definiert man durch Integration (lokal) eine Funktion v , so dass die Cauchy-Riemann'schen Gleichungen gelten. $f = u + iv$ ist dann eine analytische Funktion.] Auch in drei Dimensionen haben harmonische Funktionen spezielle Eigenschaften: zum Beispiel erfüllt jede harmonische Funktion $f(\mathbf{x})$ den *Mittelwertsatz*

$$f(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{K_R} f(\mathbf{y}) dS, \quad (2.5.4)$$

wobei K_R die Kugeloberfläche der Kugel mit Zentrum \mathbf{x}_0 und Radius R ist. Diese Eigenschaft kann aus dem Divergenz Theorem wie folgt bewiesen werden. Zunächst folgt aus dem Divergenz Theorem die sogenannte *zweite Green'sche Formel*

$$\int_V d^3\mathbf{x} (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) = \int_{\partial V} [\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi] \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.5.5)$$

[Betrachte das Divergenz Theorem für die Funktion $\mathbf{A} = \phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi$.] Wir wenden diese Gleichung auf die Funktion $\psi = f$, $\phi = G$ an, wobei G die oben definierte Green'sche Funktion ist. Da $\nabla^2 \psi = 0$ und $\nabla^2 G = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ ist die linke Seite von (2.5.5)

einfach $4\pi f(\mathbf{x}_0)$. Wir betrachten weiterhin den Fall, bei dem ∂V gerade K_R ist. Die rechte Seite von (2.5.5) ist dann

$$4\pi f(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{R^2} \int_{K_R} f(\mathbf{y}) dS + \frac{1}{R} \int_{K_R} \nabla f \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.5.6)$$

Im letzten Term wenden wir wiederum die zweite Green'sche Formel, aber jetzt mit $\psi = f$ und $\phi = 1$ an; dies zeigt, dass dieser Term verschwindet, und das Resultat folgt.

Der Mittelwertsatz impliziert insbesondere, dass eine harmonische Funktion ihr Maximum und Minimum immer nur am Rand einnehmen kann. Weiterhin impliziert diese Formel, dass die einzige harmonische Funktion f , für die $f \rightarrow 0$ für $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$, die triviale Funktion $f \equiv 0$ ist. Insbesondere ist daher die obige Green'sche Funktion (2.5.2) die eindeutige Lösung der Gleichung (2.5.1) die für $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ gegen null strebt.

Manchmal ist man jedoch an anderen Randbedingungen interessiert. Insbesondere gibt es Situationen, in denen wir Φ in einem endlichen Volumen V bestimmen wollen und in denen uns physikalische Randbedingungen für Φ (oder seine Ableitung, d.h. das elektrische Feld) auf ∂V gegeben sind. Bevor wir dazu Beispiele diskutieren, wollen wir zunächst abstrakt verstehen, welche Randbedingungen das elektrische Potential eindeutig festlegen. Um diese Frage zu analysieren, betrachte das Divergenz Theorem für die Funktion $\phi \nabla \psi$:

$$\int_V d^3\mathbf{x} (\phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi) = \int_{\partial V} \phi \partial_n \psi dS, \quad (2.5.7)$$

wobei $\partial_n \psi$ die Normalableitung von ψ ist, d.h. $\partial_n \psi dS = \nabla \psi \cdot d\mathbf{S}$. [Diese Formel ist die sogenannte *erste Green'sche Formel*.] Seien wiederum Φ_1 und Φ_2 zwei Lösungen der Potentialgleichung. Dann erfüllt $\Phi_0 = \Phi_1 - \Phi_2$ die Laplace Gleichung. Wähle $\phi = \psi = \Phi_0$. Dann erhalten wir

$$\int_V d^3\mathbf{x} \nabla \Phi_0 \cdot \nabla \Phi_0 = \int_{\partial V} \Phi_0 \partial_n \Phi_0 dS. \quad (2.5.8)$$

Es gibt zwei einfache Typen von Randbedingungen, die zu (fast) eindeutigen Lösungen für das Potential führen.

1. Dirichlet Randbedingung. Bei der Dirichlet Randbedingung wird das Potential Φ auf dem Rand ∂V vorgegeben. Falls Φ_1 und Φ_2 beide auf ∂V mit dieser vorgegebenen Funktion übereinstimmen, dann gilt $\Phi_0 = 0$ auf ∂V . Dann verschwindet (2.5.8), und da der Integrand auf der linken Seite nicht-negativ ist, folgt, dass $\nabla \Phi_0 = 0$ auf V . Φ_0 ist daher eine konstante Funktion auf V , und da sie auf dem Rand ∂V verschwindet, gilt $\Phi_0 \equiv 0$ auf V . Das Potential Φ ist also eindeutig durch (2.2.21) sowie durch die Vorgabe des Potentials auf dem Rand ∂V bestimmt.

Diese Randbedingung ist insbesondere für die Beschreibung des elektrischen Feldes in der Gegenwart von *elektrischen Leitern* relevant. Das Ohm'sche Gesetz in einem metallischen Leiter lautet $\mathbf{j}(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x})$, wobei $\mathbf{j}(\mathbf{x})$ die elektrische Stromdichte ist, und $\sigma(\mathbf{x})$ die elektrische Leitfähigkeit beschreibt. In einem idealen Leiter ist $\sigma(\mathbf{x}) = \infty$

und daher verschwindet die Tangentialkomponente von \mathbf{E} entlang des Leiters. Daher ist das elektrische Potential auf einem Leiter konstant. Wenn das Potential auf dem Leiter verschwindet spricht man von einem *geerdeten Leiter*.

2. Neumann Randbedingung. Die andere natürliche Randbedingung besteht darin, dass man die Normalableitung von Φ , d.h. die Normalkomponente des elektrischen Feldes \mathbf{E} auf dem Rand ∂V , vorgibt. Mit denselben Argumenten wie im vorigen Fall folgt dann, dass Φ_0 auf V konstant sein muss. Im Gegensatz zur vorigen Situation kann man jedoch jetzt nicht zeigen, dass $\Phi_0 \equiv 0$. Die Neumann Randbedingung legt deshalb das Potential nur bis auf eine Konstante fest.

2.6 Allgemeine Lösungen der Potentialgleichung mit Randbedingungen

Im freien Raum \mathbb{R}^3 ist die allgemeine Lösung der Poisson Gleichung einfach

$$\Phi(\mathbf{x}) = k \int d^3\mathbf{y} \rho(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \Phi_0(\mathbf{x}), \quad (2.6.1)$$

wobei $\Phi_0(\mathbf{x})$ eine harmonische Funktion ist. Dies folgt daraus, dass die Funktion $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \quad (2.6.2)$$

gerade die Gleichung

$$\Delta_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -4\pi \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (2.6.3)$$

erfüllt. Dann gilt nämlich

$$\Delta_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x}) = k \int d^3\mathbf{y} \rho(\mathbf{y}) \Delta_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \Delta_{\mathbf{x}} \Phi_0(\mathbf{x}) \quad (2.6.4)$$

$$= -4\pi k \int d^3\mathbf{y} \rho(\mathbf{y}) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (2.6.5)$$

$$= -4\pi k \rho(\mathbf{x}). \quad (2.6.6)$$

Falls das Potential für $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ gegen null streben soll (was im Fall von \mathbb{R}^3 die natürliche Randbedingung ist), dann ist die eindeutige Lösung durch $\Phi_0 \equiv 0$ gegeben. [Hier haben wir angenommen, dass die Ladungsdichte ρ kompakten Träger besitzt. Der erste Term in (2.6.1) hat dann offensichtlich die richtige Randbedingung, und daher ist $\Phi_0 = 0$ eine Lösung. Wie wir zuvor gesehen haben ist die Lösung eindeutig.]

2.6.1 Dirichlet Randbedingungen

Wir wollen nun die allgemeine Lösung beschreiben, wenn eine Dirichlet Randbedingung auf dem Rand eines Gebietes V vorgegeben ist. Dazu betrachten wir zunächst das Analogon von (2.6.2), nämlich das Potential $\Phi(\mathbf{x}) = G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ einer ‘Einheitsladung’ [d.h. einer Ladung q , so dass $qk = 1$] bei \mathbf{y} , wenn der Rand von V ein geerdeter Leiter

ist. Dieses Potential nennen wir die *Green'sche Funktion mit Dirichlet Randbedingungen*; sie ist dadurch charakterisiert, dass

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathbf{x}}G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -4\pi \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) && \text{falls } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \\ G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0 && \text{falls } \mathbf{x} \in \partial V \\ G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= G_D(\mathbf{y}, \mathbf{x}) && \text{für alle } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V.\end{aligned}\tag{2.6.7}$$

[Falls V nicht beschränkt ist, muss man noch zusätzliche Randbedingungen im Unendlichen einführen.]

Die Symmetrie von G_D (d.h. die dritte Eigenschaft in (2.6.7)) ist eine Konsequenz der ersten beiden. Dazu setzen wir $\phi(\mathbf{x}) = G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ und $\psi(\mathbf{x}) = G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}')$ in der zweiten Green'schen Formel (2.5.5) ein:

$$\begin{aligned}-4\pi \int_V d^3\mathbf{x} & \left(G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y})\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}') - G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}')\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right) \\ &= \int_{\partial V} [G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y})\nabla_{\mathbf{x}}G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}') - G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}')\nabla_{\mathbf{x}}G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \cdot d\mathbf{S}(\mathbf{x}).\end{aligned}\tag{2.6.8}$$

Wegen der zweiten Bedingung in (2.6.7) verschwindet die rechte Seite; es folgt daher, dass

$$G_D(\mathbf{y}', \mathbf{y}) - G_D(\mathbf{y}, \mathbf{y}') = 0,\tag{2.6.9}$$

d.h. gerade die letzte Bedingung von (2.6.7).

Sei nun eine Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{x})$ in V gegeben, und sei das Potential $\Phi(\mathbf{x})$ auf ∂V vorgegeben. Wir bezeichnen die eindeutige Lösung der Poisson Gleichung mit der vorgegebenen Randbedingung als $\Phi(\mathbf{x})$. Dann gilt

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int_V d^3\mathbf{y} \Phi(\mathbf{y}) \delta^{(3)}(\mathbf{y} - \mathbf{x})\tag{2.6.10}$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int_V d^3\mathbf{y} \Phi(\mathbf{y}) \Delta_{\mathbf{y}}G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y})\tag{2.6.11}$$

$$\begin{aligned}&= k \int_V d^3\mathbf{y} \rho(\mathbf{y}) G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} [\Phi(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}}G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}}\Phi(\mathbf{y})] \cdot d\mathbf{S}(\mathbf{y}),\end{aligned}\tag{2.6.12}$$

wobei wir die zweite Green'sche Formel angewendet haben (2.5.5), sowie die Poisson Gleichung für Φ ,

$$\Delta_{\mathbf{y}}\Phi(\mathbf{y}) = -4\pi k \rho(\mathbf{y}).\tag{2.6.13}$$

Wegen der zweiten Bedingung von (2.6.7) verschwindet der letzte Term, und die Lösung der Poisson Gleichung mit der richtigen Randbedingung auf ∂V ist gerade

$$\Phi(\mathbf{x}) = k \int_V d^3\mathbf{y} \rho(\mathbf{y}) G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} \Phi(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}}G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot d\mathbf{S}(\mathbf{y}).\tag{2.6.14}$$

Das Problem, das elektrische Potential (und damit auch das elektrische Feld) einer Ladungskonfiguration zu bestimmen, wobei Dirichlet Randbedingungen gegeben sind, ist damit darauf zurückgeführt, die zu V gehörende Green'sche Funktion zu finden.

2.6.2 Neumann Randbedingungen

Die Konstruktion im Fall von Neumann Randbedingungen ist ein wenig komplizierter. Zunächst könnte man denken, dass die relevante Green'sche Funktion dadurch charakterisiert ist, dass die zweite Bedingung von (2.6.7) durch

$$\partial_{n(\mathbf{y})}G_N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \text{falls } \mathbf{y} \in \partial V \quad (2.6.15)$$

ersetzt wird. [Hier ist $\partial_{n(\mathbf{y})}$ die Normalableitung von G_N bei $\mathbf{y} \in \partial V$, d.h. $\partial_{n(\mathbf{y})}G_N = \mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}}G_N$, wobei $\mathbf{n}(\mathbf{y})$ der Normaleneinheitsvektor auf ∂V ist.] Wegen des Divergenz Theorems gilt aber

$$\int_{\partial V} \nabla_{\mathbf{y}}G_N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot d\mathbf{S}(\mathbf{y}) = \int_V d^3\mathbf{y} \Delta_{\mathbf{y}}G_N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -4\pi, \quad (2.6.16)$$

und daher ist der naive Ansatz nicht konsistent. Der einfachste Ansatz ist daher

$$\partial_{n(\mathbf{y})}G_N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{-4\pi}{S} \quad \text{falls } \mathbf{y} \in \partial V, \quad (2.6.17)$$

wobei S die Gesamtfläche von ∂V ist. Mit derselben Rechnung wie oben kann man dann zeigen, dass die Lösung des Neumann Randwertproblems durch

$$\Phi(\mathbf{x}) = \langle \Phi \rangle_{\partial V} + k \int_V d^3\mathbf{y} \rho(\mathbf{y}) G_N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} G_N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}}\Phi(\mathbf{y}) \cdot d\mathbf{S}(\mathbf{y}), \quad (2.6.18)$$

gegeben ist, wobei $\langle \Phi \rangle_{\partial V}$ das Mittel des Potentials über ∂V ist. (Diese ist eine Konstante, und hat daher auf das elektrische Feld keinen Einfluss; wie wir zuvor schon gesehen haben, legt die Neumann Randbedingung das Potential nur bis auf eine Konstante fest.)

Die typische Anwendung der Neumann Randbedingung ist das sogenannte 'äußere Problem', bei dem V durch zwei Flächen eingeschränkt ist, einer kompakten Fläche von endlicher Oberfläche, sowie einer Fläche im Unendlichen. In diesem Fall ist $S = \infty$, und die richtige Randbedingung für die Green'sche Funktion (2.6.17) wird homogen. Im Gegensatz zu der Dirichlet Green'schen Funktion ist G_N nicht automatisch symmetrisch in den beiden Argumenten; man kann jedoch G_N immer symmetrisch wählen.

2.7 Explizite Lösungen ausgewählter Randwertprobleme

Wie wir im letzten Abschnitt gesehen haben, können wir die allgemeine Lösung der Poisson Gleichung mit Dirichlet oder Neumann Randbedingungen explizit angeben, sobald wir die entsprechende Green'sche Funktion gefunden haben. Hier wollen wir nun erklären, wie man (zumindest für einfache Geometrien V) die Dirichlet Green'sche Funktion G_D finden kann. Dabei werden wir verschiedene Techniken kennenlernen.

2.7.1 Der leitende Halbraum

Sei V der Halbraum

$$V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 > 0\} . \quad (2.7.1)$$

Die Green'sche Funktion $G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ist die Potentialfunktion $\Phi(\mathbf{x})$ einer Einheitsladung bei $\mathbf{y} \in V$, für die $G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ falls $\mathbf{x} \in \partial V$, d.h. falls $x_1 = 0$. Für die obige Geometrie kann man die Lösung einfach mit der Methode der sogenannten *Spiegelladung* konstruieren. Die entscheidende Beobachtung dabei ist, dass G_D die Gleichung

$$\Delta_{\mathbf{x}} G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (2.7.2)$$

nur für $\mathbf{x} \in V$ erfüllen muss. Eine Lösung dieser Gleichung ist natürlich

$$G_D^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} . \quad (2.7.3)$$

Die Idee der Konstruktion besteht nun darin, zu G_D^0 die Potentialfunktion einer geeigneten Spiegelladung (die nicht in V ist) dazuzuaddieren; da die Spiegelladung nicht in V sitzt, erfüllt die resultierende Funktion immer noch (2.7.2). Durch geeignete Wahl der Spiegelladung kann man jedoch die richtige Randbedingung von Φ bei $x_1 = 0$ erzeugen.

In dem vorliegenden Fall ist die Spiegelladung gerade die negative Einheitsladung an dem gespiegelten Punkt $\mathbf{y}^* = (-y_1, y_2, y_3)$. Unser Ansatz für G_D ist also einfach

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} - \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}^*|} . \quad (2.7.4)$$

Es ist offensichtlich, dass $G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ falls $x_1 = 0$. Ausserdem ist nach Konstruktion klar, dass G_D die 'Poisson' Gleichung (2.7.2) erfüllt. Wie wir zuvor gezeigt haben, ist G_D durch diese Bedingungen eindeutig bestimmt.

2.7.2 Aussenraum einer Kugel

Die Methode der Spiegelladung kann auch für den Fall der Kugelgeometrie verwendet werden. Sei V also der Aussenraum der offenen Kugel K_R mit Zentrum im Ursprung und Radius R ,

$$K_R = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| < R\} . \quad (2.7.5)$$

Für $\mathbf{y} \in V$ definieren wir die Spiegelposition durch

$$\mathbf{y}^* = R^2 \frac{\mathbf{y}}{y^2} . \quad (2.7.6)$$

Falls $\mathbf{y} \in V$ ist $\mathbf{y}^* \notin V$. Der Punkt \mathbf{y}^* ist dadurch ausgezeichnet, dass für $|\mathbf{x}| = R$,

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} - \mathbf{y}^*|^2 &= \mathbf{x}^2 + (\mathbf{y}^*)^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}^* \\ &= \mathbf{x}^2 + \frac{R^4}{y^2} - 2\frac{R^2}{y^2}\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{R^2}{\mathbf{y}^2} (\mathbf{y}^2 + R^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \\
&= \frac{R^2}{\mathbf{y}^2} (\mathbf{x} - \mathbf{y})^2, \tag{2.7.7}
\end{aligned}$$

wobei wir in der dritten (und letzten) Zeile benutzt haben, dass $\mathbf{x}^2 = R^2$. Wir machen daher den Ansatz

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} - \frac{R}{|\mathbf{y}|} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}^*|}. \tag{2.7.8}$$

Die obige Rechnung impliziert dann, dass $G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ falls $|\mathbf{x}| = R$. Ausserdem ist die Spiegelladung wiederum ausserhalb V platziert, und modifiziert daher nicht die 'Poisson' Gleichung in V .

Wie wir oben erwähnt haben, beschreibt die Green'sche Funktion gerade das Potential einer Einheitsladung (d.h. $q = 1/k$) bei \mathbf{y} für den Fall, dass der Rand von V (in diesem Fall also die Kugelschale bei $|\mathbf{x}| = R$) ein geerdeter Leiter ist. Da nach Konstruktion $G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ falls $|\mathbf{x}| = R$, ist das elektrische Potential der Punktladung bei \mathbf{y} mit $|\mathbf{y}| > R$ dann gerade

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } |\mathbf{x}| \leq R \\ G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \text{falls } |\mathbf{x}| > R. \end{cases} \tag{2.7.9}$$

[Im Innern der Kugel gibt es ja tatsächlich keine Ladungen; daher muss dort Φ die triviale Funktion sein.] Insbesondere folgt dann, dass das elektrische Feld im Innern der Kugel verschwindet (Faraday'scher Käfig). Diese Schlussfolgerung ist auch korrekt, falls die Kugeloberfläche einen nicht-geerdeten Leiter beschreibt. Für jeden Leiter ist ja Φ auf der gesamten Leiteroberfläche konstant. Das Potential für einen beliebigen Leiter unterscheidet sich daher im Innern nur um eine Konstante von (2.7.9); für die Bestimmung des elektrischen Feldes im Innern hat das natürlich keine Auswirkung.

Mit Hilfe der in Kapitel 2.6.1 beschriebenen Technik können wir das Potential im Fall eines nicht geerdeten Leiters auch ausserhalb der Kugel explizit berechnen. Falls die Kugeloberfläche auf dem Potential Φ_0 liegt, ist wegen (2.6.14) das Potential (für $|\mathbf{x}| > R$) einfach

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{x}) &= qk G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \frac{\Phi_0}{4\pi} \int_{\partial K_R} \nabla_{\mathbf{y}} G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot d\mathbf{S}(\mathbf{y}) \\
&= qk G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \frac{\Phi_0}{4\pi} \int_{K_R} d^3\mathbf{y} \Delta_{\mathbf{y}} G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\
&= qk G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \Phi_0 \frac{R}{|\mathbf{x}|}, \tag{2.7.10}
\end{aligned}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass $G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G_D(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ und dass die Orientierung von K_R umgekehrt zu der von ∂V ist. [Die Ladung bei \mathbf{y} ist nun q .]

Wie wir in Kapitel 2.3.3 gesehen haben, geht die Diskontinuität in der Normalkomponente des elektrischen Feldes immer mit einer flächenhaften Ladung einher. Da das

elektrische Feld der (negative) Gradient des Potentials ist, ist die an der Kugeloberfläche induzierte Flächenladung gerade

$$\sigma(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi k} \nabla_{\mathbf{x}}\Phi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}), \quad (2.7.11)$$

wobei $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ die Aussennormale von V ist (d.h. die Normale, die zum Kugellinneren zeigt). Die gesamte induzierte Ladung ist daher einfach

$$Q(\mathbf{y}) = \frac{q}{4\pi} \int_{\partial K_R} \nabla_{\mathbf{x}} G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot d\mathbf{S}(\mathbf{x}) + \frac{\Phi_0 R}{k} \quad (2.7.12)$$

$$= \frac{q}{4\pi} \int_{K_R} d^3\mathbf{x} \Delta G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \frac{\Phi_0 R}{k} \quad (2.7.13)$$

$$= -q \frac{R}{|\mathbf{y}|} + \frac{\Phi_0 R}{k}. \quad (2.7.14)$$

Falls $\Phi_0 = 0$ ist diese Ladung gerade gleich der Ladung der Spiegelladung.

2.7.3 Eigenfunktionen

Manchmal kann man die Dirichlet Green's Funktion für V auch geschickt mittels Eigenfunktionen konstruieren. Dazu betrachten wir die Differentialgleichung

$$\Delta\psi(x) - \lambda\psi(x) = 0, \quad (2.7.15)$$

wobei wir uns für Lösungen interessieren, für die ψ am Rand ∂V von V verschwindet. Typischerweise — wir werden in Kürze ein explizites Beispiel dafür sehen — hat (2.7.15) nur Lösungen für diskrete Werte von λ , die sogenannten Eigenwerte λ_n :

$$\Delta\psi_n(x) - \lambda_n\psi_n(x) = 0. \quad (2.7.16)$$

Aus dem 2. Green'schen Satz folgt, dass

$$\begin{aligned} (\lambda_m^* - \lambda_n) \int_V d^3\mathbf{x} \psi_m^*(\mathbf{x})\psi_n(\mathbf{x}) &= \int_V d^3\mathbf{x} ((\Delta\psi_m^*(\mathbf{x}))\psi_n(\mathbf{x}) - \psi_m^*(\mathbf{x})(\Delta\psi_n(\mathbf{x}))) \\ &= \int_{\partial V} d^2\mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot (\nabla\psi_m^*(\mathbf{x})\psi_n(\mathbf{x}) - \psi_m^*(\mathbf{x})\nabla\psi_n(\mathbf{x})) = 0, \end{aligned}$$

wobei wir benützt haben, dass $\psi_n(\mathbf{x})$ und $\psi_m^*(\mathbf{x})$ auf dem Rand ∂V verschwinden. Für $m = n$ folgt daraus, dass die Eigenwerte λ_n notwendigerweise reell sind; dann impliziert die Gleichung, dass die Eigenfunktionen zu unterschiedlichen Eigenwerten 'orthogonal' zueinander sind. Falls es zu einem Eigenwert mehr als eine Eigenfunktion geben sollte, kann man diese auch orthonormal wählen; wir können also annehmen, dass

$$\int_V d^3\mathbf{x} \psi_m^*(\mathbf{x})\psi_n(\mathbf{x}) = \delta_{m,n}. \quad (2.7.17)$$

Wir wollen annehmen — auch das ist in vielen Fällen erfüllt — dass das Funktionensystem $\psi_n(\mathbf{x})$ vollständig ist: dies bedeutet, dass wir jede Funktion, die auf ∂V verschwindet, als Linearkombination der $\psi_n(\mathbf{x})$ schreiben können, also

$$f(\mathbf{x}) = \sum_n a_n \psi_n(\mathbf{x}) . \quad (2.7.18)$$

Wegen der Orthonormalitätsrelation gilt dann

$$a_n = \int_V d^3\mathbf{y} \psi_n^*(\mathbf{y}) f(\mathbf{y}) , \quad (2.7.19)$$

und daher

$$f(\mathbf{x}) = \int_V d^3\mathbf{y} \sum_n \psi_n^*(\mathbf{y}) \psi_n(\mathbf{x}) f(\mathbf{y}) , \quad (2.7.20)$$

woraus wir schliessen, dass

$$\sum_n \psi_n^*(\mathbf{y}) \psi_n(\mathbf{x}) = \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) . \quad (2.7.21)$$

Mit Hilfe dieser Eigenfunktionen können wir nun die Green'sche Funktion finden. Dazu machen wir den Ansatz

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_n a_n(\mathbf{y}) \psi_n(\mathbf{x}) , \quad (2.7.22)$$

die dann automatisch die richtige Randbedingung erfüllt. Nun berechnen wir

$$\Delta_{\mathbf{x}} G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_n a_n(\mathbf{y}) \lambda_n \psi_n(\mathbf{x}) . \quad (2.7.23)$$

Die rechte Seite soll gleich $-4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ sein, also gemäss der Vollständigkeitsrelation gleich

$$\sum_n a_n(\mathbf{y}) \lambda_n \psi_n(\mathbf{x}) = -4\pi \sum_n \psi_n^*(\mathbf{y}) \psi_n(\mathbf{x}) . \quad (2.7.24)$$

Also gilt

$$a_n(\mathbf{y}) = -\frac{4\pi}{\lambda_n} \psi_n^*(\mathbf{y}) , \quad (2.7.25)$$

und die Lösung der Green'schen Funktion ist

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\sum_n \frac{4\pi}{\lambda_n} \psi_n^*(\mathbf{y}) \psi_n(\mathbf{x}) . \quad (2.7.26)$$

Als konkretes Beispiel betrachten wir zum Beispiel den Fall, wo V ein Würfel der Seitenlängen $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ und $0 \leq z \leq c$ ist. Der vollständige Satz der orthonormierten Eigenfunktionen ist dann

$$\psi_{lmn} = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin\left(\frac{l\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{c}\right) \quad (2.7.27)$$

wobei $l, m, n \in \mathbb{N}$ and

$$\lambda_{lmn} = -\pi^2 \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2} \right) \quad (2.7.28)$$

ist. Die zugehörige Green'sche Funktion ist dann

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{32}{\pi abc} \sum_{l,m,n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{l\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi x'}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{m\pi y'}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{c}\right) \sin\left(\frac{n\pi z'}{c}\right)}{\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}\right)}. \quad (2.7.29)$$

2.7.4 Kapazitätskonstanten

Schliesslich betrachte die (etwas allgemeinere) Situation, bei der V das Komplement von N Leitern L_i , $i = 1, \dots, N$ ist, wobei die L_i disjunkte kompakte zusammenhängende Gebiete sind. Wir betrachten die Situation, bei der es in V keine Ladungen gibt. Das Potentialproblem ist dann

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= 0 && \text{in } V \\ \Phi(\mathbf{x}) &= V_i && \text{falls } \mathbf{x} \in L_i \\ \Phi(\mathbf{x}) &\rightarrow 0 && \text{für } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

wobei V_i das Potential auf dem i ten Leiter ist. Wegen des Superpositionsprinzips ist dann

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N V_j \Phi_j(\mathbf{x}), \quad (2.7.30)$$

wobei $\Phi_j(\mathbf{x})$ die Lösung des obigen Potentialproblems für $V_i = \delta_{ij}$ ist. Die zugehörige Feldenergie ist dann

$$W = \frac{1}{8\pi k} \int_V d^3\mathbf{x} (\nabla\Phi)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N V_i V_j C_{ij}, \quad (2.7.31)$$

wobei die Konstanten C_{ij} durch

$$C_{ij} = \frac{1}{4\pi k} \int_V d^3\mathbf{x} \nabla\Phi_i \cdot \nabla\Phi_j \quad (2.7.32)$$

definiert sind. Diese Konstanten werden *Kapazitätskonstanten* genannt. Die dadurch definierte Matrix ist symmetrisch und positiv definit (da $W \geq 0$ für alle V_i , und $W = 0$ impliziert, dass $\nabla\Phi = 0$, und daher also $V_1 = \dots = V_N = \Phi(\infty) = 0$). Um die Bedeutung der C_{ij} zu verstehen schreiben wir

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \frac{1}{4\pi k} \int_V d^3\mathbf{x} \nabla \cdot (\Phi_i \nabla\Phi_j) \\ &= \frac{1}{4\pi k} \int_{\partial V} \Phi_i \nabla\Phi_j \cdot d\mathbf{S} \\ &= -\frac{1}{4\pi k} \int_{\partial L_i} \nabla\Phi_j \cdot d\mathbf{S}, \end{aligned} \quad (2.7.33)$$

wobei wir in der ersten Zeile ausgenutzt haben, dass $\Delta\Phi_j = 0$ auf V und in der zweiten das Divergenz Theorem. (Das Vorzeichen in der dritten Zeile ist eine Folge davon, dass die Orientierung von ∂V und ∂L_i umgekehrt ist.) Da das elektrische Feld im Innern von L_i verschwindet, ist die letzte Zeile wiederum proportional (mit Proportionalitätsfaktor $1/(4\pi k)$) zu der Ladung auf L_i , die durch das Potential δ_{jk} auf L_k induziert wurde. Für die allgemeine Lösung ist daher die Ladung Q_i auf L_i gerade

$$Q_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} V_j. \quad (2.7.34)$$

2.8 Multipolentwicklung

In vorigen Kapiteln haben wir das Potential einer Punktladung q bei \mathbf{x}_0 kennengelernt

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{kq}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}, \quad (2.8.1)$$

sowie das Potential eines Dipols der Stärke \mathbf{p} ,

$$\Phi(\mathbf{x}) = k \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3}. \quad (2.8.2)$$

Im Prinzip könnten wir ebenso das Potential eines Quadrupol, Octopol, usw. berechnen. Wir wollen das nun ein wenig systematischer machen.

Sei uns also eine Ladungsverteilung ρ gegeben (von der wir annehmen wollen, dass sie (kompakten) Träger hat, der in K_R enthalten ist). Wir wollen das Potential

$$\Phi(\mathbf{x}) = k \int d^3\mathbf{y} \frac{\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \quad (2.8.3)$$

für \mathbf{x} mit $r = |\mathbf{x}| > R$ ausrechnen. Für solche \mathbf{x} können wir den Integranden in einer Taylor Reihe um $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ entwickeln. Dazu beobachten wir, dass

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \lambda\mathbf{y}|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^l \frac{1}{|\mathbf{x} - \lambda\mathbf{y}|} \Big|_{\lambda=0} \lambda^l. \quad (2.8.4)$$

Für $\lambda = 1$ gilt daher also

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^l \frac{1}{|\mathbf{x} - \lambda\mathbf{y}|} \Big|_{\lambda=0} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} (\mathbf{y} \cdot \nabla)^l \frac{1}{|\mathbf{x}|} \\ &= \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 - \mathbf{x}^2 \mathbf{y}^2}{2r^5} + \frac{1}{r} \mathcal{O}((R/r)^3), \end{aligned} \quad (2.8.5)$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass $\frac{d}{d\lambda} = -\mathbf{y} \cdot \nabla$, und $r = |\mathbf{x}|$. Einsetzen in (2.8.3) ergibt dann, dass

$$\Phi(\mathbf{x}) = k \left[\frac{q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 Q_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5} + \dots \right], \quad (2.8.6)$$

wobei

$$q = \int d^3\mathbf{y} \rho(\mathbf{y}) \quad (2.8.7)$$

die Gesamtladung ist,

$$\mathbf{p} = \int d^3\mathbf{y} \mathbf{y} \rho(\mathbf{y}) \quad (2.8.8)$$

das *Dipolmoment*, und

$$Q_{ij} = \int d^3\mathbf{y} (3y_i y_j - \mathbf{y}^2 \delta_{ij}) \rho(\mathbf{y}) = Q_{ji} \quad (2.8.9)$$

der *Quadrupoltensor* ist. Der Quadrupoltensor hat verschwindende Spur, da $\sum_i \delta_{ii} = 3$. Abgesehen von $r = 0$ gilt daher

$$\Delta \left(\frac{Q_{ij} x^i x^j}{r^5} \right) = 0. \quad (2.8.10)$$

Um die höheren Multipolfelder systematisch zu erfassen müssen wir Kugelfunktionen einführen.

2.8.1 Laplace Gleichung in Kugelkoordinaten

Weit entfernt von der Ladungsverteilung ist das Problem fast rotationssymmetrisch und es bietet sich daher an, das Potential in den Kugelkoordinaten

$$\mathbf{x} = r (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \quad (2.8.11)$$

zu beschreiben. Weiterhin erfüllt ausserhalb von K_R das Potential die Laplace Gleichung; die asymptotische Entwicklung des Potentials wird sich also durch Lösungen der Laplace Gleichung beschreiben lassen. In Kugelkoordinaten hat der Laplace Operator die Form

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r - \frac{1}{r^2} \mathbf{L}^2, \quad (2.8.12)$$

wobei der Operator \mathbf{L}^2 durch

$$\mathbf{L}^2 = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (2.8.13)$$

definiert ist. Wir machen den Ansatz, dass die Lösung der Laplace Gleichung u sich separieren lässt,

$$u(r, \theta, \phi) = \frac{U(r)}{r} P(\theta) Q(\phi). \quad (2.8.14)$$

Die Laplace Gleichung ist dann

$$P(\theta) Q(\phi) \frac{d^2 U(r)}{dr^2} + \frac{U(r) Q(\phi)}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP(\theta)}{d\theta} \right) + \frac{U(r) P(\theta)}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 Q(\phi)}{d\phi^2} = 0. \quad (2.8.15)$$

Durchmultiplizieren mit $r^2 \sin^2 \theta / UPQ$ ergibt dann

$$r^2 \sin^2 \theta \left[\frac{1}{U(r)} \frac{d^2 U(r)}{dr^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta P(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP(\theta)}{d\theta} \right) \right] + \frac{1}{Q(\phi)} \frac{d^2 Q(\phi)}{d^2 \phi} = 0. \quad (2.8.16)$$

Der erste Term ist von ϕ unabhängig, und der zweite Term kann daher auch nicht von ϕ abhängen. Daher muss gelten

$$\frac{1}{Q(\phi)} \frac{d^2 Q(\phi)}{d^2 \phi} = -m^2, \quad (2.8.17)$$

wobei m eine Konstante ist. Diese Gleichung hat die Lösungen

$$Q(\phi) = e^{\pm im\phi}. \quad (2.8.18)$$

Da ϕ eine periodische Variable ist, ist $Q(\phi)$ nur dann wohl definiert, falls m eine ganze Zahl ist.

Einsetzen in (2.8.16) und dividieren durch $\sin^2 \theta$ führt dann zu

$$\frac{r^2}{U(r)} \frac{d^2 U(r)}{dr^2} + \frac{1}{\sin \theta P(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP(\theta)}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = 0. \quad (2.8.19)$$

Nun ist der erste Term von θ unabhängig, und daher muss auch der restliche Ausdruck von θ unabhängig sein. Da er wiederum nur eine Funktion von θ ist, muss er eine Konstante sein, die wir als $-l(l+1)$ schreiben; durchmultiplizieren mit $P(\theta)$ führt dann zu der Differentialgleichung für $P(\theta)$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP(\theta)}{d\theta} \right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] P(\theta) = 0, \quad (2.8.20)$$

sowie der Differentialgleichung für $U(r)$,

$$\frac{d^2 U(r)}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} U(r) = 0. \quad (2.8.21)$$

Letztere Gleichung hat die Lösung

$$U(r) = A r^{l+1} + B r^{-l}. \quad (2.8.22)$$

Zu diesem Zeitpunkt ist aber l noch nicht bestimmt.

2.8.2 Die Legendre Gleichung

Die Differentialgleichung für $P(\theta)$ bekommt eine einfache Form, wenn wir die Substitution $z = \cos \theta$ vornehmen. Da

$$\frac{d}{dz} = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta}, \quad \text{und} \quad \sin^2 \theta = 1 - z^2, \quad (2.8.23)$$

wird dann (2.8.20) zu

$$\frac{d}{dz} \left[(1 - z^2) \frac{dP(z)}{dz} \right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1 - z^2} \right] P(z) = 0. \quad (2.8.24)$$

Das ist die sogenannte *verallgemeinerte Legendre Gleichung*, und ihre Lösungen werden die *assozierten Legendre Funktionen* genannt. Bevor wir sie behandeln wollen, ist es instruktiv den Spezialfall $m = 0$ zu analysieren, die sogenannte *gewöhnliche Legendre Gleichung*,

$$\frac{d}{dz} \left[(1 - z^2) \frac{dP(z)}{dz} \right] + l(l+1) P(z) = 0, \quad (2.8.25)$$

deren Lösungen die sogenannten *Legendre Polynome* sind. [Lösungen, die auf dem gesamten Intervall $z \in [-1, 1]$ regulär sind existieren nur für $l = 0, 1, \dots$; diese Lösungen sind dann Polynome vom Grad l .]

Um diese zu konstruieren, beobachten wir, dass der Operator

$$\frac{d}{dz} (1 - z^2) \frac{d}{dz} \quad (2.8.26)$$

den Grad eines Polynoms nicht erhöht. Dann betrachten wir das Polynom l -ten Grades $P_l(z)$, das (bis auf Normierung eindeutig) durch die Bedingung charakterisiert ist, dass

$$\int_{-1}^1 dz z^k P_l(z) = 0 \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, l-1. \quad (2.8.27)$$

[Ein Polynom l -ten Grades hat $l+1$ Konstanten; die obigen l Gleichungen legen daher die Koeffizienten des Polynoms bis auf eine gemeinsame Skalierung fest.] Nun beobachten wir, dass falls $k = 0, 1, \dots, l-1$,

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 dz z^k \frac{d}{dz} (1 - z^2) \frac{d}{dz} P_l(z) \\ &= z^k (1 - z^2) \frac{d}{dz} P_l(z) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 dz \frac{dz^k}{dz} (1 - z^2) \frac{d}{dz} P_l(z) \\ &= - \frac{dz^k}{dz} (1 - z^2) P_l(z) \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 dz \left(\frac{d}{dz} (1 - z^2) \frac{d}{dz} z^k \right) P_l(z) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.8.28)$$

wobei wir benutzt haben, dass die Randterme wegen des Faktors $(1 - z^2)$ nicht beitragen. Die letzte Zeile folgt daher, dass (wie oben erklärt) das Polynom, das im Integral mit $P_l(z)$ auftritt, höchstens von Grad k ist.

Das Polynom l -ten Grades $\frac{d}{dz} (1 - z^2) \frac{d}{dz} P_l(z)$ hat also die gleiche Eigenschaft (2.8.27) wie $P_l(z)$ selbst. Nun wollen wir zeigen, dass die beiden Polynome tatsächlich zueinander proportional sind. Dazu beobachten wir, dass

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} (1 - z^2) \frac{d}{dz} z^l &= l \frac{d}{dz} (1 - z^2) z^{l-1} = l \frac{d}{dz} (z^{l-1} - z^{l+1}) = l \left((l-1)z^{l-2} - (l+1)z^l \right) \\ &= -l(l+1)z^l + \dots, \end{aligned}$$

wobei die anderen Terme von niedriger Ordnung sind. Dann definiere das Polynom

$$R_l(z) = \frac{d}{dz} (1 - z^2) \frac{d}{dz} P_l(z) + l(l+1) P_l(z), \quad (2.8.29)$$

das nach Konstruktion ein Polynom von Grad $k < l$ ist. Wir beobachten, dass

$$\int_{-1}^1 R_l(z)^2 = \int_{-1}^1 R_l(z) \left(\frac{d}{dz} (1 - z^2) \frac{d}{dz} P_l(z) + l(l+1) P_l(z) \right) = 0, \quad (2.8.30)$$

wobei wir (2.8.27) und (2.8.28) benutzt haben. Dies impliziert daher, dass $R_l(z) = 0$, und daher, dass

$$\frac{d}{dz} (1 - z^2) \frac{d}{dz} P_l(z) = -l(l+1) P_l(z). \quad (2.8.31)$$

Das Polynom $P_l(z)$ ist also die gewünschte Eigenfunktion der Legendre Gleichung; es wird als das l -te Legendre Polynom bezeichnet.

Eine explizite Formel für $P_l(z)$ ist die sogenannte *Rodrigues Formel*

$$P_l(z) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dz^l} (z^2 - 1)^l. \quad (2.8.32)$$

Nach Konstruktion ist klar, dass $P_l(z)$ ein Polynom von Grad l ist; weiterhin erfüllt dieses Polynom die Bedingung (2.8.27), da

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 dz z^k \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dz^l} (z^2 - 1)^l \\ &= \frac{1}{2^l l!} z^k \frac{d^{l-1}}{dz^{l-1}} (z^2 - 1)^l \Big|_{-1}^1 - \frac{1}{2^l l!} k \int_{-1}^1 dz z^{k-1} \frac{d^{l-1}}{dz^{l-1}} (z^2 - 1)^l. \end{aligned}$$

Der Randterm fällt weg, da nach $l - 1$ -facher Ableitung mindestens eine Potenz von $(z^2 - 1)$ übrigbleibt. Wiederholtes Anwenden dieses Argumentes zeigt dann, dass das Integral verschwindet (da $k < l$, und nach $k + 1 \leq l$ Schritten die sukzessive Ableitung von z^k verschwindet). Die Normalisierung ist so gewählt, dass $P_l(1) = 1$. Schliesslich ist

$$\int_{-1}^1 dz P_l(z)^2 = \frac{2}{(2l+1)}. \quad (2.8.33)$$

Um dies zu sehen, beobachten wir, dass

$$P_l(z) = \frac{(2l)!}{2^l l! l!} z^l + \dots \quad (2.8.34)$$

Wegen (2.8.27) müssen wir nur das Integral von $P_l(z)$ mit der führenden Potenz von $P_l(z)$ ausrechnen, und daher ist

$$\int_{-1}^1 dz P_l(z)^2 = \frac{(2l)!}{2^{2l} (l!)^3} \int_{-1}^1 dz z^l \frac{d^l}{dz^l} (z^2 - 1)^l. \quad (2.8.35)$$

Durch wiederholtes Anwenden von partieller Integration wird das zu

$$\int_{-1}^1 dz P_l(z)^2 = \frac{(2l)!}{2^{2l} (l!)^2} (-1)^l \int_{-1}^1 dz (z^2 - 1)^l. \quad (2.8.36)$$

Nun substituieren wir $z = \sin \theta$, $dz = \cos \theta d\theta$ und erhalten daher

$$\int_{-1}^1 dz P_l(z)^2 = \frac{(2l)!}{2^{2l} (l!)^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \cos^{2l+1} \theta. \quad (2.8.37)$$

Schliesslich beweisen wir die Rekursionsformel

$$\begin{aligned} I_l = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \cos^{2l+1} \theta &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \cos^{2l-1} \theta (1 - \sin^2 \theta) \\ &= I_{l-1} + \frac{1}{2l} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \sin \theta \frac{d}{d\theta} \cos^{2l} \theta \\ &= I_{l-1} - \frac{1}{2l} I_l, \end{aligned}$$

die impliziert, dass

$$I_l = \frac{2l}{2l+1} I_{l-1}. \quad (2.8.38)$$

Da $I_0 = 2$ führt dies zu

$$\int_{-1}^1 dz P_l(z)^2 = 2 \frac{(2l)!}{2^{2l} (l!)^2} \frac{(2l)(2l-2)\cdots 2}{(2l+1)(2l-1)\cdots 1} = \frac{2}{(2l+1)}. \quad (2.8.39)$$

Bisher haben wir nur den Fall $m = 0$ behandelt. Für $m \neq 0$ ist die Analyse etwas komplizierter, aber das Resultat ist relativ ähnlich: die assoziierte Legendrefunktion ist explizit durch die Formel

$$P_l^m(z) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1 - z^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dz^{l+m}} (z^2 - 1)^l \quad (2.8.40)$$

definiert, wobei $m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$. Man kann direkt ablesen, dass

$$P_l^m(1) = \delta_{m,0}. \quad (2.8.41)$$

Weiterhin erfüllen diese Funktionen die Orthogonalitätsrelation

$$\int dz P_l^m(z) P_{l'}^m(z) = \delta_{ll'} \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}, \quad (2.8.42)$$

die wie oben abgeleitet werden kann. Die Kugelfunktionen sind dann einfach als

$$Y_{l,m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (2.8.43)$$

gegeben. Da $P_l^m(z)$ die verallgemeinerte Legendre Gleichung löst, gilt dann insbesondere, dass

$$\mathbf{L}^2 Y_{l,m}(\theta, \phi) = l(l+1) Y_{l,m}(\theta, \phi). \quad (2.8.44)$$

Die Kugelfunktionen erfüllen dann die Orthogonalitätsrelation

$$\int d\Omega(\theta, \phi) Y_{l,m}(\theta, \phi) \overline{Y_{l',m'}(\theta, \phi)} = \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (2.8.45)$$

[Beachte, dass die θ -Integration in $d\Omega(\theta, \phi)$ gerade $\sin \theta d\theta = -dz$ ist.]

Die ersten Kugelfunktionen sind explizit durch

$$\begin{aligned} Y_{0,0} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\ Y_{1,1} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}, & Y_{1,-1} &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\phi} \\ Y_{1,0} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta. \end{aligned}$$

gegeben.

2.8.3 Zwischenspiel: Darstellungstheorie von $\mathbf{SO}(3)$

Die Kugelfunktionen $Y_{l,m}$, die wir oben betrachtet haben, bilden in der Tat eine Darstellung der Rotationsgruppe, und ihre Anzahl kann man relativ leicht von dieser Perspektive aus verstehen.

Betrachte den Vektorraum L aller Funktionen $f : S^2 \rightarrow \mathbb{C}$. [Die Menge dieser Funktionen definiert einen Vektorraum, da wir Funktionen addieren und mit einem Skalar (d.h. einer komplexen Zahl) multiplizieren können.] Dieser Vektorraum bildet eine Darstellung der Rotationsgruppe $\mathbf{SO}(3)$: sei $R \in \mathbf{SO}(3)$ eine Rotation, dann definieren wir

$$(Rf) : S^2 \rightarrow \mathbb{C}; \quad \mathbf{x} \mapsto (Rf)(\mathbf{x}) \equiv f(R^{-1}\mathbf{x}), \quad (2.8.46)$$

wobei R die Rotation auf S^2 beschreibt. Diese Wirkung definiert eine Darstellung, da

$$(R_1 R_2 f)(\mathbf{x}) = (R_2 f)(R_1^{-1}\mathbf{x}) = f(R_2^{-1} R_1^{-1}\mathbf{x}) = f((R_1 R_2)^{-1}\mathbf{x}), \quad (2.8.47)$$

d.h. die Komposition der Wirkung stimmt mit der Gruppenkomposition überein. Ein wenig formaler können wir das auch wie folgt schreiben: es gibt eine Abbildung

$$\rho : \mathbf{SO}(3) \rightarrow \text{End}(L), \quad (2.8.48)$$

so dass

$$\rho(AB) = \rho(A) \circ \rho(B), \quad (2.8.49)$$

wobei das Produkt auf der linken Seite die Gruppenmultiplikation in $\mathbf{SO}(3)$ ist, während \circ die Komposition in $\text{End}(L)$ beschreibt.

Der Laplace-Operator ist kugelsymmetrisch, und daher gilt auch dasselbe für den Operator \mathbf{L}^2 , der auf den Funktionen auf S^2 wirkt. Unter der obigen Wirkung der Rotationsgruppe kann sich daher der Eigenwert von \mathbf{L}^2 nicht ändern. Wie wir oben gesehen haben, hängt der Eigenwert von \mathbf{L}^2 nur von l ab — er ist gerade $l(l+1)$. Also muss die Wirkung der Drehgruppe jeweils den Unterraum der Funktionen

$$D^{(l)} := \{Y_{l,m} : m = -l, \dots, m\} \quad (2.8.50)$$

in sich abbilden. Die obigen Analyse impliziert daher, dass die Drehgruppe für jedes $l = 0, 1, 2, \dots$ Darstellungen der Dimension $(2l+1)$ — das ist gerade die Anzahl der Funktionen in $D^{(l)}$ — besitzt. In der Tat sind das jeweils irreduzible Darstellungen, d.h. es gibt keinen nicht-trivialen Unterraum, der auch bereits eine Darstellung der Drehgruppe ist. Ein Fall ist Euch vermutlich wohlvertraut: für $l = 1$, ist die Darstellung $D^{(1)}$ drei-dimensional — das ist gerade die ‘definierende’ Darstellung der Drehgruppe (als 3×3 orthogonale Matrizen).

Um den allgemeinen Fall ein wenig zu verstehen, ist es bequem, die infinitesimalen Rotationen zu betrachten. Eine Rotation wird durch eine orthogonale 3×3 Matrix R_{ij} beschrieben, also durch eine Matrix, für die transponierte Matrix gerade gleich der inversen Matrix ist

$$R_{il} R_{im} = \delta_{lm}, \quad (2.8.51)$$

Betrachte nun eine infinitesimale Rotation, d.h. eine Rotation, die sich nur wenig von der Identität unterscheidet. Formal schreibt man dann

$$R_{ij} = \delta_{ij} + \epsilon m_{ij}. \quad (2.8.52)$$

Die Matrix R_{ij} ist dann orthogonal, falls

$$\begin{aligned} R_{il} R_{im} &= (\delta_{il} + \epsilon m_{il}) (\delta_{im} + \epsilon m_{im}) \\ &= \delta_{lm} + \epsilon (m_{lm} + m_{ml}) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (2.8.53)$$

d.h. falls die Matrix m_{ij} *anti-symmetrisch* ist.

Die Menge der Rotationen beschreiben eine Gruppe, d.h. die Komposition zweier Rotationen ist eine Rotation, und zu jeder Rotation gibt es eine inverse Rotation. Die Gruppe ist tatsächlich eine sogenannte *Lie Gruppe* G : diese bedeutet im wesentlichen, dass die Gruppenelemente ein Kontinuum (besser: eine Mannigfaltigkeit) bilden, und dass bezüglich dieser Mannigfaltigkeit die Komposition von Gruppenelementen und die inverse Abbildung glatte Funktionen sind. Für jede Lie Gruppe kann man die Menge der infinitesimalen Gruppentransformationen betrachten; diese definieren einen (endlich-dimensionalen) Vektorraum, die sogenannte *Lie Algebra*, g .

Im obigen Fall ist die Menge aller orthogonalen reellen Matrizen eine Lie Gruppe (die Lie Gruppe der Rotationen), und die Lie Algebra g ist der Vektorraum der anti-symmetrischen (reellen) Matrizen. Jedes Gruppenelement der Lie Gruppe kann man durch Exponieren eines geeigneten Vektors in der Lie Algebra erhalten. (Zum Beispiel

ist (2.8.52) einfach nur der erste Term in einer Exponentialentwicklung.) Gruppenelemente können nacheinander ausgeführt werden (und resultieren wiederum in einem Gruppenelement); für Lie Algebra Elemente ist die Operation, die wiederum ein Lie Algebra Element erzeugt, der Kommutator: falls a und b Elemente in g sind, so ist auch ihr Kommutator

$$[a, b] \equiv (ab - ba) \in g, \quad (2.8.54)$$

wobei hier das Produkt ab und ba durch Matrixmultiplikation definiert ist. [Man kann den Kommutator auch für allgemeine Lie Gruppen definieren, für die man keine Realisierung durch Matrizen besitzt: dies soll aber hier nicht erklärt werden.]

Im vorliegenden Fall ist g der Vektorraum der anti-symmetrischen Matrizen, d.h. der Matrizen, für die $a^t = -a$; wegen

$$([a, b])^t = (ab - ba)^t = (b^t a^t - a^t b^t) = (ba - ab) = -[a, b] \quad (2.8.55)$$

ist dann der Kommutator tatsächlich wiederum eine anti-symmetrische Matrix, d.h. ein Element von g .

Für den Fall der Rotationsgruppe in d Dimensionen können wir eine Basis von g durch die Matrizen E^{ij} wählen, wobei $1 \leq i < j \leq d$ und E^{ij} durch

$$(E^{ij})_{rs} = \delta_{ir} \delta_{js} - \delta_{is} \delta_{jr} \quad (2.8.56)$$

definiert ist. Die Rotationsgruppe in d Dimensionen wird $SO(d)$ genannt, und ihre Lie Algebra wird üblicherweise als $so(d)$ bezeichnet. Da sie von den Basisvektoren E^{ij} aufgespannt wird, von denen es genau $d(d-1)/2$ gibt, gilt

$$\dim(so(d)) = \frac{d(d-1)}{2}. \quad (2.8.57)$$

Für den Fall, der uns primär interessiert, nämlich $d = 3$, schreibt man üblicherweise nicht $so(3)$, sondern $su(2)$. Diese Lie Algebra ist die einfachste (nicht-triviale) Lie Algebra, und es ist deshalb wert, ihre Struktur ein wenig genauer zu analysieren. Zunächst berechnet man leicht, dass

$$\begin{aligned} [E^{12}, E^{23}] &= E^{13} \\ [E^{23}, E^{13}] &= E^{12} \\ [E^{13}, E^{12}] &= E^{23}. \end{aligned}$$

Um die Lie Algebra in eine bequeme Form zu bringen, definieren wir nun

$$\begin{aligned} H &= i E^{12} \\ J^\pm &= \mp E^{13} + i E^{23}, \end{aligned} \quad (2.8.58)$$

deren Kommutatoren dann

$$[H, J^\pm] = \pm J^\pm, \quad [J^+, J^-] = 2H \quad (2.8.59)$$

sind. Jede Darstellung der Lie Gruppe definiert immer automatisch auch eine Darstellung der Lie Algebra, d.h. eine Abbildung $\rho : g \rightarrow \text{End}(L)$, so dass

$$\rho([A, B]) = [\rho(A), \rho(B)] . \quad (2.8.60)$$

Die Umkehrung gilt bis auf eine Subtilität (die wir hier nicht wirklich diskutieren wollen) auch. Es ist daher im wesentlichen äquivalent, statt Darstellungen der Gruppe G , Darstellungen ihrer Lie Algebra g zu analysieren. Da g ein linearer Vektorraum ist, ist es üblicherweise jedoch viel einfacher, Darstellungen der Lie Algebra zu analysieren und zu konstruieren.

Insbesondere beschreiben die Lie Algebra Elemente in unserem Fall infinitesimale Rotationen, und man kann daher ihre Wirkung durch Differentialoperatoren beschreiben. Zum Beispiel betrachte den Operator $H = iE^{12}$. Um seine Wirkung auf den Funktionen in L zu verstehen, betrachte die infinitesimale Rotation $R_{ij} = \delta_{ij} + \epsilon m_{ij}$, wobei $m_{12} = -m_{21} = 1$, während alle anderen Matrixelemente verschwinden. Die Inverse von R wirkt dann auf den Vektor (x, y, z) als

$$R^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \epsilon y \\ y + \epsilon x \\ z \end{pmatrix} . \quad (2.8.61)$$

Wegen (2.8.46) wirkt R auf eine Funktion $f \in L$ dann wie

$$\begin{aligned} Rf(x, y, z) &= f(x - \epsilon y, y + \epsilon x, z) \\ &= f(x, y, z) - \epsilon(x\partial_y - y\partial_x) f(x, y, z) + \mathcal{O}(\epsilon^2) . \end{aligned} \quad (2.8.62)$$

Der Term linear in ϵ beschreibt gerade die Wirkung von E^{12} , und daher gilt

$$H = -i(x\partial_y - y\partial_x) . \quad (2.8.63)$$

In Kugelkoordinaten gilt dann einfach

$$H = -i \frac{\partial}{\partial \phi} . \quad (2.8.64)$$

Entsprechend kann man zeigen, dass in Kugelkoordinaten die Operatoren J^\pm durch die Differentialoperatoren

$$J^\pm = e^{\pm i\phi} \left(\pm \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (2.8.65)$$

gegeben sind. Man kann leicht nachrechnen, dass diese Operatoren (als Differentialoperatoren) gerade die Vertauschungsregeln (2.8.59) erfüllen.

Um unsere Behauptung über die Kugelfunktionen zu beweisen, müssen wir jetzt also lediglich zeigen, dass die Kugelfunktionen $Y_{l,m}$ sich für festes l unter der Wirkung dieser Differentialoperatoren ineinander transformieren. Der Operator H wirkt besonders einfach, da es direkt aus der Definition der Kugelfunktionen folgt, dass

$$H Y_{l,m} = m Y_{l,m} . \quad (2.8.66)$$

Wir könnten jetzt einfach explizit nachrechnen, dass auch die anderen Differentialoperatoren den Raum der Kugelfunktionen $Y_{l,m}$ für festes l invariant lassen; es ist aber viel instruktiver, die Darstellungen ein wenig abstrakter zu analysieren.

Sei F eine beliebige Funktion in L , die für H eine Eigenfunktion mit Eigenwert m ist, d.h. (2.8.66) erfüllt. Es folgt dann aus den Vertauschungsregeln (2.8.59), dass

$$\begin{aligned} H(J^\pm F) &= [H, J^\pm]F + J^\pm HF \\ &= \pm J^\pm F + mJ^\pm F \\ &= (m \pm 1)J^\pm F, \end{aligned} \tag{2.8.67}$$

d.h. dass die Funktion $J^\pm F$ dann auch eine Eigenfunktion von H mit Eigenwert $(m \pm 1)$ ist.

Für kompakte Lie Gruppen kann man zeigen, dass sich jede Darstellung als direkte Summe von (irreduziblen) endlich dimensionalen Darstellungen zerlegen lässt. Wir können uns daher auf endlich dimensionale Darstellungen beschränken. Sei F ein Element einer endlich dimensionalen Darstellung, und sei F ein Eigenvektor bezüglich H mit Eigenwert m . Dann folgt aus der obigen Rechnung, dass $(J^+)^r F$ für $r = 0, 1, 2, \dots$ auch Eigenvektoren zu H mit Eigenwert $m + r$ sind. Falls die Darstellung endlich dimensional sein soll, dann muss $(J^+)^r F = 0$ für $r \geq r_0$. Die Darstellung enthält daher also einen Eigenvektor F_0 von H mit maximalen Eigenwert l ; dieser Eigenvektor ist dadurch charakterisiert, dass er von J^+ vernichtet wird. Einen solchen Vektor nennt man *Höchstgewichtsvektor*. Die gesamte Darstellung wird dann von diesem Vektor durch die Wirkung von J^- erzeugt. Damit die Darstellung endlich dimensional ist, muss weiterhin gelten, dass $(J^-)^s F_0 = 0$ für $s > s_0$. Diese Bedingung legt die möglichen Eigenwerte l des Höchstgewichtszustandes fest.

Um diese Analyse im Detail durchzuführen, ist es nützlich den sogenannten *Casimir Operator*

$$C = HH + \frac{1}{2}(J^+J^- + J^-J^+) \tag{2.8.68}$$

zu betrachten. Dieser Operator ist dadurch ausgezeichnet, dass er mit den Operatoren H und J^\pm vertauscht,

$$[C, H] = [C, J^\pm] = 0. \tag{2.8.69}$$

[Der Kommutator von C mit den anderen Operatoren kann mit Hilfe der obigen Vertauschungsregeln bewiesen werden: zum Beispiel berechnet man

$$\begin{aligned} [C, J^-] &= [HH, J^-] + \frac{1}{2}([J^+J^-, J^-] + [J^-J^+, J^-]) \\ &= H[H, J^-] + [H, J^-]H \\ &\quad + \frac{1}{2}(J^+[J^-, J^-] + [J^+, J^-]J^- + J^-[J^+, J^-] + [J^-, J^-]J^+) \\ &= -HJ^- - J^-H + \frac{1}{2}(2HJ^- + 2J^-H) = 0; \end{aligned} \tag{2.8.70}$$

die Rechnungen in den anderen Fällen sind analog.] Vermittels der expliziten Beschreibung der Operatoren durch Differentialoperatoren (2.8.64, 2.8.65) rechnet man leicht nach, dass der Casimir Operator gerade mit dem Operator \mathbf{L}^2 (2.8.13) übereinstimmt.

Mit Hilfe der Vertauschungsregeln (2.8.59) können wir den Casimir Operator C auch als

$$C = HH + H + J^- J^+ = HH - H + J^+ J^- \quad (2.8.71)$$

schreiben. Sei nun F_0 ein Höchstgewichtsvektor mit $H F_0 = l F_0$. Dann folgt aus der mittleren Schreibweise für C , dass

$$C F_0 = (HH + H + J^- J^+) F_0 = l(l + 1) F_0. \quad (2.8.72)$$

Der Eigenwert l des Höchstgewichtsvektors bestimmt also den Eigenwert des Casimir Operators C .

Damit die Darstellung, die von F_0 erzeugt wird, endlich dimensional ist, muss $(J^-)^s F_0 = 0$ für $s > s_0$. Sei $G_0 = (J^-)^{s_0} F_0$ das letzte nicht-triviale Element dieser Klasse von Zuständen, d.h. $G_0 \neq 0$ aber $J^- G_0 = 0$. Da der Casimir Operator mit J^- vertauscht gilt dann

$$l(l + 1) G_0 = C G_0 = (HH - H + J^+ J^-) G_0 = m(m - 1) G_0, \quad (2.8.73)$$

wobei $H G_0 = m G_0$ mit $m = l - s_0$. Wir erhalten daher die Gleichung

$$l(l + 1) = m(m - 1), \quad (2.8.74)$$

die die beiden Lösungen

$$m = l + 1, \quad m = -l \quad (2.8.75)$$

besitzt. Da $m = l - s_0$ mit $s_0 \geq 0$ kommt nur die zweite Lösung in Frage. Also gilt

$$l - s_0 = -l \quad \text{und daher} \quad s_0 = 2l. \quad (2.8.76)$$

Insbesondere impliziert dies, dass l eine halb-zahlige positive Zahl sein muss.

Wie wir oben erwähnt haben, definieren nicht notwendigerweise alle Darstellungen der Lie Algebra auch eine Darstellung der gegebenen Lie Gruppe. In der Tat sind Darstellungen der Lie Algebra $\mathfrak{su}(2)$, für die l nicht ganz ist, nur Darstellungen der einfach zusammenhängenden doppelten Überlagerung von $\text{SO}(3)$ — das ist die Gruppe $\text{SU}(2)$, für die Rotationen um den Winkel 2π nicht trivial sind, sondern erst Rotationen um den Winkel 4π . Die endlich dimensionalen Darstellungen von $\text{SO}(3)$ treten deshalb nur für $l = 0, 1, 2, \dots$ auf. Dies erklärt, warum die Kugelfunktionen gerade durch l und m parametrisiert sind: l ist der H Eigenwert des höchsten Gewichtes (der damit den Wert des Casimir Operators festlegt), und m ist der H -Eigenwert des gegebenen Zustandes. Insbesondere treten alle Werte für m von $l, l - 1, \dots$ bis zu $l - 2s_0 = -l$ auf.

Es bleibt daher lediglich zu zeigen, dass die Kugelfunktionen $Y_{l,m}$ auch tatsächlich diese Darstellung aufspannen. Nach dem, was wir oben gezeigt haben, genügt es dazu, zu beweisen, dass der höchste Gewichtszustand (d.h. die Funktion $Y_{l,l}$) von J^+ vernichtet

wird; wir können dann, die übrigen Kugelfunktionen sukzessiv durch die Wirkung von J^- definieren (bzw. nachprüfen, dass die Funktionen, die wir angegeben haben, so miteinander verbunden sind).

Die Funktion $Y_{l,l}$ ist (abgesehen von einer irrelevanten Normalisierungskonstante) einfach

$$\begin{aligned} Y_{l,l} &\simeq P_l^l(\cos \theta) e^{il\phi} \\ &\simeq (1-z^2)^{l/2} \frac{d^{2l}}{dz^{2l}} (z^2-1)^l e^{il\phi} \\ &\simeq \sin^l \theta e^{il\phi}. \end{aligned} \quad (2.8.77)$$

Dann berechnen wir

$$\begin{aligned} J^+ \sin^l \theta e^{il\phi} &= e^{i\phi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \sin^l \theta e^{il\phi} \\ &= l \sin^{l-1} \theta \cos \theta e^{i(l+1)\phi} - l \sin^l \theta \cot \theta e^{i(l+1)\phi} = 0. \end{aligned} \quad (2.8.78)$$

Dies vervollständigt unser Argument.

2.8.4 Sphärische Multipolmomente

Nach diesem Zwischenspiel können wir nun die sphärischen Multipolmomente definieren. Das dafür zentrale Resultat ist die Formel

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = 4\pi \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \left(\frac{r'}{r} \right)^l Y_{l,m}(\theta, \phi) \overline{Y_{l,m}(\theta', \phi')}, \quad (2.8.79)$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= r (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \\ \mathbf{x}' &= r' (\sin \theta' \cos \phi', \sin \theta' \sin \phi', \cos \theta'). \end{aligned} \quad (2.8.80)$$

Auf das Potentialproblem angewendet erhalten wir daher

$$\Phi(\mathbf{x}) = 4\pi k \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{l,m}(\theta, \phi)}{r^{l+1}}, \quad (2.8.81)$$

wobei

$$q_{l,m} = \int \overline{Y_{l,m}(\theta', \phi')} (r')^{l+2} \rho(\mathbf{x}') d\Omega(\theta', \phi') dr' \quad (2.8.82)$$

die sphärischen Multipolmomente der Ordnung l sind. Die ersten sphärischen Multipolmomente sind daher einfach

$$\begin{aligned} q_{0,0} &= \frac{q}{\sqrt{4\pi}} \\ q_{1,1} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_1 - ip_2), \quad q_{1,-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_1 + ip_2) \\ q_{1,0} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_3, \end{aligned} \quad (2.8.83)$$

wobei q und p_i durch (2.8.7) und (2.8.8) definiert sind.

Um (2.8.79) zu beweisen entwickeln wir zunächst die Funktion

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (2.8.84)$$

nach Kugelfunktionen. Wie wir bereits gesehen haben, löst diese Funktion die Laplace Gleichung falls $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$, und daher insbesondere für $|\mathbf{x}| > |\mathbf{x}'|$. In diesem Bereich können wir sie daher nach Kugelfunktionen entwickeln,

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (A_l r^l + B_l r^{-l-1}) Y_{l,m}(\gamma, \beta), \quad (2.8.85)$$

wobei γ der Winkel zwischen \mathbf{x} und \mathbf{x}' ist, und β der Azimutalwinkel von \mathbf{x} in dem Koordinatensystem, in dem \mathbf{x}' die z -Achse definiert. Weiterhin sind A_l' und B_l' Konstanten, die nur von r' abhängen können, da F nur von den relativen Winkeln γ und β abhängt. Wegen der Rotationssymmetrie um \mathbf{x}' ist klar, dass (2.8.85) tatsächlich nicht von β abhängt; daher kann in der Summe nur der Term mit $m = 0$ beitragen, und wir erhalten

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-l-1}) P_l(\cos \gamma). \quad (2.8.86)$$

(Da $Y_{l,0}$ sich um eine Normierungskonstante von P_l unterscheidet, tauchen jetzt neue Konstanten A_l und B_l auf.) Um die Konstanten A_l und B_l zu bestimmen betrachten wir nun den Fall, wo $\gamma = 0$ ist, also \mathbf{x} und \mathbf{x}' parallel sind. Dann gilt einfach

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{r - r'} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l. \quad (2.8.87)$$

Vergleich mit (2.8.86) impliziert daher, dass

$$A_l = 0 \quad B_l = (r')^l \quad (2.8.88)$$

und wir erhalten

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(r')^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \gamma). \quad (2.8.89)$$

Der zweite (und letzte) Schritt in dem Beweis von (2.8.79) ist nun das *Additionstheorem für Kugelfunktionen*: seien \mathbf{x} und \mathbf{x}' zwei Vektoren auf der Einheitskugel mit zugehörigen Kugelkoordinaten (θ, ϕ) und (θ', ϕ') . Sei weiterhin γ der Winkel zwischen diesen beiden Punkten, d.h.

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi'). \quad (2.8.90)$$

[Die rechte Seite dieser Formel ist einfach das Skalarprodukt $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'$!] Dann gilt

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l \overline{Y_{l,m}(\theta', \phi')} Y_{l,m}(\theta, \phi). \quad (2.8.91)$$

Um dieses wichtige Theorem zu beweisen betrachte \mathbf{x}' als gegeben, d.h. betrachte γ als eine Funktion von θ und ϕ , mit Parametern, die durch θ', ϕ' gegeben sind. Unter Benutzung der Vollständigkeit der Kugelfunktionen (die wir hier nicht beweisen wollen) gilt dann, dass

$$P_l(\cos \gamma) = \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m=-l'}^{l'} A_{l',m}(\theta', \phi') Y_{l',m}(\theta, \phi). \quad (2.8.92)$$

Zunächst wollen wir zeigen, dass nur der Term $l' = l$ auftreten kann. Falls \mathbf{x}' auf der z-Achse liegt, d.h. falls $\theta' = 0$, dann ist $\gamma = \theta$. In diesem Fall erfüllt also die linke Seite

$$\mathbf{L}^2 P_l(\cos \gamma) = l(l+1) P_l(\cos \gamma) \quad (2.8.93)$$

und da

$$\mathbf{L}^2 Y_{l',m}(\theta, \phi) = l'(l'+1) Y_{l',m}(\theta, \phi) \quad (2.8.94)$$

kann bei $\theta' = 0$ nur der $l = l'$ Term in der obigen Summe beitragen. Die linke Seite von (2.8.92) ist offensichtlich invariant unter einer gleichzeitigen Rotation von \mathbf{x} und \mathbf{x}' , und daher muss auch das gleich für die rechte Seite gelten. Dies bedeutet daher, dass für allgemeines \mathbf{x}' (das durch eine geeignete Rotation aus $\theta' = 0$ hervorgeht) nur Kugelfunktionen auftreten, die durch die Wirkung einer geeigneten Rotation aus $Y_{l,m'}$ hervorgehen. Da der Operator \mathbf{L}^2 rotationsinvariant ist (d.h. da er dieselbe Form in allen Koordinatensystemen hat, die durch eine Rotation auseinander hervorgehen), bleibt jedoch der Eigenwert von \mathbf{L}^2 derselbe, d.h. Rotationen können nur Kugelfunktionen mit festem l ineinander transformieren. Dies impliziert daher, dass nur der $l = l'$ Term überleben kann.

Um die Koeffizienten $A_{l,m}(\theta', \phi')$ zu bestimmen, benutzen wir nun die Orthogonalitätsbedingung (2.8.45), was zu

$$A_{l,m}(\theta', \phi') = \int d\Omega(\theta, \phi) \overline{Y_{l,m}(\theta, \phi)} P_l(\cos \gamma) \quad (2.8.95)$$

führt. Da

$$Y_{l,0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta) \quad (2.8.96)$$

können wir (2.8.95) als

$$A_{l,m}(\theta', \phi') = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int d\Omega(\theta, \phi) \overline{Y_{l,m}(\theta, \phi)} Y_{l,0}(\gamma, \beta) \quad (2.8.97)$$

schreiben, d.h. als den Koeffizienten von $Y_{l,0}$ in der Entwicklung der Funktion

$$\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \overline{Y_{l,m}(\theta(\gamma, \beta), \phi(\gamma, \beta))} \quad (2.8.98)$$

nach den Kugelfunktionen $Y_{l',m'}(\gamma, \beta)$. [Hier ist β der Azimutalwinkel von \mathbf{x} in dem Koordinatensystem für das \mathbf{x}' gerade die z -Achse ist. Ausserdem haben wir benutzt, dass auch das Mass rotationsinvariant ist, d.h. dass $d\Omega(\theta, \phi) = d\Omega(\gamma, \beta)$.] Mit demselben Argument wie zuvor kann man zeigen, dass nur die Kugelfunktionen $Y_{l',m'}(\gamma, \beta)$ mit $l' = l$ beitragen können, d.h. dass

$$\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \overline{Y_{l,m}(\theta(\gamma, \beta), \phi(\gamma, \beta))} = \sum_{m'=-l}^l B_{m'} Y_{l,m'}(\gamma, \beta), \quad (2.8.99)$$

wobei $B_0 = A_{l,m}(\theta', \phi')$. Im Limes $\gamma \rightarrow 0$ trägt nur der Term mit $m' = 0$ bei (siehe (2.8.41)), und wir erhalten dann

$$\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \lim_{\gamma \rightarrow 0} \overline{Y_{l,m}(\theta(\gamma, \beta), \phi(\gamma, \beta))} = A_{l,m}(\theta', \phi') \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}. \quad (2.8.100)$$

Da im Limes $\gamma \rightarrow 0$, $\theta(\gamma, \beta) \rightarrow \theta'$ und $\phi(\gamma, \beta) \rightarrow \phi'$ folgt dann

$$A_{l,m}(\theta', \phi') = \frac{4\pi}{2l+1} \overline{Y_{l,m}(\theta', \phi')}. \quad (2.8.101)$$

Dies beweist das Additionstheorem, und zusammen mit (2.8.89) unsere Behauptung (2.8.79).

3 Die Maxwell Gleichungen

Permanente Magnete (Magneteisenstein) waren schon im Altertum bekannt, und der Kompass ist eine sehr alte Erfindung der Seefahrt. Im Gegensatz zur Elektrostatik wurden aber die fundamentalen Gesetze magnetischer Felder erst relativ spät verstanden. Dies ist vermutlich darauf zurückzuführen, dass es im Gegensatz zur Elektrostatik keine isolierten magnetischen Ladungen (magnetische Monopole) zu geben scheint. Magnetische und elektrische Phänomene unterscheiden sich deshalb deutlich voneinander, und sie wurden für lange Zeit als separate Phänomene behandelt. Erst die Versuche von Oersted (1819), der die Ablenkung von Magneten in der Nähe stromführender Leiter beobachtete, änderten dies. Sie bewiesen, dass bewegte elektrische Ladungen magnetisch wirksam sind. Biot-Savart (1820) und dann später Ampère (1820-1825) fanden die fundamentalen Gesetze, die die magnetische Induktion mit der Stromstärke in Verbindung setzten und damit das Kraftgesetz zwischen Strömen etablierten.

3.1 Stationäre Ströme und das Ampère'sche Gesetz

Betrachte zwei Leiterschleifen γ_1 und γ_2 , durch die zeitlich konstante (stationäre) Ströme I_1 und I_2 fließen. Dann beobachtet man, dass eine Kraft \mathbf{F} auf γ_1 wirkt, die durch

$$\mathbf{F} = k' I_1 I_2 \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \wedge (d\mathbf{l}_2 \wedge \mathbf{x}_{12})}{|\mathbf{x}_{12}|^3} \quad (3.1.1)$$

beschrieben wird, wobei \mathbf{x}_{12} die Differenz zwischen den Punkten $\mathbf{x}_i \in \gamma_i$ ist, und $d\mathbf{l}_i$ der Tangentialvektor entlang γ_i ist. Durch Vergleich mit dem Coulomb'schen Gesetz ist klar, dass k/k' die Dimension einer Geschwindigkeit zum Quadrat besitzt. Man stellt experimentell fest [Kohlrausch und Weber (1856)], dass diese Geschwindigkeit gerade die Lichtgeschwindigkeit c ist:

$$\frac{k}{k'} = c^2. \quad (3.1.2)$$

[Es war Kirchhoff, der die überraschende Übereinstimmung mit der Lichtgeschwindigkeit konstatierte.] Das ist das erste Indiz dafür, dass die Spezielle Relativitätstheorie in der klassischen Elektrodynamik natürlicherweise auftreten wird.

Im Gauss'schen Einheitssystem ist $k = 1$ und daher $k' = c^{-2}$. Im SI-System ist

$$k' = 10^{-7} \frac{N}{A^2}, \quad A : \text{Ampère}. \quad (3.1.3)$$

Weiterhin schreibt man oft

$$\mu_0 = 4\pi k' = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2}. \quad (3.1.4)$$

Im folgenden werden wir wegen (3.1.2) k' immer durch $k' = k/c^2$ ersetzen.

Mit Hilfe der Standardidentität der Vektoranalysis (siehe Appendix)

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} \quad (3.1.5)$$

können wir den Integranden von (3.1.1) auch als

$$\frac{d\mathbf{l}_1 \wedge (d\mathbf{l}_2 \wedge \mathbf{x}_{12})}{|\mathbf{x}_{12}|^3} = -(d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2) \frac{\mathbf{x}_{12}}{|\mathbf{x}_{12}|^3} + d\mathbf{l}_2 \left(\frac{d\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{x}_{12}}{|\mathbf{x}_{12}|^3} \right) \quad (3.1.6)$$

schreiben; der zweite Term enthält eine totale Ableitung

$$\frac{d\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{x}_{12}}{|\mathbf{x}_{12}|^3} = -d\mathbf{l}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{x}_1} \left(\frac{1}{|\mathbf{x}_{12}|} \right) \quad (3.1.7)$$

und trägt daher zu dem geschlossenen Linienintegral über γ_1 nicht bei. Die Kraftformel (3.1.1) kann daher symmetrischer als

$$\mathbf{F} = -\frac{k I_1 I_2}{c^2} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} (d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2) \frac{\mathbf{x}_{12}}{|\mathbf{x}_{12}|^3} \quad (3.1.8)$$

geschrieben werden. Das ist das sogenannte *Ampère'sche Gesetz*.

Die erste Version von (3.1.1) hat eine suggestive Interpretation: wir können uns die Wechselwirkung durch ein Magnetfeld \mathbf{B} vermittelt denken, wobei eine mit dem Strom I durchflossene Leiterschleife γ das Magnetfeld¹

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{k I}{c} \int_{\gamma} \frac{d\mathbf{l}(\mathbf{y}) \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \quad (3.1.9)$$

erzeugt (*Magnetische Induktion*). Ausserdem erfährt ein Stromelement $I d\mathbf{l}$ in einem äusseren Magnetfeld \mathbf{B} die Kraft

$$d\mathbf{F} = \frac{1}{c} I d\mathbf{l} \wedge \mathbf{B}. \quad (3.1.10)$$

Betrachte als Beispiel einen (unendlichen) geraden Leiter, der entlang der z -Achse verläuft und durch den der Strom I fliesst. Das Magnetfeld $\mathbf{B}(\mathbf{x})$, das nach (3.1.9) erzeugt wird, liegt in der $x - y$ Ebene (d.h. es hat $B_z(\mathbf{x}) = 0$), und die Richtung in der $x - y$ Ebene ist stets so, dass $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ senkrecht zu dem Vektor (x, y) steht. (Die Feldlinien bilden daher konzentrische Kreise um den Ursprung in der $x - y$ Ebene.) Weiterhin ist das \mathbf{B} -Feld wegen der Translationssymmetrie entlang der z -Achse von z unabhängig. Die Stärke des magnetischen Feldes ist dann nur eine Funktion des Abstandes $R = \sqrt{x^2 + y^2}$, und (3.1.9) impliziert, dass

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(R) &= \frac{k I}{c} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{R}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{k I}{c R} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl}{(1 + l^2)^{3/2}} \\ &= \frac{k I}{c R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \cos \theta = \frac{2 k I}{c R} \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

¹Die folgenden Definitionen müssen durch geeignete Faktoren von c im SI System modifiziert werden; wir werden das jedoch hier nicht im Detail diskutieren.

wobei wir zunächst die Substitution $l = z/R$ und dann $l = \tan \theta$ vorgenommen haben [$dl = (1 + \tan^2 \theta)d\theta$ und $(1 + \tan^2 \theta) = \cos^{-2} \theta$]. Dies ist das experimentelle Resultat, das zuerst von Biot und Savart gefunden wurde und das nun als *Biot-Savart Gesetz* bekannt ist.

Betrachten wir nun einen zweiten parallelen Leiter im Abstand R , durch den der Strom I' fließt. Das Kraftgesetz (3.1.10) sagt dann voraus, dass auf diesen Leiter die Kraft pro Längeneinheit

$$F = \frac{2kII'}{c^2 R} \quad (3.1.12)$$

wirkt. Der Kraftvektor liegt in der $x - y$ Ebene (wegen der Translationsinvarianz) und ist von einem Leiter zum anderen gerichtet. Diese Kraft ist von Ampère beobachtet worden; man kann auch daraus den Wert der Konstanten k' (relativ zu k) bestimmen.

3.2 Das Vektorpotential und die Grundgleichungen der Magnetostatik

Für jeden konstanten Vektor \mathbf{e} gilt

$$\mathbf{e} \wedge \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} = \left(\nabla_{\mathbf{x}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right) \wedge \mathbf{e} = \text{rot}_{\mathbf{x}} \frac{\mathbf{e}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \quad (3.2.1)$$

Daher ist (3.1.9) äquivalent zu (setze $\mathbf{e} = d\mathbf{l}(\mathbf{y})$)

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \text{rot}_{\mathbf{x}} \mathbf{A}(\mathbf{x}), \quad \text{wobei} \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{kI}{c} \int_c \frac{d\mathbf{l}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \quad (3.2.2)$$

$\mathbf{A}(\mathbf{x})$ wird das zu $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ gehörige *Vektorpotential* genannt. Es ist im Allgemeinen (also auch wenn $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ nicht durch (3.1.9) gegeben ist) dadurch definiert, dass

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \text{rot}_{\mathbf{x}} \mathbf{A}(\mathbf{x}). \quad (3.2.3)$$

Diese Gleichung ist das vektorielle Analog der Gleichung $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$, die das elektrische Feld \mathbf{E} mit dem elektrischen Potential Φ in Beziehung setzt.

Um eine infinitesimale Gleichung für das Magnetfeld (und das Vektorpotential) zu beschreiben, sollten wir nicht von makroskopischen Strömen, sondern von einer kontinuierlichen *Stromdichte* $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$ sprechen. [Dies ist genau analog zu dem, was wir in der Elektrostatik getan haben: dort haben wir zunächst Punktladungen diskutiert, und dann die Analyse auf allgemeinere Ladungsdichten ρ verallgemeinert.] Der Strom, der durch eine orientierte Fläche S (zum Beispiel den Leiter) fließt, ist dann

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \quad (3.2.4)$$

Ganz allgemein gilt *Ladungserhaltung*: sei V ein endliches Volumen mit gerichtetem Rand ∂V . Dann ist

$$\int_{\partial V} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho d^3\mathbf{x}, \quad (3.2.5)$$

d.h. eine (zeitliche) Änderung der Gesamtladung im Volumen V , kann nur dadurch zustande kommen, dass Ladung (vermittels eines Stromes) V verlässt oder in V hineinfließt. Wegen des Divergenz Theorems gilt daher (in infinitesimaler Form)

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (3.2.6)$$

Diese Gleichung wird *Kontinuitätsgleichung* genannt. In dieser mikroskopischen Beschreibung lautet Gleichung (3.2.2) nun (ersetze $I d\mathbf{l}$ durch $\mathbf{j}d^3\mathbf{y}$)

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}_{\mathbf{x}} \mathbf{A}, \quad \text{wobei} \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{k}{c} \int d^3\mathbf{y} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \quad (3.2.7)$$

Wir wollen uns nun zunächst auf den stationären (d.h. zeitunabhängigen) Fall beschränken (Magnetostatik). Dann ist

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (3.2.8)$$

und das Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ erfüllt

$$\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{A}(\mathbf{x}) = 0. \quad (3.2.9)$$

[Dies ist eine Folge davon, dass

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{k}{c} \int d^3\mathbf{y} \mathbf{j}(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \\ &= -\frac{k}{c} \int d^3\mathbf{y} \mathbf{j}(\mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \\ &= \frac{k}{c} \int d^3\mathbf{y} (\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{y})) \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = 0, \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Zeile das Divergenz Theorem benutzt haben (und dabei angenommen haben, dass die Stromdichte \mathbf{j} im Endlichen lokalisiert ist, so dass der Oberflächenterm bei Unendlich nicht beiträgt), sowie (3.2.8).] Dann genügt das Magnetfeld \mathbf{B} den Feldgleichungen

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (3.2.10)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi k}{c} \mathbf{j}. \quad (3.2.11)$$

Hier haben wir in der ersten Gleichung (3.2.10) benutzt, dass

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0. \quad (3.2.12)$$

Um die zweite Gleichung (3.2.11) abzuleiten, schreiben wir

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla (\operatorname{div} \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}. \quad (3.2.13)$$

Wegen (3.2.8) verschwindet der erste Term, und im zweiten erhalten wir

$$\Delta_{\mathbf{x}}\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{k}{c} \int d^3\mathbf{y} \mathbf{j}(\mathbf{y}) \Delta_{\mathbf{x}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = -\frac{4\pi k}{c} \int d^3\mathbf{y} \mathbf{j}(\mathbf{y}) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -\frac{4\pi k}{c} \mathbf{j}(\mathbf{x}),$$

wobei wir (2.5.2) benutzt haben. Dies impliziert daher (3.2.11). Die beiden Gleichungen (3.2.10) und (3.2.11) sind die Grundgleichungen der Magnetostatik. Wir bemerken, dass (3.2.8) aus (3.2.11) folgt; diese Gleichungen können daher nur im stationären Fall richtig sein! (Wir werden später darauf zurückkommen.) Die zweite Gleichung (3.2.11) wird manchmal auch *Ampère'sches Durchflutungsgesetz* genannt.

Unter Benutzung des Divergenz und Stokes'schen Theorems können wir diese infinitesimalen Grundgleichungen auch in integraler Form schreiben: dann lauten sie

$$\int_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad \int_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi k}{c} \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}, \quad (3.2.14)$$

wobei V ein beliebiges drei-dimensionales Raumgebiet, und S eine beliebige zwei-dimensionale Fläche ist. Zum Beispiel können wir aus der zweiten Gleichung nun leicht das Biot-Savart Gesetz ableiten, das das Magnetfeld eines unendlichen langen geraden Leiters, durch den der Strom I fließt, bestimmt: sei S die Kreisscheibe mit Radius R (die orthogonal zu dem Leiter liegt). Dann ist wegen der axialen Symmetrie die linke Seite einfach $2\pi R |\mathbf{B}(R)|$, und die rechte Seite ist wegen (3.2.4) gerade $4\pi k I/c$. Die Gleichheit dieser beiden Ausdrücke ist daher einfach (3.1.11).

Die Kraftdichte \mathbf{f} auf eine kontinuierliche Stromverteilung \mathbf{j} im äusseren Magnetfeld \mathbf{B} ist nach (3.1.10)

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c} \mathbf{j} \wedge \mathbf{B}. \quad (3.2.15)$$

Diese Gleichung gilt auch für nicht stationäres \mathbf{j} . Zum Beispiel betrachte die Stromverteilung

$$\mathbf{j} = e\mathbf{v}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)), \quad (3.2.16)$$

wobei $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$ die Geschwindigkeit der Ladung e mit Bahn $\mathbf{x}(t)$ ist. Dann übt das Magnetfeld \mathbf{B} auf die Ladung die Kraft

$$\mathbf{F}(t) = \frac{e}{c} \mathbf{v}(t) \wedge \mathbf{B}(\mathbf{x}(t)) \quad (3.2.17)$$

aus; das ist natürlich einfach die *Lorentz-Kraft*.

Wie zuvor in der Elektrostatik ist das Vektorpotential \mathbf{A} durch $\text{rot}\mathbf{A} = \mathbf{B}$ nicht eindeutig festgelegt. [Wegen Poincaré's Lemma gibt es zu jedem \mathbf{B} , das auf einem sternförmigen (zusammenziehbaren) Gebiet definiert ist, ein Vektorpotential \mathbf{A} , das (3.2.3) erfüllt.] Sei Λ eine beliebige skalare Funktion. Dann können wir \mathbf{A} zumindest um die *Eichtransformation*

$$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A} + \nabla \Lambda \quad (3.2.18)$$

ändern, ohne \mathbf{B} zu verändern. [Dies ist einfach eine Folge davon, dass $\text{rot grad} = 0$.] Mit der obigen Wahl des Vektorpotentials (3.2.7) gilt im stationären Fall $\text{div}\mathbf{A} = 0$. Im

Allgemeinen (d.h. für ein beliebiges Magnetfeld \mathbf{B} , dessen zugehöriges Vektorpotential durch (3.2.3) charakterisiert ist) muss dies jedoch nicht notwendigerweise der Fall sein. Wir können jedoch immer (unter geeigneten milden Bedingungen an \mathbf{B}) \mathbf{A} so wählen, dass $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$; dies wird *Coulomb Eichung* genannt. Um dies zu verstehen, betrachten wir den Fall, dass $\operatorname{div}\mathbf{A}_0 \neq 0$. Mit Hilfe der obigen Eichtransformation definieren wir dann $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \operatorname{grad}\Lambda$. Dann gilt

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \operatorname{div}\mathbf{A}_0 + \Delta\Lambda. \quad (3.2.19)$$

Dies verschwindet, falls Λ die Poisson Gleichung

$$\Delta\Lambda = -\operatorname{div}\mathbf{A}_0 \quad (3.2.20)$$

erfüllt. Vorausgesetzt, dass $\operatorname{div}\mathbf{A}_0$ hinreichend schnell bei Unendlich verschwindet, können wir eine Lösung dieser Gleichung finden. Λ ist dann durch diese Gleichung, sowie zum Beispiel durch die Randbedingung, dass $\Lambda \rightarrow 0$ für $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$, eindeutig bestimmt, d.h. die Coulomb Eichung (zusammen mit geeigneten Randbedingungen an \mathbf{A}) legen \mathbf{A} eindeutig fest.

3.3 Einfache Stromverteilungen

3.3.1 Der magnetische Dipol

Betrachte eine (kreisförmige) Stromschleife S mit Zentrum am Ursprung, durch die ein stationärer Strom I fließt. Sei \mathbf{O} der gerichtete Oberflächenvektor, d.h. der auf S senkrecht stehen Vektor, dessen Länge gerade mit der Fläche von S (in geeigneten Einheiten) übereinstimmt. Wir betrachten den Limes $I \rightarrow \infty$, $|\mathbf{O}| \rightarrow 0$, wobei $I\mathbf{O} = c\mathbf{m}$ konstant ist. Nach (3.2.7) ist dann das zugehörige Vektorpotential

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{kI}{c} \int_{\partial S} \frac{d\mathbf{l}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = \frac{kI}{c} \int_S d\mathbf{S} \wedge \nabla_{\mathbf{y}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \quad (3.3.1)$$

Da

$$\nabla_{\mathbf{y}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} + \mathcal{O}\left(\frac{|\mathbf{y}|}{|\mathbf{x}|^3}\right) \quad (3.3.2)$$

trägt im Limes $|\mathbf{O}| \rightarrow 0$ nur der erste Term bei, und wir erhalten

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = k \frac{\mathbf{m} \wedge \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} = k \operatorname{rot}_{\mathbf{x}} \frac{\mathbf{m}}{|\mathbf{x}|}. \quad (3.3.3)$$

Das zugehörige Magnetfeld \mathbf{B} ist dann also

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= k \operatorname{rot} \operatorname{rot} \frac{\mathbf{m}}{|\mathbf{x}|} = k \operatorname{grad} \operatorname{div} \frac{\mathbf{m}}{|\mathbf{x}|} - k \mathbf{m} \Delta_{\mathbf{x}} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \\ &= k \nabla \left(\mathbf{m} \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{x}|} \right) + 4\pi k \mathbf{m} \delta^{(3)}(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Das ist das Magnetfeld eines Dipols, und \mathbf{m} wird als *magnetisches Dipolmoment* bezeichnet.

Der erste Term in (3.3.4) ist identisch mit dem \mathbf{E} -Feld eines elektrischen Dipols [$\mathbf{p} = \mathbf{m}$]. Die ursprüngliche Vorstellung (zum Beispiel von Coulomb), magnetische Dipole bestünden aus magnetischen Ladungen kann also das \mathbf{B} -Feld fast korrekt beschreiben: der Unterschied (nämlich der Term $k \mathbf{m} \delta^{(3)}(\mathbf{x})$) spielt nur im Innern des Magneten eine Rolle.

Für eine kontinuierliche Magnetisierung $\mathbf{M}(\mathbf{y})$ (wie sie zum Beispiel in einem Stabmagneten vorkommt) ist

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= k \operatorname{rot}_{\mathbf{x}} \int d^3\mathbf{y} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \\ &= k \int d^3\mathbf{y} \mathbf{M}(\mathbf{y}) \wedge \nabla_{\mathbf{y}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \\ &= k \int d^3\mathbf{y} \frac{\operatorname{rot}_{\mathbf{y}} \mathbf{M}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

wobei wir in der letzten Zeile das Divergenz Theorem angewendet haben (und angenommen haben, dass die Magnetisierung lokalisiert ist, so dass der Randterm bei Unendlich nicht beiträgt). Vergleich mit (3.2.7) zeigt, dass das Vektorpotential mit dem Vektorpotential einer äquivalenten Stromdichte $\mathbf{j} = \operatorname{rot} \mathbf{M}$ übereinstimmt. Ampère nahm deshalb an, dass magnetische Dipole nur in Form von Kreisströmen existieren (*Ampère'sche Molekularströme*): der Magnetismus wurde auf die Bewegung von Ladungen zurückgeführt. Das magnetische Moment eines quantenmechanischen Spins passt aber nicht in dieses Bild.

3.3.2 Oberflächenstrom

Schliesslich betrachten wir eine Fläche S mit Flächenstromdichte $\mathbf{J}(\mathbf{y})$. (Die zuvor eingeführte Stromdichte \mathbf{j} ist dann

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = \int_S dS(\mathbf{y}) \mathbf{J}(\mathbf{y}) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) . \quad (3.3.6)$$

Wie zuvor für elektrische Oberflächenladungen können wir eine Beziehung zwischen den verschiedenen Komponenten des Magnetfeldes \mathbf{B} auf den beiden Seiten der Oberfläche bestimmen. Da nun $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ folgt mit demselben Argument wie zuvor, dass die Normalkomponente von \mathbf{B} stetig ist, d.h.

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 . \quad (3.3.7)$$

Im Gegensatz zu der Situation beim elektrischen Feld ist jetzt jedoch $\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi k}{c} \mathbf{j}$. Wir erhalten deshalb, dass

$$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = \frac{4\pi k}{c} \mathbf{J} \cdot (\mathbf{n} \wedge \mathbf{t}) = \frac{4\pi k}{c} \mathbf{t} \cdot (\mathbf{J} \wedge \mathbf{n}) . \quad (3.3.8)$$

Damit ist das magnetische Feld eines Oberflächenstroms weitgehend bestimmt.

3.4 Das Faraday'sche Induktionsgesetz

Bis jetzt haben wir uns nur mit *stationären* Prozessen beschäftigt. Die ersten quantitativen Beobachtungen, die zeit-abhängige elektrische und magnetische Felder miteinander in Beziehung brachten, wurden 1831 von Michael Faraday gemacht. Er betrachtete dabei das Verhalten von Strömen in Leitern in der Gegenwart veränderlicher Magnetfelder.

Betrachte eine Leiterschleife γ , die die Fläche S (mit Normalenvektor \mathbf{n}) einschliesst. Der magnetische Fluss, der durch die Leiterschleife fließt, ist

$$F = \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}. \quad (3.4.1)$$

Die elektromotorische Kraft, die die Ladungsträger in der Leiterschleife bewegt, ist

$$\mathcal{E} = \int_{\partial S} d\mathbf{l}(\mathbf{y}) \mathbf{E}(\mathbf{y}). \quad (3.4.2)$$

Faraday beobachtete, dass

$$\mathcal{E} = -\hat{k} \frac{dF}{dt}, \quad (3.4.3)$$

d.h. die induzierte elektromagnetische Kraft in der Leiterschleife ist proportional zu der zeitlichen Änderungsrate des magnetischen Flusses durch die Leiterschleife. Das Vorzeichen wird durch die sogenannte *Lenz'sche Regel* festgelegt: der induzierte Strom produziert ein Feld, das der Änderung des magnetischen Flusses entgegenwirkt.

Die Konstante \hat{k} ist nicht, wie man vielleicht zuerst denken könnte, eine unabhängige Konstante, die durch ein Experiment bestimmt werden müsste; wie wir gleich sehen werden kann man sie durch k und c ausdrücken.

Um diese Beziehung abzuleiten betrachten wir die folgende Versuchsanordnung. Wir haben (im Laborsystem) ein zeitlich unabhängiges (aber räumlich variierendes) Magnetfeld \mathbf{B} und bewegen die Leiterschleife mit konstanter Geschwindigkeit \mathbf{v}_0 durch dieses Magnetfeld. Wir bezeichnen das Bezugssystem, in dem die Leiterschleife ruht, mit O' , und ihre Koordinaten mit \mathbf{x}' . Dann gilt

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{v}_0 t. \quad (3.4.4)$$

Betrachte nun eine Ladung e , die sich mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} im Laborsystem bewegt. Im Laborsystem erfährt sie die Kraft

$$\mathbf{F} = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \right). \quad (3.4.5)$$

Da sich O' mit gleichförmiger Geschwindigkeit relativ zu O bewegt, erfährt die Ladung dieselbe Kraft $\mathbf{F}' = \mathbf{F}$ im Bezugssystem O' . In O' ist jedoch seine Geschwindigkeit nicht \mathbf{v} , sondern

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0. \quad (3.4.6)$$

Wegen des klassischen Äquivalenzprinzips (d.h. des Prinzips, dass alle physikalischen Gesetze in beliebigen Inertialsystemen gleich lauten — wir behandeln hier c als einen

‘Parameter’, der in allen Inertialsystemen gleich ist; unser Argument vermischt daher Elemente des klassischen Äquivalenzprinzips unter Galilei-Transformationen mit der Universalitätsannahme der Lichtgeschwindigkeit, die, wie wir später sehen werden, für die spezielle Relativitätstheorie eine zentrale Rolle spielt), muss die Kraft \mathbf{F}' dieselbe Gleichung wie (3.4.5) erfüllen, d.h.

$$\mathbf{F}' = e \left(\mathbf{E}' + \frac{1}{c} \mathbf{v}' \wedge \mathbf{B}' \right) = e \left(\mathbf{E}' - \frac{1}{c} \mathbf{v}_0 \wedge \mathbf{B}' + \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}' \right). \quad (3.4.7)$$

Durch Vergleich mit (3.4.5) gilt daher, dass

$$\begin{aligned} \mathbf{B}'(\mathbf{x}') &= \mathbf{B}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{E}'(\mathbf{x}') &= \mathbf{E}(\mathbf{x}) + \frac{1}{c} \mathbf{v}_0 \wedge \mathbf{B}(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

Die elektromotorische Kraft, die auf die Ladungen in ∂S wirkt, ist daher also

$$\int_{\partial S} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l}' = \int_{\partial S} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_0 \wedge \mathbf{B} \right) \cdot d\mathbf{l}. \quad (3.4.9)$$

Mit Hilfe des Stokes’schen Theorems können wir die rechte Seite als Flächenintegral schreiben:

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l}' &= \int_S \operatorname{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_0 \wedge \mathbf{B} \right) \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int_S \left(\operatorname{div} \mathbf{B} \mathbf{v}_0 - \frac{1}{c} (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{B} \right) \cdot d\mathbf{S} \\ &= -\frac{1}{c} \int_S (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass im Laborsystem \mathbf{E} und \mathbf{B} zeitunabhängig sind und daher die statische Feldgleichungen $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ und $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ gelten.

Das Magnetfeld \mathbf{B}' , das im Bezugssystem O' wirkt, ist zeitabhängig, da

$$\mathbf{B}'(\mathbf{x}', t) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}' + \mathbf{v}_0 t). \quad (3.4.11)$$

Insbesondere gilt daher in O'

$$\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} = \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{B}. \quad (3.4.12)$$

Einsetzen in (3.4.10) ergibt daher, dass

$$\int_{\partial S} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l}' = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B}' \cdot d\mathbf{S}'. \quad (3.4.13)$$

Dies bedeutet, dass die Konstante $\hat{k} = 1/c$ sein muss. Da diese Identität für beliebige Leiterschleifen (und in beliebigen Inertialsystemen) gelten muss, können wir sie auch in infinitesimaler Form (ohne Striche) schreiben

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad (3.4.14)$$

Diese Relation verknüpft erstmals das elektrische und das magnetische Feld! Sie ist die Verallgemeinerung der statischen Gleichung $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ für zeitabhängige Prozesse.

3.5 Der Maxwell'sche Verschiebungsstrom

Die Vollendung der Elektrodynamik ist das Werk Maxwell's ('Treatise on Electricity and Magnetism', 1873). Maxwell erkannte, dass das Ampère'schen Gesetz im allgemein zeitabhängigen Fall mit der Kontinuitätsgleichung unverträglich ist: die Divergenz von (3.2.11) führt nämlich zu

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{B} = 0 = \frac{4\pi k}{c} \operatorname{div} \mathbf{j} = -\frac{4\pi k}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (3.5.1)$$

Um diese Inkonsistenz zu beheben, postulierte er, dass (3.2.11) im allgemein zeitabhängigen Fall durch Ergänzung des *Maxwell'schen Verschiebungsstromes* modifiziert werden muss:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi k}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (3.5.2)$$

Dann gilt nämlich statt

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{B} = 0 = \frac{4\pi k}{c} \operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{4\pi k}{c} \left(\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \quad (3.5.3)$$

was dann einfach die Kontinuitätsgleichung ist. Hier haben wir das Coulomb Gesetz $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi k \rho$ benutzt.

3.6 Die Maxwell Gleichungen und ihre Konsequenzen

Wir können nun die (endgültigen) Feldgleichungen der Elektrodynamik wie folgt zusammenfassen: zwei der Feldgleichungen sind *homogen*

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (3.6.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (3.6.2)$$

d.h. sie hängen nicht von äusseren Ladungs- oder Stromdichten ab. Die anderen beiden Feldgleichungen sind hingegen *inhomogen*

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi k \rho \quad (3.6.3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi k}{c} \mathbf{j}. \quad (3.6.4)$$

Wegen der obigen Rechnung implizieren diese Gleichungen bereits die Kontinuitätsgleichung (3.2.6).

Weiterhin ist die elektromagnetischen Kraft (Lorentz Kraft), die auf eine Probeladung q wirkt,

$$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \right). \quad (3.6.5)$$

Im Fall einer kontinuierlichen Ladungs- und Stromdichte ist die Kraftdichte \mathbf{f} entsprechend

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{j} \wedge \mathbf{B}. \quad (3.6.6)$$

Dies sind die Grundgleichungen der Elektrodynamik.

Die Maxwell Gleichungen haben tiefgreifende Konsequenzen für die ganze Physik, die wir im Weiteren dieser Vorlesung im Detail besprechen wollen. An dieser Stelle ist es aber vielleicht nützlich, manche dieser Konsequenzen schon einmal grob zu skizzieren.

3.6.1 Das freie elektromagnetische Feld

Die Maxwell Gleichungen beschreiben ein neues physikalisches System, nämlich das freie elektromagnetische Feld (Licht). Seine Bewegungsgleichungen sind die Maxwell Gleichungen im leeren Raum, d.h. mit $\rho = 0$ und $\mathbf{j} = \mathbf{0}$:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{B}, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\text{rot } \mathbf{E}, \quad (3.6.7)$$

mit den Nebenbedingungen

$$\text{div } \mathbf{E} = \text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (3.6.8)$$

die mit (3.6.7) verträglich sind. Mit der Identität $\text{rot rot } \mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E}$ (und entsprechend für \mathbf{B}) folgt daraus die Wellengleichung

$$\square \mathbf{E} = \square \mathbf{B} = 0, \quad (3.6.9)$$

wobei \square der *d'Alembert Operator* ist

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta. \quad (3.6.10)$$

Dabei entpuppt sich c als die Ausbreitungsgeschwindigkeit dieser Welle, d.h. als die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes. Elektromagnetische Wellen werden im Detail im nächsten Kapitel besprochen werden.

3.6.2 Spezielle Relativitätstheorie

Da die elektromagnetischen Wellen eine endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit besitzen, gibt es keine instantane Fernwirkung zwischen zwei geladenen Teilchen im Abstand r . Vielmehr ist die Wirkung gegenüber der Ursache um die Laufzeit des Lichtes r/c verzögert. Die Möglichkeit eines kausalen Zusammenhangs zwischen zwei Ereignissen hängt nun von Ort *und* Zeit ab; dies führt auf die Raum-Zeit-Struktur der speziellen Relativitätstheorie (die später im Detail diskutiert werden wird) und dabei auch zu einer neuen Mechanik!

3.6.3 Erhaltungsgrößen

Da Energie, Impuls und Drehimpuls durch das Feld nicht instantan übertragen werden, können die Erhaltungssätze dieser Größen nur dann gelten, wenn dem Feld selbst Erhaltungsgrößen zugeordnet werden können. Wir illustrieren dies hier am Beispiel der Energie: wegen der Identität (siehe Appendix)

$$\operatorname{div}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B} \quad (3.6.11)$$

und den Maxwell Gleichungen folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{div} c(\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) &= c \mathbf{B} \cdot \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) - c \mathbf{E} \cdot \frac{1}{c} \left(4\pi k \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) - 4\pi k \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (3.6.12)$$

Wenn wir diese Gleichung über den gesamten Raum integrieren, erhalten wir also

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{8\pi k} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) d^3 \mathbf{x} = - \int_{\partial V} \frac{c}{4\pi k} (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} - \int_V d^3 \mathbf{x} \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}, \quad (3.6.13)$$

wobei wir das Divergenz Theorem benutzt haben. Der letzte Term ist die im Gebiet V pro Zeiteinheit auf die Ladungsträger übertragene Energie, denn für eine Punktladung ist die Leistung der Lorentzkraft (3.6.5)

$$\mathbf{v} \cdot \left(q \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \right) = q \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}. \quad (3.6.14)$$

Definieren wir

$$u = \frac{1}{8\pi k} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \quad (3.6.15)$$

als die Energiedichte des Feldes, sowie

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi k} (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) \quad (3.6.16)$$

als Energiestromdichte des Feldes (*Poynting Vektor*), dann besagt (3.6.13), dass sich die Feldenergie im Gebiet V nur ändern kann, indem entweder Energie durch die Oberfläche ∂V strömt oder auf Ladungen in V übertragen wird. Die Gesamtenergie von Feld und Materie bleibt daher erhalten.

3.6.4 Elektromagnetische Potentiale

Da die homogene Maxwell Gleichung (3.6.2) impliziert, dass $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, kann man (lokal) das Magnetfeld \mathbf{B} immer durch ein Vektorpotential \mathbf{A} als

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad (3.6.17)$$

ausdrücken. Die homogene Maxwell Gleichung (3.6.2) ist dann automatisch erfüllt.

In der Elektrostatik hatten wir entsprechend $\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi$ geschrieben; dies löste dann automatisch die elektrostatische Gleichung $\text{rot } \mathbf{E} = 0$. Das Faraday'sche Induktionsgesetz modifiziert jedoch nun diese Gleichung; die zweite homogene Maxwell Gleichung (3.6.1) ist nämlich jetzt

$$\text{rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 = \text{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right). \quad (3.6.18)$$

Im Allgemeinen ist daher nun $\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ der Gradient eines skalaren Feldes, und das Potential Φ ist nun dadurch charakterisiert, dass

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (3.6.19)$$

Wenn wir \mathbf{E} und \mathbf{B} auf diese Weise durch Φ und \mathbf{A} ausdrücken, sind beide homogene Maxwell Gleichungen automatisch gelöst.

Die inhomogene Maxwell Gleichung (3.6.3) lautet dann

$$-\Delta \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial(\text{div } \mathbf{A})}{\partial t} = 4\pi k \rho, \quad (3.6.20)$$

was man als

$$\square \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \text{div } \mathbf{A} \right) = 4\pi k \rho \quad (3.6.21)$$

schreiben kann. Die andere inhomogene Maxwell Gleichung (3.6.4) wird andererseits

$$\square \mathbf{A} + \nabla \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \text{div } \mathbf{A} \right) = \frac{4\pi k}{c} \mathbf{j}. \quad (3.6.22)$$

Die Eichpotentiale sind dabei bis auf die *Eichtransformationen*

$$\Phi \mapsto \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \quad \mathbf{A} \mapsto \mathbf{A} + \nabla \Lambda \quad (3.6.23)$$

bestimmt, wobei Λ ein beliebiges skalares Feld ist. Man kann diese Eichfreiheit dazu benutzen, die obigen Gleichungen zu vereinfachen. Wie wir schon zuvor (in Kapitel 3.2) besprochen haben, kann man die sogenannte Coulomb Eichung $\text{div } \mathbf{A} = 0$ wählen; die inhomogenen Maxwell Gleichungen sind dann

$$\Delta \Phi = -4\pi k \rho, \quad \square \mathbf{A} + \nabla \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = \frac{4\pi k}{c} \mathbf{j}. \quad (3.6.24)$$

Diese Eichung legt die Eichfreiheit (3.6.23) bis auf Funktionen Λ fest für die

$$\Delta \Lambda = 0. \quad (3.6.25)$$

[Siehe die Diskussion am Ende von 3.2.]

Eine andere interessante Eichung ist die sogenannte *Lorentz Eichung*, für die die Vektorpotentiale so gewählt werden, dass

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (3.6.26)$$

Diese Eichung kann immer gewählt werden: seien Φ und \mathbf{A} Vektorpotentiale, die die elektromagnetischen Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} wie oben bestimmen, dann erfüllen die vermittels der Eichtransformation Λ transformierten Felder (3.6.26) vorausgesetzt, dass Λ die inhomogene Wellengleichung

$$\square \Lambda = \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} \quad (3.6.27)$$

löst. Diese Eichtransformation legt daher Λ bis auf eine Lösung der homogenen Wellengleichung $\square \Lambda = 0$ fest. In der Lorentz Eichung nehmen die inhomogenen Maxwell Gleichungen die einfache Form

$$\square \Phi = 4\pi k \rho, \quad \square \mathbf{A} = \frac{4\pi k}{c} \mathbf{j} \quad (3.6.28)$$

an.

4 Elektromagnetische Wellen

In diesem Kapitel wollen wir Lösungen der Maxwell Gleichung konstruieren. Zunächst betrachten wir den Fall der elektrischen und magnetischen Felder im Vakuum.

4.1 Das freie Feld

Im Vakuum sind keine externen Ladungen oder Ströme vorhanden, und daher gilt $\rho = 0$ und $\mathbf{j} = \mathbf{0}$. Die Maxwell Gleichungen für \mathbf{E} und \mathbf{B} sind daher

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{B}, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\text{rot } \mathbf{E}, \quad (4.1.1)$$

mit den Nebenbedingungen

$$\text{div } \mathbf{E} = \text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (4.1.2)$$

Wie wir schon oben gesehen haben implizieren diese Feldgleichungen, dass \mathbf{E} und \mathbf{B} die Wellengleichung erfüllen müssen,

$$\square \mathbf{E} = 0, \quad \square \mathbf{B} = 0. \quad (4.1.3)$$

Die einfachste Lösung der ersten Gleichung ist eine *ebene Welle*

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{x} - ct), \quad (4.1.4)$$

wobei \mathbf{e} ein konstanter Einheitsvektor, $|\mathbf{e}| = 1$, und $\mathbf{f}(s)$ eine Vektorfunktion einer Variablen ist. Die Nebenbedingung (4.1.2) impliziert dann, dass

$$0 = \mathbf{e} \cdot \frac{d\mathbf{f}(s)}{ds} \equiv \mathbf{e} \cdot \mathbf{f}'. \quad (4.1.5)$$

Eine einfache Lösung dieser Gleichung besteht darin, dass

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{f}(s) = 0 \quad \forall s. \quad (4.1.6)$$

Wegen der zweiten Gleichung von (4.1.1) legt diese Lösung für \mathbf{E} das Magnetfeld \mathbf{B} bis auf ein in t konstantes Feld eindeutig fest

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mathbf{e} \wedge \mathbf{f}'(\mathbf{e} \cdot \mathbf{x} - ct). \quad (4.1.7)$$

Die allgemeine Lösung für \mathbf{B} ist daher also

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{e} \wedge \mathbf{f}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{x} - ct). \quad (4.1.8)$$

Wegen der ersten Gleichung von (4.1.1) folgt dann, dass $\text{rot } \mathbf{B}_0 = 0$, und (4.1.2) impliziert, dass $\text{div } \mathbf{B}_0 = 0$. Das Feld \mathbf{B}_0 beschreibt daher ein externes Magnetfeld, das wir zu Null setzen können.

Die elektromagnetischen Felder sind also einfach

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{f}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{x} - ct) \\ \mathbf{B} &= \mathbf{e} \wedge \mathbf{f}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{x} - ct) = \mathbf{e} \wedge \mathbf{E}.\end{aligned}\quad (4.1.9)$$

Wegen (4.1.6) ist das elektrische Feld \mathbf{E} an jedem Punkt senkrecht zur Ausbreitungsgeschwindigkeit \mathbf{e} , und das gleiche gilt natürlich auch für \mathbf{B} . Jede zu \mathbf{e} transversale Funktion \mathbf{f} definiert daher eine ebene Welle, in der stets $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$ und für die die drei Vektoren \mathbf{e} , \mathbf{E} und \mathbf{B} ein rechtshändiges Orthogonalsystem definieren. Der Poynting Vektor (den wir schon in Kapitel 3.7.3 kurz eingeführt hatten) ist daher

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi k} (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) = \frac{c}{4\pi k} (\mathbf{E} \wedge (\mathbf{e} \wedge \mathbf{E})) = \frac{c}{4\pi k} |\mathbf{E}|^2 \mathbf{e} = \frac{c}{4\pi k} |\mathbf{B}|^2 \mathbf{e} \quad (4.1.10)$$

4.1.1 Monochromatische Felder

Eine besonders einfache Lösung ist das monochromatische Feld, bei dem man \mathbf{f} einfach als

$$\mathbf{f}(s) = \mathbf{E}_0 e^{i\frac{\omega s}{c}} \quad (4.1.11)$$

wählt. Dann wird

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{e} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{x}, t),\end{aligned}\quad (4.1.12)$$

wobei ω die Frequenz, und der Wellenvektor \mathbf{k} proportional zu der Ausbreitungsrichtung $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{e}$ ist. Hier ist \mathbf{E}_0 ein komplexer Vektor

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_1 + i\mathbf{E}_2, \quad \mathbf{E}_i \text{ sind reell} \quad (4.1.13)$$

der beliebig im 2-dimensionalen komplexen Raum

$$\mathbf{e}^\perp = \{\mathbf{E}_0 \in \mathbb{C}^3 : \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{e} = 0\} \quad (4.1.14)$$

gewählt werden kann. Das Arbeiten mit komplexen Feldern ist vielleicht ein wenig unvertraut: da die linearen Feldgleichungen jedoch reelle Koeffizienten haben, definieren Real- und Imaginärteil einer komplexen Lösung immer zwei reelle Lösungen. Die komplexe Schreibweise ist daher einfach eine kompakte Methode, zwei (reelle) Lösungen ‘gleichzeitig’ zu beschreiben. Im folgenden fassen wir den Realteil eines komplexen Feldes immer als das ‘physikalische’ Feld auf.

Die *Polarisation* der Welle wird durch die Bahn des Vektors $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ in einem festen Raumpunkt (zum Beispiel bei $\mathbf{x} = \mathbf{0}$) beschrieben:

$$\text{Re } \mathbf{E}(\mathbf{0}, t) = \text{Re} [(\mathbf{E}_1 + i\mathbf{E}_2)(\cos \omega t - i \sin \omega t)] = \mathbf{E}_1 \cos \omega t + \mathbf{E}_2 \sin \omega t. \quad (4.1.15)$$

Für allgemeines \mathbf{E}_i beschreibt dies eine Ellipse. Spezialfälle sind die (i) *lineare Polarisation*, für die $\mathbf{E}_1 \parallel \mathbf{E}_2$; und die (ii) *zirkulare Polarisation*, für die \mathbf{E}_1 und \mathbf{E}_2 zwei senkrecht

aufeinander stehende Vektoren gleicher Länge sind — dann ist die obige Kurve gerade ein Kreis. In diesem Fall gibt es die beiden Möglichkeiten

$$\mathbf{E}_2 = \pm \mathbf{e} \wedge \mathbf{E}_1, \quad (4.1.16)$$

die gerade eine links- oder rechtszirkulierender Polarisation (betrachtet in Fortpflanzungsrichtung) beschreiben.

Jede monochromatische Welle kann als Superposition zweier ausgewählter Polarisationsfälle dargestellt werden. Dazu wählen wir eine orthonormierte Basis $\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2$ in \mathbf{e}^\perp , wobei das Skalarprodukt zweier Vektoren durch

$$\langle \mathbf{E}, \mathbf{F} \rangle = \bar{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{F} = (\mathbf{E}_1 - i\mathbf{E}_2) \cdot (\mathbf{F}_1 + i\mathbf{F}_2) \quad (4.1.17)$$

definiert ist. Dann können wir jeden Vektor $\mathbf{E}_0 \in \mathbf{e}^\perp$ durch $\boldsymbol{\epsilon}_i$ ausdrücken, wobei

$$\mathbf{E}_0 = \alpha_1 \boldsymbol{\epsilon}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{\epsilon}_2, \quad \alpha_i = \langle \boldsymbol{\epsilon}_i, \mathbf{E}_0 \rangle. \quad (4.1.18)$$

Es gibt (mindestens) zwei natürliche Wahlen für die Basisvektoren $\boldsymbol{\epsilon}_i$:

Zerlegung nach linear polarisierten Wellen: Sei $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ und $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}$ eine reelle orthonormierte positiv orientierte Basis in \mathbb{R}^3 . [Durch die Vorgabe von $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}$ ist diese Basis bis auf Rotationen um die \mathbf{e}_3 Achse eindeutig festgelegt.] Wir wählen nun

$$\boldsymbol{\epsilon}_1 = \mathbf{e}_1, \quad \boldsymbol{\epsilon}_2 = \mathbf{e}_2. \quad (4.1.19)$$

Nach Konstruktion ist das eine zulässige Basiswahl, d.h. $\boldsymbol{\epsilon}_i$ sind orthonormiert bezüglich des obigen Skalarproduktes. Da weiterhin die $\boldsymbol{\epsilon}_i$ nur einen Realteil besitzen, beschreiben sie zwei zueinander senkrecht linear polarisierte Wellen.

Zerlegung nach zirkular polarisierten Wellen: In der selben Basis wie im obigen Fall wählen wir nun

$$\boldsymbol{\epsilon}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2). \quad (4.1.20)$$

Wiederum ist klar, dass $\boldsymbol{\epsilon}_\pm$ bezüglich des obigen Skalarproduktes orthonormal sind. Nun beschreiben sie eine rechts- ($\boldsymbol{\epsilon}_+$) und eine links-zirkular ($\boldsymbol{\epsilon}_-$) polarisierte Welle. Im Gegensatz zu der ersten Wahl ist diese Zerlegung eindeutig, da unter einer Drehung um die \mathbf{e}_3 Achse (um den Winkel ϕ)

$$\boldsymbol{\epsilon}_\pm \mapsto e^{i\mp\phi} \boldsymbol{\epsilon}_\pm. \quad (4.1.21)$$

Die Beschreibung der Wellen durch komplexe Lösungen vereinfacht typischerweise die Berechnung der Grössen, in die die Feldstärken linear eingehen. Wenn man jedoch zum Beispiel die Energiestromdichte (4.1.10) bestimmen will (die quadratisch in den Feldstärken ist), muss man zunächst wieder zu den reellen Felder übergehen. Für die freie Welle, die durch (4.1.12) mit (4.1.15) gegeben ist, ist der Betrag der Energiestromdichte im Punkt $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ dann

$$|\mathbf{S}| = \frac{c}{4\pi k} \left(\mathbf{E}_1^2 \cos^2 \omega t + \mathbf{E}_2^2 \sin^2 \omega t + \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \sin 2\omega t \right), \quad (4.1.22)$$

wobei wir die Additionsformel von trigonometrischen Funktionen

$$2 \cos \omega t \sin \omega t = \sin 2\omega t \quad (4.1.23)$$

benutzt haben. Die *Intensität* I der Welle ist als das Zeitmittel von $|\mathbf{S}(t)|$ definiert. Man findet dann

$$I = \frac{c}{8\pi k} (\mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2) = \frac{c}{8\pi k} \langle \mathbf{E}, \mathbf{E} \rangle. \quad (4.1.24)$$

Damit erhält das obige Skalarprodukt eine physikalische Bedeutung. Bei jeder Zerlegung in eine orthonormierte Polarisationsbasis (4.1.18) addieren sich die Intensitäten,

$$I = \frac{c}{8\pi k} (|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2). \quad (4.1.25)$$

4.2 Dynamik des freien Feldes

Nun wollen wir die Dynamik des freien Feldes analysieren: seien die elektro-magnetischen Felder im Vakuum $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ zur Zeit $t = 0$ bekannt. Wir wollen dann $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ für $t > 0$ bestimmen.

Wie wir oben gesehen haben, erfüllen diese Felder im Vakuum die Wellengleichung (4.1.3). Da die Felder weiterhin die Maxwell Gleichungen (4.1.1) erfüllen müssen, legt die Vorgabe von $\mathbf{E}(\mathbf{x}, 0)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{x}, 0)$ bereits die Zeitableitungen dieser Felder bei $t = 0$ fest. Unser Problem besteht also darin, die Lösung der Wellengleichung

$$\square \mathbf{E} = \square \mathbf{B} = 0 \quad (4.2.1)$$

zu finden, wobei \mathbf{E} und $\partial_t \mathbf{E}$, bzw. \mathbf{B} und $\partial_t \mathbf{B}$ bei $t = 0$ gegeben sind. In diesen Gleichungen sind die verschiedenen Komponenten der Felder voneinander unabhängig (abgesehen von der Nebenbedingung, dass die Felder divergenzfrei sein müssen); wir können uns daher zunächst auf das entsprechende skalare Problem beschränken. Sei also $u(\mathbf{x}, t)$ eine skalare Funktion, die die Wellengleichung

$$\square u = 0 \quad (4.2.2)$$

erfüllt und zusammen mit ihrer Zeitableitung bei $t = 0$ gegeben ist. Wir wollen die Funktion $u(\mathbf{x}, t)$ für $t > 0$ bestimmen. Ausgangspunkt unserer Lösung ist die allgemeine kugelsymmetrische Lösung von (4.2.2), für die wir den Ansatz

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{r} f(r, t), \quad r = |\mathbf{x}| \quad (4.2.3)$$

machen. Der Laplace Operator in Kugelkoordinaten wurde bereits in Kapitel 2.8.2 angegeben, und wir finden daher einfach

$$\Delta u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}. \quad (4.2.4)$$

Die Funktion $u(\mathbf{x}, t)$ erfüllt also die Wellengleichung, falls

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = 0. \quad (4.2.5)$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist

$$f(r, t) = g(ct - r) + h(ct + r), \quad (4.2.6)$$

wobei g und h beliebige Funktionen sind. Da die Funktion u bei $r = 0$ nicht divergieren soll, kommen für uns jedoch nur Lösungen in Betracht, für die $f(0, t) = 0$, d.h. $g = -h$. Damit wird also die allgemein kugelsymmetrische Lösung der Wellengleichung

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{r} [g(ct - r) - g(ct + r)]. \quad (4.2.7)$$

Um die Lösung zu beliebigen Anfangsdaten zu finden, ist es wiederum nützlich Distributionslösungen zu konstruieren, die besonders einfache Anfangsdaten haben. Wir definieren also

$$D(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi r} [\delta(ct - r) - \delta(ct + r)]. \quad (4.2.8)$$

Diese Lösung hat die Anfangsdaten

$$D(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial D(\mathbf{x}, 0)}{\partial t} = \delta^{(3)}(\mathbf{x}), \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 D(\mathbf{x}, 0)}{\partial t^2} = 0. \quad (4.2.9)$$

Zum Beweis fasse man $D(\mathbf{x}, t)$ als eine Distribution in \mathbf{x} bei festem t auf. Für jede Testfunktion $f(\mathbf{x})$ ist dann

$$\begin{aligned} D(f, t) &\equiv \int d^3\mathbf{x} f(\mathbf{x}) D(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int d^3\mathbf{x} f(\mathbf{x}) \frac{1}{r} (\delta(ct - r) - \delta(ct + r)) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} d^2\mathbf{e} \int_0^{\infty} dr f(r\mathbf{e}) r (\delta(ct - r) - \delta(ct + r)) \\ &= \frac{ct}{4\pi} \int_{\Omega} d^2\mathbf{e} f(c|t|\mathbf{e}), \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

wobei Ω die Einheitskugel im \mathbb{R}^3 ist, d.h.

$$\Omega = \{\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{e}| = 1\}. \quad (4.2.11)$$

Es ist daher klar, dass $D(f, t)$ eine ungerade Funktion in t ist, also

$$D(f, 0) = \frac{d^2 D}{dt^2}(f, 0) = 0. \quad (4.2.12)$$

Weiterhin ist

$$\frac{1}{c} \frac{dD}{dt}(f, 0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} d^2\mathbf{e} f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0}). \quad (4.2.13)$$

Dies beweist (4.2.9).

Mit Hilfe dieser Distributionslösung lässt sich nun das Anfangswertproblem für u generell lösen. Die Lösung ist einfach durch

$$u(\mathbf{x}, t) = \int d^3\mathbf{y} \left[\frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) u(\mathbf{y}, 0) + D(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{y}, 0) \right] \quad (4.2.14)$$

gegeben. Die rechte Seite ist eine Lösung der Wellengleichung $\square u = 0$, da $\square D = 0$ und $\square \partial D / \partial t = 0$. Für $t = 0$ trägt wegen (4.2.9) nur der erste Term bei, und wir erhalten in der Tat $u(\mathbf{x}, 0)$. Umgekehrt trägt zu der Zeitableitung bei $t = 0$ wegen (4.2.9) nur der zweite Term bei und produziert wie gewünscht $\partial_t u(\mathbf{x}, 0)$.

Diese Form der Lösung bringt die Ausbreitungscharakteristik des freien Feldes klar zum Ausdruck: der Träger der Distributionslösung $D(\mathbf{x}, t)$ ist der Lichtkegel

$$c^2 t^2 - \mathbf{x}^2 = 0. \quad (4.2.15)$$

Insbesondere hängt für gegebenes (\mathbf{x}, t) die Funktion $u(\mathbf{x}, t)$ nur von den Anfangswerten in den Punkten \mathbf{y} bei $t = 0$ ab, für die

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = c|t|. \quad (4.2.16)$$

Falls zum Beispiel die Anfangswerte einen kompakten Träger haben, so ist die Wellenausbreitung auf das schraffierte Raum-Zeit Gebiet beschränkt. Dies illustriert die Aussage,

dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes gerade c ist!

Die Eindeutigkeit der Lösung ergibt sich aus dem Energiesatz (3.6.13): die Differenz zweier Lösungen zu denselben Anfangswerten ist eine Lösung zu verschwindenden Anfangswerten. Ihre Energie

$$\frac{1}{8\pi k} \int d^3\mathbf{x} \left(\mathbf{E}^2(\mathbf{x}, 0) + \mathbf{B}^2(\mathbf{x}, 0) \right) = 0 \quad (4.2.17)$$

verschwindet daher für $t = 0$. Wegen des Energiesatzes (unter Annahme, dass der Beitrag der Energiestromdichte bei Unendlich ignoriert werden kann, d.h. dass \mathbf{E} und \mathbf{B} hinreichend schnell abfallen) muss das dann für alle t gelten. Dies impliziert daher, dass $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = 0 = \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ für alle t .

4.3 Das Feld einer Ladungs- und Stromverteilung

Nun wollen wir den allgemeineren Fall behandeln, bei denen die Felder nicht im Vakuum propagieren. Wir wollen also die spezielle Lösung der Maxwell Gleichungen zu vorgegebenen Ladungs- $\rho(\mathbf{x}, t)$ und Stromverteilung $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$ konstruieren. Es ist einfacher, diese Lösung nicht direkt für die elektromagnetischen Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} zu suchen, sondern zunächst für die zugehörigen Potentiale Φ und \mathbf{A} . In der Lorentz Eichung (die wir im weiteren benutzen werden) lauten die Feldgleichungen für die Potentiale

$$\square \Phi = 4\pi k \rho, \quad \square \mathbf{A} = \frac{4\pi k}{c} \mathbf{j}. \quad (4.3.1)$$

Für das Folgende ist es bequem die Raum-Zeit Koordinaten

$$x = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, \mathbf{x}) \quad (4.3.2)$$

einzuführen. Oft werden wir statt x auch x^μ schreiben, wobei $\mu = 0, 1, 2, 3$. Andererseits meint x^i , $i = 1, 2, 3$ nur den räumlichen Anteil des 4-er Vektors x .

Der auslaufende Teil der freien Kugelwelle, die wir im vorigen Kapitel konstruiert haben ist

$$D_{ret}(x) = \frac{1}{4\pi r} \delta(x^0 - r), \quad r = |\mathbf{x}|. \quad (4.3.3)$$

Sie definiert eine Greensche Funktion des d'Alembert Operators, d.h. eine Lösung der Gleichung

$$\square D_{ret} = \delta^{(4)}(x). \quad (4.3.4)$$

D_{ret} hat als Träger den Vorwärts-Lichtkegel (den Lichtkegel (4.2.15) mit $t > 0$), und entspricht einer bei $x = 0$ ausgelösten Kugelwelle.

Um (4.3.4) zu beweisen, muss man zeigen, dass für jede Testfunktion $f(x)$ auf \mathbb{R}^4

$$\begin{aligned} f(0) = \square D_{ret}(f) &= \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^{02}} - \Delta \right) D_{ret} \right] (f) \\ &= D_{ret} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^{02}} - \Delta \right) f \right] \\ &= \int d^4x D_{ret}(x) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^{02}} - \Delta \right) f \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx^0 \int d^3\mathbf{x} \delta(x^0 - r) \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^{02}} - \Delta \right) f, \quad (4.3.5) \end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass Ableitungen auf Distributionen vermittels (2.1.9) definiert werden, d.h.

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} D\right)(f) = -D\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} f\right). \quad (4.3.6)$$

Für das drei-dimensionale räumliche Integral benutzen wir wiederum Kugelkoordinaten; dann trägt der letzte Term gerade

$$\begin{aligned} \int d^3\mathbf{x} \delta(x^0 - r) \frac{1}{r} \Delta f(x^0, \mathbf{x}) &= \int_0^\infty dr \delta(x^0 - r) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_{|\mathbf{x}| \leq r} d^3\mathbf{x} \Delta f(x^0, \mathbf{x}) \\ &= \int_0^\infty dr \delta(x^0 - r) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r^2 \int_\Omega d^2\mathbf{e} \frac{\partial}{\partial r} f(x^0, r\mathbf{e}) \\ &= \int_0^\infty dr \delta(x^0 - r) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} \int_\Omega d^2\mathbf{e} f(x^0, r\mathbf{e}) \\ &= \int_0^\infty dr \delta(x^0 - r) \frac{d^2}{dr^2} r \int_\Omega d^2\mathbf{e} f(x^0, r\mathbf{e}), \quad (4.3.7) \end{aligned}$$

bei, wobei wir in der zweiten Zeile das Divergenz Theorem angewendet haben. [Ω ist hier wiederum die Einheitskugel.] Damit wird dann (4.3.5)

$$\begin{aligned} (\square D_{ret})(f) &= \int_{-\infty}^\infty dx^0 \int_0^\infty dr \delta(x^0 - r) \left[\frac{\partial^2}{\partial x^{02}} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right] \frac{r}{4\pi} \int_\Omega d^2\mathbf{e} f(x^0, r\mathbf{e}) \\ &= \int_{-\infty}^\infty dx^0 \int_0^\infty dr \delta(x^0 - r) \left[\frac{\partial^2}{\partial x^{02}} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right] g(x^0, r) \\ &= \int_0^\infty dr [g_{,11}(r, r) - g_{,22}(r, r)] \\ &= \int_0^\infty dr \frac{d}{dr} [g_{,1}(r, r) - g_{,2}(r, r)], \quad (4.3.8) \end{aligned}$$

wobei die Indizes 1, 2 nach dem Komma die partiellen Ableitungen von g nach der ersten und zweiten Variable bezeichnen, und

$$g(x^0, r) = \frac{r}{4\pi} \int_\Omega d^2\mathbf{e} f(x^0, r\mathbf{e}). \quad (4.3.9)$$

Das letzte Integral in (4.3.8) können wir nun direkt ausrechnen. Da die Testfunktion f für grosses x^0, r hinreichend schnell abfällt, verschwindet der Beitrag von $r = \infty$; damit erhalten wir

$$(\square D_{ret})(f) = g_{,2}(0, 0) - g_{,1}(0, 0) = f(0), \quad (4.3.10)$$

wobei nur der erste Term beiträgt, bei dem die Ableitung nach r auf den r -Vorfaktor von g wirkt. Dies beweist damit unsere Behauptung.

4.3.1 Die retardierten und avancierten Potentiale

Mit der Green'schen Funktion D_{ret} lassen sich die inhomogenen Wellengleichungen (4.3.1) nun sofort lösen:

$$\Phi(x) = 4\pi k \int d^4y D_{ret}(x - y) \rho(y),$$

$$\mathbf{A}(x) = \frac{4\pi k}{c} \int d^4y D_{ret}(x-y) \mathbf{j}(y).$$

Wegen der Kontinuitätsgleichung (3.2.6) erfüllen diese Potentiale die Lorentz Eichbedingung (3.6.26):

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} &= \frac{4\pi k}{c} \int d^4y \left[c \frac{\partial}{\partial x^0} D_{ret}(x-y) \rho(y) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot D_{ret}(x-y) \mathbf{j}(y) \right] \\ &= -\frac{4\pi k}{c} \int d^4y \left[c \frac{\partial}{\partial y^0} D_{ret}(x-y) \rho(y) + \nabla_{\mathbf{y}} \cdot D_{ret}(x-y) \mathbf{j}(y) \right] \\ &= \frac{4\pi k}{c} \int d^4y D_{ret}(x-y) \left[c \frac{\partial}{\partial y^0} \rho(y) + \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{j}(y) \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

wobei wir in der letzten Zeile das Divergenz Theorem angewendet haben. [Dabei haben wir den Randterm ignoriert, da die Ladungsdichte und die Stromdichte bei Unendlich verschwinden.] Nach Integration der delta-Funktion lauten diese Potentiale explizit

$$\Phi(x) = k \int d^3\mathbf{y} \frac{\rho\left(\mathbf{y}, t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c}\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \quad (4.3.12)$$

$$\mathbf{A}(x) = \frac{k}{c} \int d^3\mathbf{y} \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{y}, t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c}\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}. \quad (4.3.13)$$

Diese Potentiale nennt man *retardierte Potentiale*. Der Unterschied zu den statischen Formeln (2.6.1) und (3.2.7) für Φ und \mathbf{A} besteht in der Retardierung: eine Änderung von ρ und \mathbf{j} an der Stelle \mathbf{y} wirkt sich erst nach der Zeit $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|/c$ auf das Feld an der Stelle \mathbf{x} aus.

Der einlaufende Teil der freien Kugelwelle (4.2.8)

$$D_{av}(x) = \frac{1}{4\pi r} \delta(x^0 + r), \quad (4.3.14)$$

ist ebenfalls eine Green'sche Funktion des d'Alembert Operators; die entsprechenden Potentiale werden *avancierte Potentiale* genannt, und definieren natürlich auch eine Lösung zu (4.3.1). Die retardierten (bzw. avancierten) Potentiale liegen in der kausalen Zukunft (bzw. Vergangenheit) der Quellen (ρ, \mathbf{j}) . Also bringen erstere die Einsicht zum Ausdruck, dass die Quellen die *Ursachen* der Felder sind. Diese Kausalitätsforderung ist mit den Maxwell Gleichungen vereinbar, aber sie ist keine Folgerung derselben, da die Maxwell Gleichungen keine Zeitrichtung auszeichnen.

4.4 Ausstrahlung

Als ein Beispiel, betrachte eine Ladungs- und Stromverteilung im Gebiet $|\mathbf{y}| < d$. Im statischen Fall fallen die Felder \mathbf{E} bzw. \mathbf{B} für $r \rightarrow \infty$ mindestens wie r^{-2} bzw. r^{-3} ab. Wie wir jetzt erklären wollen bewirkt die Retardierung im zeitabhängigen Fall, dass \mathbf{E}

und \mathbf{B} nur wie r^{-1} abfallen. Damit wird der Energiefluss in ein festes Raumwinkelelement konstant (Ausstrahlung).

Um die Felder in Ordnung r^{-1} zu berechnen, entwickeln wir zunächst

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = \frac{1}{r} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{d}{r}\right) \right], \quad (4.4.1)$$

wobei $r = |\mathbf{x}|$. In führender Ordnung werden dann die elektromagnetischen Potentiale einfach

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{k}{r} \int d^3\mathbf{y} \rho\left(\mathbf{y}, t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{c}\right) \\ \mathbf{A}(x) &= \frac{k}{cr} \int d^3\mathbf{y} \mathbf{j}\left(\mathbf{y}, t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{c}\right) \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

sofern

$$r \gg d. \quad (4.4.3)$$

Um daraus die Felder zu bestimmen müssen wir den Differentialoperator $\nabla_{\mathbf{x}}$ auf diese Potentiale anwenden. Dabei gibt es zwei Terme: falls der Differentialoperator auf ρ oder \mathbf{j} wirkt, dann ist der resultierende Term proportional zu

$$-\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} \simeq -\frac{\mathbf{e}}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (4.4.4)$$

und entsprechend für \mathbf{A} , wobei \mathbf{e} der Einheitsvektor ist, der in die Richtung von \mathbf{x} zeigt. Der zweite Term kommt daher, dass der Differentialoperator auf r^{-1} wirkt: dann ist der resultierende Term proportional zu

$$-\frac{\mathbf{x}}{r^3}. \quad (4.4.5)$$

Der erste Betrag überwiegt falls

$$\frac{\omega}{c} \gg r^{-1}, \quad (4.4.6)$$

wobei ω eine typische inverse Zeit ist, über welche ρ (oder entsprechend \mathbf{j}) eine relative Änderung der Ordnung 1 erfahren. Falls die Zeitabhängigkeit der Quelle durch eine harmonische Schwingung bestimmt ist (d.h. falls sie proportional zu $\exp(-i\omega t)$ ist), bedeutet dies einfach, dass

$$r \gg \lambda, \quad (4.4.7)$$

wobei $\lambda = 2\pi c/\omega$ die Lichtwellenlänge zur Frequenz ω ist. Unter diesen beiden Bedingungen (d.h. falls (4.4.3) und (4.4.7) erfüllt sind), ist also

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = -\mathbf{e} \wedge \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (4.4.8)$$

und unter Benutzung von (3.6.19)

$$\mathbf{E} = \mathbf{e} \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (4.4.9)$$

Da wir die Lorentz Eichung angenommen haben, ist der erste Term gerade $-\mathbf{e} \operatorname{div} \mathbf{A}$, was nach der obigen Analyse (in führender Ordnung) gerade mit

$$-\mathbf{e} \operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{c} \mathbf{e} \left(\mathbf{e} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \quad (4.4.10)$$

übereinstimmt. Daher können wir also \mathbf{E} als

$$\mathbf{E} = \mathbf{e} \left(\frac{1}{c} \mathbf{e} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{e} \wedge \left(\mathbf{e} \wedge \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = -\mathbf{e} \wedge \mathbf{B} \quad (4.4.11)$$

schreiben. In Ordnung r^{-1} sind also \mathbf{E} und \mathbf{B} vollständig durch die Zeitabhängigkeit der Transversalkomponenten von \mathbf{A} (d.h. der Komponenten orthogonal zu \mathbf{e}) bestimmt. Weiterhin verhalten sich \mathbf{E} , \mathbf{B} und \mathbf{e} wie in einer ebenen Welle mit Fortpflanzungsrichtung \mathbf{e} . Das durch (4.4.3) und (4.4.7) charakterisierte Gebiet heisst deshalb *Wellenzone*. Insbesondere ist dort die Energiestromdichte \mathbf{S} (der Poynting Vektor) radial nach aussen gerichtet,

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi k} \mathbf{E}^2 \mathbf{e} = \frac{c}{4\pi k} \mathbf{B}^2 \mathbf{e}. \quad (4.4.12)$$

Wir betrachten nun weiter den Fall, wo die relative Änderung von \mathbf{j} in der Zeit d/c klein ist, d.h. für den

$$d \ll \lambda. \quad (4.4.13)$$

Diese Situation tritt insbesondere in der Kernphysik auf. Mit

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = r - \mathbf{e} \cdot \mathbf{y} + \mathcal{O}\left(\frac{d^2}{r}\right) \quad (4.4.14)$$

gilt für das Vektorpotential (4.4.2)

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{k}{cr} \int d^3\mathbf{y} \mathbf{j} \left[\mathbf{y}, t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{y}}{c} + \mathcal{O}\left(\frac{d^2}{rc}\right) \right]. \quad (4.4.15)$$

Unter der Annahme (4.4.13) können wir dann den letzten Term ignorieren, da die relative Änderung von \mathbf{j} in der Zeit $\mathcal{O}(d^2/rc)$ von der Ordnung

$$\frac{d^2}{rc} \omega = \frac{d^2}{rc} \frac{2\pi c}{\lambda} \simeq \frac{d^2}{r\lambda} \ll 1 \quad (4.4.16)$$

ist. [Zusätzlich zu (4.4.13) gilt natürlich weiterhin (4.4.3).] Wir können dann die Stromverteilung \mathbf{j} in einer Taylor Reihe entwickeln

$$\mathbf{j} \left(\mathbf{y}, t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{y}}{c} \right) = \mathbf{j} \left(\mathbf{y}, t - \frac{r}{c} \right) + \mathbf{e} \cdot \mathbf{y} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \left(\mathbf{y}, t - \frac{r}{c} \right) + \dots \quad (4.4.17)$$

Die einzelnen Beiträge dieser Entwicklung können nun separat diskutiert werden.

4.4.1 Elektrische Dipolstrahlung

Der Beitrag des ersten Terms in (4.4.17) zu \mathbf{A} ist

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{k}{cr} \int d^3\mathbf{y} \mathbf{j}\left(\mathbf{y}, t - \frac{r}{c}\right) = \frac{k}{cr} \dot{\mathbf{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right), \quad (4.4.18)$$

wobei \mathbf{p} das elektrische Dipolmoment (2.8.8)

$$\mathbf{p}(t) = \int d^3\mathbf{y} \mathbf{y} \rho(\mathbf{y}, t) \quad (4.4.19)$$

ist. Um (4.4.18) zu beweisen, beobachtet man, dass für jeden konstanten Vektor \mathbf{n}

$$\begin{aligned} \frac{cr}{k} \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} &= \int d^3\mathbf{y} \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{y}, t - r/c) \\ &= \int d^3\mathbf{y} (\mathbf{j} \cdot \nabla_{\mathbf{y}})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{y}) \\ &= - \int d^3\mathbf{y} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{y}) \operatorname{div} \mathbf{j} \\ &= \mathbf{n} \cdot \int d^3\mathbf{y} \mathbf{y} \dot{\rho}(\mathbf{y}, t) \end{aligned} \quad (4.4.20)$$

gilt, wobei wir in der dritten Zeile das Divergenz Theorem und in der letzten Zeile die Kontinuitätsgleichung (3.2.6) angewendet haben. Da diese Gleichung für beliebiges \mathbf{n} gilt, gilt sie daher als Vektorgleichung und (4.4.18) folgt.

Die zugehörigen Felder (in Ordnung r^{-1}) sind dann

$$\mathbf{E} = \frac{k}{r c^2} \mathbf{e} \wedge (\mathbf{e} \wedge \ddot{\mathbf{p}}) = -\frac{k}{r c^2} \ddot{\mathbf{p}}_{\perp}, \quad (4.4.21)$$

sowie

$$\mathbf{B} = \mathbf{e} \wedge \mathbf{E}, \quad (4.4.22)$$

wobei $\ddot{\mathbf{p}} = \ddot{\mathbf{p}}(t - r/c)$ zur retardierten Zeit zu nehmen ist. Da in \mathbf{E} nur die zu \mathbf{e} orthogonale Komponente von $\ddot{\mathbf{p}}$ beiträgt, ist der Betrag von \mathbf{E} gerade zu

$$|\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)| = \frac{k}{r c^2} |\ddot{\mathbf{p}}| \sin \theta, \quad (4.4.23)$$

wobei θ der Winkel zwischen \mathbf{x} und $\ddot{\mathbf{p}}$ ist. Daher ist also die Energiestromdichte

$$\mathbf{S} = \frac{k}{4\pi r^2 c^3} \ddot{\mathbf{p}}^2 \sin^2 \theta \mathbf{e}. \quad (4.4.24)$$

Die total abgestrahlte Leistung (wegen (3.6.13) ist das einfach das Oberflächenintegral der Energiestromdichte über eine beliebig grosse Kugel) beträgt daher

$$I = \frac{k}{4\pi c^3} \ddot{\mathbf{p}}^2 \int d\Omega \sin^2 \theta = \frac{2}{3} \frac{k}{c^3} \ddot{\mathbf{p}}^2. \quad (4.4.25)$$

4.4.2 Magnetische Dipolstrahlung

Den zweiten Term in (4.4.17) zerlegen wir gemäss

$$(\mathbf{e} \cdot \mathbf{y}) \mathbf{j} = -\frac{1}{2} \mathbf{e} \wedge (\mathbf{y} \wedge \mathbf{j}) + \frac{1}{2} [(\mathbf{e} \cdot \mathbf{y}) \mathbf{j} + (\mathbf{e} \cdot \mathbf{j}) \mathbf{y}] . \quad (4.4.26)$$

Der Beitrag des ersten Teils von (4.4.26) zu \mathbf{A} ist

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = -\frac{k}{c r} \mathbf{e} \wedge \dot{\mathbf{m}} \left(t - \frac{r}{c} \right) , \quad (4.4.27)$$

wobei

$$\mathbf{m}(t) = \frac{1}{2c} \int d^3 \mathbf{y} \mathbf{y} \wedge \mathbf{j}(\mathbf{y}, t) \quad (4.4.28)$$

das *magnetische Dipolmoment* ist. Die entsprechenden Felder sind dann

$$\mathbf{B} = \frac{k}{r c^2} \mathbf{e} \wedge (\mathbf{e} \wedge \ddot{\mathbf{m}}) = -\frac{k}{r c^2} \ddot{\mathbf{m}}_{\perp} , \quad \mathbf{E} = -\mathbf{e} \wedge \mathbf{B} , \quad (4.4.29)$$

wobei wir wiederum (4.4.4) benutzt haben. Die Felder sind daher völlig zur elektrischen Dipolstrahlung analog, d.h. sie gehen aus den Formeln des vorigen Abschnitts unter der Ersetzung $(\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{p}) \mapsto (\mathbf{B}, -\mathbf{E}, \mathbf{m})$ hervor. Insbesondere ist daher die Ausstrahlung (bei gleichen Dipolmomenten) dieselbe.

4.4.3 Elektrische Quadrupolstrahlung

Im zweiten Term in (4.4.26) schreiben wir

$$\mathbf{n} \cdot [(\mathbf{e} \cdot \mathbf{y}) \mathbf{j} + (\mathbf{e} \cdot \mathbf{j}) \mathbf{y}] = (\mathbf{j} \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) (\mathbf{e} \cdot \mathbf{y})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{y}) , \quad (4.4.30)$$

wobei \mathbf{n} wiederum ein konstanter Vektor ist. Somit trägt dieser Term zu \mathbf{A} gerade

$$\begin{aligned} \frac{2 c^2 r}{k} \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} &= \int d^3 \mathbf{y} \left(\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \cdot \nabla \right) (\mathbf{e} \cdot \mathbf{y})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{y}) \\ &= - \int d^3 \mathbf{y} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{y})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{j} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int d^3 \mathbf{y} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{y})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}, t) \end{aligned} \quad (4.4.31)$$

wobei wir in der zweiten Zeile das Divergenz Theorem und in der letzten wiederum die Kontinuitätsgleichung (3.2.6) benutzt haben. Da \mathbf{n} wiederum beliebig ist, ist das Vektorpotential daher also

$$\mathbf{A} = \frac{k}{6c^2 r} \ddot{\mathbf{T}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \mathbf{e} , \quad (4.4.32)$$

wobei die Komponenten des Tensors $\mathbf{T}(t)$ durch

$$T_{ij}(t) = 3 \int d^3 \mathbf{y} y_i y_j \rho(\mathbf{y}, t) \quad (4.4.33)$$

gegeben sind. Dieser Tensor unterscheidet sich von dem zuvor eingeführten Quadrupol-
tensor Q_{ij} (siehe (2.8.9)) gerade um die Spur von T , d.h.

$$Q_{ij} = T_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \text{Sp}(T), \quad (4.4.34)$$

wobei $\text{Sp}(T) = \sum_i T_{ii}$ die Spur von T ist. (Insbesondere hat daher Q verschwindende
Spur.) Damit ist also das Vektorpotential gerade

$$\mathbf{A} = \frac{k}{6c^2 r} \left(\ddot{\mathbf{Q}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \mathbf{e} + \frac{1}{3} \frac{d^2}{dt^2} (\text{Sp}(T)) \mathbf{e} \right). \quad (4.4.35)$$

Da der zweite Term parallel zu \mathbf{e} ist, trägt er in der Wellenzone (in der \mathbf{E} und \mathbf{B} durch
(4.4.11) gegeben sind) nicht zu \mathbf{E} und \mathbf{B} bei:

$$\mathbf{B} = -\frac{k}{6c^3 r} \mathbf{e} \wedge \frac{d^3}{dt^3} \mathbf{Q} \mathbf{e}, \quad \mathbf{E} = -\mathbf{e} \wedge \mathbf{B}. \quad (4.4.36)$$

Ferner ist die Energiestromdichte dort

$$|\mathbf{S}| = \frac{k}{4\pi 36c^5 r^2} \left(\mathbf{e} \wedge \frac{d^3}{dt^3} \mathbf{Q} \mathbf{e} \right)^2 = \frac{k}{4\pi 36c^5 r^2} \left[\left(\frac{d^3}{dt^3} \mathbf{Q} \mathbf{e} \right)^2 - \left(\mathbf{e} \cdot \frac{d^3}{dt^3} \mathbf{Q} \mathbf{e} \right)^2 \right]. \quad (4.4.37)$$

Da der Quadrupoltensor symmetrisch ist, können wir immer orthonormale Koordinaten
finden, in denen er diagonal ist

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 \end{pmatrix}. \quad (4.4.38)$$

Das zugehörige Koordinatensystem nennt man dann das *Hauptachsensystem* des Qua-
drupoltenors. In diesem Koordinatensystem ist

$$(\mathbf{Q} \mathbf{e})^2 = \sum_i (q_i e_i)^2, \quad (4.4.39)$$

und daher ist

$$\int d\mathbf{e} (\mathbf{Q} \mathbf{e})^2 = \frac{4\pi}{3} \text{Sp}(Q^2). \quad (4.4.40)$$

Ausserdem gilt

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{Q} \mathbf{e} = \sum_i q_i e_i^2 \quad (4.4.41)$$

und daher

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{e} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{Q} \mathbf{e})^2 &= \sum_{ij} q_i q_j \int d\mathbf{e} e_i^2 e_j^2 \\ &= \frac{4\pi}{15} \sum_{ij} q_i q_j (1 + 2\delta_{ij}) \\ &= \frac{4\pi}{15} (\text{Sp}(Q)^2 + 2 \text{Sp}(Q^2)) \end{aligned} \quad (4.4.42)$$

Der erste Term verschwindet, da $\text{Sp}(Q) = 0$, und damit ist

$$\int d\mathbf{e} \left(\mathbf{e} \cdot \frac{d^3}{dt^3} \mathbf{Q} \mathbf{e} \right)^2 = \frac{8\pi}{15} \text{Sp} \left[\left(\frac{d^3}{dt^3} \mathbf{Q} \right)^2 \right]. \quad (4.4.43)$$

Somit beträgt die total ausgestrahlte Leistung

$$I = \frac{k}{36 c^5} \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{15} \right) \text{Sp} \left[\left(\frac{d^3}{dt^3} \mathbf{Q} \right)^2 \right] = \frac{k}{180 c^5} \text{Sp} \left[\left(\frac{d^3}{dt^3} \mathbf{Q} \right)^2 \right]. \quad (4.4.44)$$

Zum Beispiel ist im Falle einer um die z -Achse rotationsymmetrischen Ladungsverteilung das Quadrupolmoment notwendigerweise von der Form

$$Q = \begin{pmatrix} -q & 0 & 0 \\ 0 & -q & 0 \\ 0 & 0 & 2q \end{pmatrix}, \quad (4.4.45)$$

und daher ist

$$\mathbf{e} \wedge \frac{d^3}{dt^3} \mathbf{Q} \mathbf{e} = 3 \frac{d^3 q}{dt^3} (e_2 e_3, -e_1 e_3, 0). \quad (4.4.46)$$

Als Funktion des Winkels θ von der z -Achse ist dann die Energiestromdichte

$$S(\theta) = \left(\frac{d^3 q}{dt^3} \right)^2 \frac{k}{16\pi c^5 r^2} [(e_1 e_3)^2 + (e_2 e_3)^2] = \left(\frac{d^3 q}{dt^3} \right)^2 \frac{k}{16\pi c^5 r^2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta. \quad (4.4.47)$$

Die verschiedenen Multipolfelder überlagern sich natürlich. Dabei addieren sich die Energiestromdichten nicht, da Interferenzterme auftreten.

Man kann natürlich auch die Entwicklung (4.4.26) noch weiter führen. Dann treten, wie in der Elektrostatik, sukzessiv höhere Multipole auf. Diese sollen jedoch hier nicht behandelt werden.

4.4.4 Lineare Antenne

Als ein einfaches Beispiel betrachten wir eine Antenne. Diese bestehe aus einem Draht der Länge d , der von $-d/2$ bis $d/2$ entlang der z -Achse (also bei $x = y = 0$) orientiert sei. Am Ursprung ist der Draht mit einer Stromquelle in Kontakt, die dafür sorgt, dass die Stromstärke im Draht die Form

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = J \mathbf{e}_z \cos(\omega t) \sin \left(\frac{\hat{k}d}{2} - \hat{k}|z| \right) \delta(x) \delta(y), \quad |z| \leq \frac{d}{2} \quad (4.4.48)$$

hat. Hierbei ist ω die Frequenz, und $\hat{k} = \frac{\omega}{c}$ der zugehörige Wellenvektor, sowie J die maximale Amplitude des Stromes. Die Stromstärke verschwindet an den beiden Enden des Drahtes ($|z| = \frac{d}{2}$).

In der Wellenzone, d.h. in der Approximation (4.4.15), ist das Vektorpotential dann durch

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{k}{cr} \int d^3\mathbf{y} \mathbf{j} \left(\mathbf{y}, t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{y}}{c} \right) \quad (4.4.49)$$

beschrieben. Einsetzen von (4.4.48) führt zu

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{e}_z \frac{Jk}{cr} e^{i\hat{k}r - i\omega t} \left[\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} dz \sin \left(\frac{\hat{k}d}{2} - \hat{k}|z| \right) e^{-i\hat{k}z \cos \theta} \right], \quad (4.4.50)$$

wobei wir benutzt haben, dass für $\mathbf{e} \cdot \mathbf{y} = z \cos \theta$ und θ den Winkel zur z -Achse beschreibt und das physikalische Vektorpotential gerade durch den Realteil von (4.4.50) gegeben ist. Um das Integral in der Klammer zu berechnen schreiben wir

$$\sin \left(\frac{\hat{k}d}{2} - \hat{k}|z| \right) = \frac{1}{2i} \left(e^{i\frac{\hat{k}d}{2} - i\hat{k}|z|} - e^{-i\frac{\hat{k}d}{2} + i\hat{k}|z|} \right) \quad (4.4.51)$$

und führen dann das Integral separat für die beiden Terme aus. Dies führt zu

$$\begin{aligned} [\dots] &= -\frac{i}{2} \left(\int_{-\frac{d}{2}}^0 e^{-i\hat{k}z \cos \theta} e^{i\hat{k}\frac{d}{2} + i\hat{k}z} - \int_{-\frac{d}{2}}^0 e^{-i\hat{k}z \cos \theta} e^{-i\hat{k}\frac{d}{2} - i\hat{k}z} \right) \\ &\quad - \frac{i}{2} \left(\int_0^{\frac{d}{2}} e^{-i\hat{k}z \cos \theta} e^{i\hat{k}\frac{d}{2} - i\hat{k}z} - \int_0^{\frac{d}{2}} e^{-i\hat{k}z \cos \theta} e^{-i\hat{k}\frac{d}{2} + i\hat{k}z} \right) \\ &= \frac{1}{2\hat{k}} \left[e^{i\hat{k}\frac{d}{2}} \frac{1}{(\cos \theta - 1)} \left(1 - e^{i\frac{\hat{k}d}{2}(\cos \theta - 1)} \right) - e^{-i\hat{k}\frac{d}{2}} \frac{1}{(\cos \theta + 1)} \left(1 - e^{i\frac{\hat{k}d}{2}(\cos \theta + 1)} \right) \right. \\ &\quad \left. + e^{i\hat{k}\frac{d}{2}} \frac{1}{(\cos \theta + 1)} \left(e^{-i\frac{\hat{k}d}{2}(\cos \theta + 1)} - 1 \right) - e^{-i\hat{k}\frac{d}{2}} \frac{1}{(\cos \theta - 1)} \left(e^{-i\frac{\hat{k}d}{2}(\cos \theta - 1)} - 1 \right) \right] \\ &= \frac{1}{\hat{k}} \left\{ \left[\frac{1}{(\cos \theta + 1)} - \frac{1}{(\cos \theta - 1)} \right] \cdot \left[\cos \left(\frac{\hat{k}d}{2} \cos \theta \right) - \cos \left(\frac{\hat{k}d}{2} \right) \right] \right\} \\ &= \frac{2}{\hat{k}} \left[\frac{\cos \left(\frac{\hat{k}d}{2} \cos \theta \right) - \cos \left(\frac{\hat{k}d}{2} \right)}{\sin^2 \theta} \right]. \quad (4.4.52) \end{aligned}$$

Das gesamte Vektorpotential ist dann also

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{e}_z \frac{Jk}{cr} \frac{2}{\hat{k}} \cos(\hat{k}r - \omega t) \left[\frac{\cos \left(\frac{\hat{k}d}{2} \cos \theta \right) - \cos \left(\frac{\hat{k}d}{2} \right)}{\sin^2 \theta} \right]. \quad (4.4.53)$$

Das elektrische Feld ist gemäss (4.4.11) proportional zur Zeitableitung von \mathbf{A} , also

$$|\mathbf{E}| = \sin \theta \frac{2Jk}{cr} \sin(\hat{k}r - \omega t) \left[\frac{\cos \left(\frac{\hat{k}d}{2} \cos \theta \right) - \cos \left(\frac{\hat{k}d}{2} \right)}{\sin^2 \theta} \right]. \quad (4.4.54)$$

Figure 1: Die Winkelabhängigkeit der abgestrahlten Leistung für $\hat{k}d = 0.05$ und $\hat{k}d = 20$.

Das Zeitmittel der abgestrahlten Leistung ist daher

$$|\bar{\mathbf{S}}| = \frac{J^2 k}{cr^2} \left[\frac{\cos\left(\frac{\hat{k}d}{2} \cos \theta\right) - \cos\left(\frac{\hat{k}d}{2}\right)}{\sin \theta} \right]^2. \quad (4.4.55)$$

Die Winkelverteilung von $|\bar{\mathbf{S}}|$ hängt von dem Wert von $\hat{k}d$ ab:

5 Die spezielle Relativitätstheorie

Die spezielle Relativitätstheorie ist seit ihrer Veröffentlichung durch Einstein im Jahr 1905 eine der Ecksäulen der Physik geworden, die so zentral und anerkannt ist wie die Newton'sche (klassische) Mechanik, die Maxwell Gleichungen der Elektrodynamik oder die Schrödinger Gleichung der Quantenmechanik. Ihre Richtigkeit wird unter professionellen (!) Physikern nicht angezweifelt, und sie spielt für viele Belange der Physik eine wichtige und zentrale Rolle.

Die Ursprünge der speziellen Relativitätstheorie liegen in der Elektrodynamik. Man kann sogar sagen, dass die Entwicklung der Maxwell Gleichungen mit ihrer Vereinigung von Elektrizität, Magnetismus und Optik uns gleichermassen die spezielle Relativitätstheorie aufgezwungen hat. Wichtigen Pioniere dieser Entwicklung waren Lorentz und Poincaré, aber es war Einstein, der die Verallgemeinerung des zu Grunde liegenden Prinzips auf alle Phänomene der Physik erkannte und die weitreichenden Konsequenzen des zweiten Postulats verstand.

5.1 Galileisymmetrie und die Postulate von Einstein

Wie wir in Kapitel 3.7 (und dann ausführlicher in Kapitel 4) besprochen haben, beschreiben die Maxwell Gleichungen (freie) elektromagnetische Wellen, die wir normalerweise (in einem gewissen Spektralbereich) als Licht bezeichnen. Unsere Erfahrung mit Wellen involviert üblicherweise ein Medium, in dem die Wellen propagieren. (Zum Beispiel ist das Medium von Wasserwellen einfach das Wasser.) Es war daher natürlich zu postulieren, dass auch das Licht in einem Medium (das man den 'Äther' nannte) propagiert. Nach allem, was man über Licht wusste, musste der Äther überall sein; er musste vernachlässigbare Dichte haben und vernachlässigbare Wechselwirkungen mit der übrigen Materie besitzen.

Diese Ätherhypothese implizierte insbesondere, dass die Elektrodynamik sich in wesentlicher Weise von den anderen Bereichen der Physik unterschied. Man hatte nämlich schon seit langer Zeit verstanden, dass die Gleichungen der Mechanik sich in Koordinatensystemen, die sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit relativ zueinander bewegen, eine identische Form annehmen. (Man sagt daher oft, dass die klassische Mechanik *Galilei-invariant* ist.) Um genauer zu verstehen, was das Problem der Ätherhypothese ist, wollen wir diese Galileisymmetrie kurz besprechen.

Wir bezeichnen mit S und \hat{S} zwei Koordinatensysteme, die sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit gegeneinander bewegen. Wir bezeichnen die Koordinaten in S durch (x, y, z, t) , und jene in \hat{S} durch $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{t})$. Da sich die beiden Koordinatensysteme mit gleichförmiger Geschwindigkeit gegeneinander bewegen, sind die Koordinaten durch

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{x} - \mathbf{v}t, \\ \hat{t} &= t\end{aligned}\tag{5.1.1}$$

miteinander in Beziehung. (Wir haben hier angenommen, dass wir den Ursprung der Koordinatensysteme geeignet gewählt haben.) Zum Beispiel sind die Gleichungen der

klassischen Mechanik unter diesen Transformationen invariant: für N Teilchen, die zum Beispiel durch 2-Körperwechselwirkungen miteinander wechselwirken, ist die Bewegungsgleichung in \hat{S}

$$m_i \frac{d\hat{\mathbf{v}}_i}{d\hat{t}} = -\hat{\nabla}_i \sum_{j \neq i} V_{ij}(|\hat{\mathbf{x}}_i - \hat{\mathbf{x}}_j|). \quad (5.1.2)$$

Die obigen Transformationsgleichungen implizieren, dass $\hat{\mathbf{v}}_i = \mathbf{v}_i + \mathbf{v}$, wobei \mathbf{v} die konstante Geschwindigkeit ist, mit der sich die beiden Koordinatensystem relativ zueinander bewegen, und $\hat{t} = t$. Dann gilt insbesondere

$$\frac{d\hat{\mathbf{v}}_i}{d\hat{t}} = \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \quad (5.1.3)$$

und daher ist die obige Bewegungsgleichung zu

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = -\nabla_i \sum_{j \neq i} V_{ij}(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|) \quad (5.1.4)$$

äquivalent. Die Bewegungsgleichungen haben daher die identische Form in S und \hat{S} , und man sagt, dass sie Galilei-invariant sind.

Die Maxwell-Gleichungen sind andererseits *nicht* unter Galilei-Transformationen invariant. Betrachte zum Beispiel das freie elektromagnetische Feld, d.h. die Maxwell Gleichungen im leeren Raum. Wie wir in Kapitel 3.7.1 gesehen haben erfüllen das elektrische und magnetische Feld dann gerade die Wellengleichung

$$\square \mathbf{E} = \square \mathbf{B} = 0. \quad (5.1.5)$$

Im Koordinatensystem \hat{S} erfüllt daher jede Komponente $u \equiv E_j$ von \mathbf{E} die Gleichung

$$\left(\sum_i \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}_i^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \hat{t}^2} \right) u = 0. \quad (5.1.6)$$

Unter Benutzung der obigen Relationen (5.1.1) wird diese Gleichung im Koordinatensystem S gerade

$$\left(\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2}{c^2} \mathbf{v} \cdot \nabla \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \right) u = 0. \quad (5.1.7)$$

Die Form der Wellengleichung ist daher nicht unter Galilei Transformationen invariant.

Für Schallwellen ist der Umstand, dass die Wellengleichung nicht unter Galileitransformationen forminvariant ist, kein Problem, da sich Schallwellen in einem Medium (nämlich der Luft) ausbreiten. Es gibt daher ein bevorzugtes Bezugssystem, nämlich jenes in dem die Luft ruht, und nur in diesem gilt die übliche Form der Wellengleichung. Für elektromagnetische Wellen ist dies jedoch ein wenig problematischer, da der Äther recht wenig fassbar ist und seine einzige Rolle darin zu bestehen scheint, als Medium

für elektromagnetische Wellen zu fungieren. Insbesondere würde der Äther daher ein bevorzugtes Bezugssystem festlegen, nämlich dasjenige, in dem er gerade ruht.

Versuche, die Bewegung der Erde oder bewegter Bezugssysteme relativ zum Äther zu messen (insbesondere das Michelson-Morley Experiment) schlugen fehl. Lorentz erklärte dieses ‘Nullexperiment’, in dem er postulierte, dass Objekte, die sich mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} relativ zum Äther bewegen, in der Richtung ihrer Bewegung kürzer erscheinen, und zwar gerade

$$L(v) = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (5.1.8)$$

Weiterhin zeigt er und Poincaré, dass die Maxwell-Gleichungen unter den Transformationen, die wir heute die *Lorentz-Transformationen* nennen, invariant sind. [Wir werden das in Kürze im Detail erklären.]

Einstein erkannte, dass die Ätherhypothese grundsätzlich unbefriedigend war, und dass das Problem darin lag, die Forminvarianz der Gleichungen der Physik unter Galilei-Transformationen zu fordern. Er schlug vor, dass alle physikalischen Gesetze den Postulaten der speziellen Relativitätstheorie genügen müssen. Diese basiert auf den folgenden zwei Postulaten:

- 1. Relativitätsprinzip:** Die Naturgesetze sind unabhängig vom Koordinatensystem. Insbesondere haben alle Naturgesetze die gleiche Form in Koordinatensystemen, die sich mit konstanter Geschwindigkeit relativ zueinander bewegen. (Bezugssysteme, die sich mit konstanter Geschwindigkeit relativ zueinander bewegen, werden auch *Inertialsysteme* genannt.)
- 2. Konstanz der Lichtgeschwindigkeit:** Die Lichtgeschwindigkeit ist unabhängig von der Geschwindigkeit ihrer Quelle, d.h. Licht hat dieselbe Geschwindigkeit in allen Inertialsystemen.

Wie wir später sehen werden implizieren diese Postulate auch, dass die Gesetze der klassischen Mechanik modifiziert werden müssen; dies werden wir später im Detail diskutieren.

Als Einstein diese Postulate aufstellte, gab es dafür noch keine experimentellen Beweise; inzwischen sind diese Postulate jedoch in vielfältiger Weise experimentell überprüft worden, und es gibt keine Evidenz dafür, dass sie falsch sein könnten.

5.2 Lorentzgruppe und Poincarégruppe

Das zweite Postulat von Einstein behauptet, dass die Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen gleich ist. Insbesondere impliziert dies, dass die relevanten Transformationsgleichungen, unter denen die Naturgesetze invariant sind, nicht die Galileitransformationen sein können. Wir wollen nun die Struktur dieser Transformationen ableiten; diese sind im wesentlichen dadurch bestimmt, dass die Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen gleich ist.

Betrachte dazu wiederum zwei Koordinatensysteme S und \hat{S} , die sich mit der konstanten Geschwindigkeit \mathbf{v} relativ zueinander bewegen. Wir bezeichnen die Koordinaten

von S und \hat{S} durch (t, x, y, z) bzw. $(\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$. Für das folgende ist es bequem, ausserdem die sogenannte 4-er Schreibweise einzuführen (die wir in Kapitel 4.3 schon einmal kurz angedeutet hatten): wir definieren also

$$x = (ct, x, y, z) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3), \quad (5.2.1)$$

und schreiben die Komponenten von x als x^μ , wobei $\mu = 0, 1, 2, 3$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass der Ursprung der beiden Koordinatensysteme für $t = \hat{t} = 0$ gerade übereinstimmt. Wir nehmen an, dass eine Lichtquelle, die im System S bei $x = y = z = 0$ ruht zur Zeit $t = 0$ eine Lichtblitz aussendet. Nach Einstein's zweitem Postulat wird sich dieser Lichtblitz in beiden Inertialsystemen mit der selben Geschwindigkeit c ausbreiten. Im System S erreicht der Lichtblitz daher den Punkt (x, y, z) zur Zeit t , wobei t durch

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0 \quad (5.2.2)$$

gegeben ist. (Die Punkte, die diese Gleichung erfüllen werden üblicherweise der *Lichtkegel* genannt.) Entsprechend erreicht der Lichtblitz den Punkt $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ zur Zeit \hat{t} , wobei

$$(\hat{x}^0)^2 - (\hat{x}^1)^2 - (\hat{x}^2)^2 - (\hat{x}^3)^2 = c^2 \hat{t}^2 - (\hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2) = 0. \quad (5.2.3)$$

Die Koordinatentransformation, die die Koordinaten (t, x, y, z) auf $(\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ abbildet muss daher den Lichtkegel (5.2.2) auf den Lichtkegel (5.2.3) abbilden.

Um den Lichtkegel einfach zu beschreiben, führen wir nun die *Metrik* $g_{\mu\nu}$ durch

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.2.4)$$

ein. Die Punkte, die auf dem Lichtkegel (5.2.2) liegen, erfüllen dann die Bedingung

$$g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \equiv \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \equiv x^t g x = 0. \quad (5.2.5)$$

Solche x werden manchmal *licht-artig* genannt. Entsprechend ist der Lichtkegel im System \hat{S} durch die Gleichung

$$g_{\mu\nu} \hat{x}^\mu \hat{x}^\nu = \hat{x}^t g \hat{x} = 0 \quad (5.2.6)$$

bestimmt. Der 4-dimensionale reelle Vektorraum mit der Metrik g wird üblicherweise *Minkowski Raum* genannt. Das 4-er Skalarprodukt ist durch

$$(x, y) = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \quad (5.2.7)$$

definiert.

Ein kraftfreies Teilchen bewegt sich im Inertialsystem S mit konstanter Geschwindigkeit, d.h. seine Koordinaten $x = (ct, x, y, z)$ werden durch eine Gerade dargestellt. (Diese Gerade nennt man manchmal auch die ‘Weltlinie’ des Teilchens.) Wegen des ersten Postulates muss es sich daher auch im Inertialsystem \hat{S} auf einer Gerade bewegen. Dies impliziert, dass die Koordinatentransformation von S nach \hat{S} linear sein muss, d.h.

$$\hat{x}^\mu = A^\mu_\nu x^\nu + a^\mu, \quad (5.2.8)$$

wobei die Matrix $A \equiv A(\mathbf{v})$ von der Relativgeschwindigkeit zwischen den beiden Inertialsystemen abhängt. In unserem Fall haben wir den Ursprung der beiden Inertialsysteme so gewählt, dass $a^\mu = 0$. Wir können dann (5.2.8) als $\hat{x} = Ax$ schreiben. Wegen des zweiten Postulats hat die Transformation A dann die Eigenschaft, dass $x^t g x = 0$ impliziert, dass

$$x^t (A^t g A) x = 0. \quad (5.2.9)$$

Da dies für alle licht-artigen x gelten muss, kann man leicht sehen, dass dies nur der Fall sein kann, falls

$$A^t g A = \alpha g, \quad (5.2.10)$$

wobei $\alpha \neq 0$. Tatsächlich ist $\alpha > 0$; dies folgt zum Beispiel daher, dass $A(\mathbf{v})$ stetig von \mathbf{v} abhängen muss, und für $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ offensichtlich $\alpha = 1 > 0$ ist. Da dann auch $\alpha(\mathbf{v})$ stetig von \mathbf{v} abhängt, impliziert der Zwischenwertsatz, dass $\alpha(\mathbf{v}) > 0$ für alle \mathbf{v} . Wir können dann jedes A eindeutig als $A = \lambda \Lambda$ schreiben, wobei $\alpha = \lambda^2$ mit $\lambda > 0$. Die durch Λ definierte Transformation erfüllt dann gerade

$$\Lambda^t g \Lambda = g. \quad (5.2.11)$$

Die linearen Transformationen, die diese Gleichung erfüllen, werden *Lorentztransformationen* genannt. Diese Transformationen generieren offensichtlich eine Gruppe, die sogenannte Lorentzgruppe L . Wenn wir die inhomogenen Translationen (die oben durch a^μ beschrieben wurden) mithinzunehmen, erhalten wir die sogenannte *Poincarégruppe*; dies ist also die Gruppe der Transformationen

$$x^\mu \mapsto \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu, \quad (5.2.12)$$

wobei Λ (5.2.11) erfüllt.

5.3 Lorentztransformationen

Da jede Lorentztransformation (5.2.11) erfüllt, gilt insbesondere, dass

$$\begin{aligned} (\det \Lambda)^2 &= 1, \\ (\Lambda^0_0)^2 - \sum_{k=1}^3 (\Lambda^k_0)^2 &= 1. \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

Die erste Gleichung impliziert, dass $\det \Lambda = \pm 1$, und es folgt aus der zweiten, dass $\pm \Lambda^0_0 \geq 1$. Die Lorentzgruppe L zerfällt deshalb in vier Komponenten, zwischen denen

es keinen stetigen Übergang gibt. Die Zusammenhangskomponente, die die Identität enthält, ist die Untergruppe

$$L_+^\uparrow = \{\Lambda \in L \mid \det \Lambda = 1, \Lambda^0_0 \geq 1\}, \quad (5.3.2)$$

die auch als *eigentliche orthochrone Lorentzgruppe* bezeichnet wird. Sie ist die Schnittmenge der Untergruppen

$$\begin{aligned} L^\uparrow &= \{\Lambda \in L \mid \Lambda^0_0 \geq 1\}, \\ L_+ &= \{\Lambda \in L \mid \det \Lambda = +1\}. \end{aligned}$$

Typische Vertreter der anderen drei Zusammenhangskomponenten sind die Matrizen

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.3.3)$$

sowie

$$PT = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.3.4)$$

T beschreibt Zeitumkehr, wohingegen P eine Raumspiegelung an einem Punkt ist; schliesslich ist PT die Kombination dieser beiden Lorentztransformationen. Die allgemeinsten Elemente der entsprechenden Komponenten können durch Komposition mit der Untergruppe L_+^\uparrow erzeugt werden. Im weiteren werden wir uns deshalb auf L_+^\uparrow beschränken. Im folgenden wollen wir verschiedene Untergruppen von L_+^\uparrow beschreiben.

Die Lorentzgruppe enthält natürlich die Untergruppe der Rotationen. Die zugehörigen Matrizen sind von der Form

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & R & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad (5.3.5)$$

wobei $R \in \text{SO}(3, \mathbb{R})$ eine Rotation des \mathbb{R}^3 beschreibt. Offensichtlich ist jede solche Matrix ein Element von L_+^\uparrow .

Eine interessantere Untergruppe der Lorentzgruppe ist die Gruppe der *speziellen Lorentz-Transformationen*. Es handelt sich dabei um die Lorentztransformationen der Form

$$\Lambda(u) = \begin{pmatrix} \cosh u & -\sinh u & 0 & 0 \\ -\sinh u & \cosh u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.3.6)$$

wobei $u \in \mathbb{R}$. Es ist leicht zu sehen, dass $\det \Lambda(u) = 1$, und dass $\Lambda(u)_0^0 = \cosh u \geq 1$. Diese Matrizen erfüllen die Bedingung (5.2.11), da (wegen der Blockdiagonalform genügt es den oberen 2×2 Block zu betrachten)

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - c^2 & ab - cd \\ ab - cd & b^2 - d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (5.3.7)$$

wobei $a = d = \cosh u$ und $b = c = -\sinh u$. Die speziellen Lorentztransformationen bilden eine einparametrische Untergruppe mit dem Multiplikationsgesetz

$$\Lambda(u_1) \Lambda(u_2) = \Lambda(u_1 + u_2). \quad (5.3.8)$$

Zusammen mit den Drehungen generieren diese Transformationen die gesamte Untergruppe L_+^\uparrow . Jedes $\Lambda \in L_+^\uparrow$ lässt sich nämlich als

$$\Lambda = \Lambda(R_1) \Lambda(u) \Lambda(R_2) \quad (5.3.9)$$

scheiben. Um dies zu beweisen, sei Λ ein beliebiges Element in L_+^\uparrow . Wir betrachten den Unterraum

$$M = \{x \mid x^0 = (\Lambda x)^0 = 0\}. \quad (5.3.10)$$

Es gibt dann zwei Fälle:

(a) $\dim M = 3$. Dann impliziert $x^0 = 0$, dass $(\Lambda x)^0 = 0$. Daher hat Λ dann die für eine Rotation typische Blockform.

(b) $\dim M = 2$. Durch Drehung der x - und y -Koordinaten können wir dann erreichen, dass M gerade mit der y, z -Ebene übereinstimmt. Dann hat Λ die Blockform,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad (5.3.11)$$

wobei A und B 2×2 Matrizen sind. Da $L \in L_+^\uparrow$ gibt es dann nur die beiden Möglichkeiten $\det A = \det B = \pm 1$. Im ersten Fall ist dann

$$\Lambda = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad (5.3.12)$$

und damit das Produkt einer speziellen Lorentztransformation und einer Drehung. Im zweiten Fall schreiben wir

$$\Lambda = \begin{pmatrix} AC & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad (5.3.13)$$

wobei C die 2×2 Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.3.14)$$

ist. Damit ist Λ wiederum das Produkt einer speziellen Lorentztransformation und einer Drehung, und wir haben die obige Zerlegung bewiesen.

Die speziellen Lorentztransformationen werden manchmal auch als *boosts* bezeichnet. Um die diesem Begriff zu Grunde liegende Interpretation zu verstehen, schreiben wir die zu (5.3.6) gehörende Transformation $\hat{x} = \Lambda(u)x$ in Komponenten

$$\begin{aligned} \hat{ct} &= ct \cosh u - x^1 \sinh u, & \hat{x}^2 &= x^2 \\ \hat{x}^1 &= -ct \sinh u + x^1 \cosh u, & \hat{x}^3 &= x^3. \end{aligned}$$

Der Ursprung des Inertialsystems \hat{S} (d.h. der Punkt mit Koordinaten $\hat{x}^1 = \hat{x}^2 = \hat{x}^3 = 0$) hat im Inertialsystem S die Koordinaten

$$x^1 = ct \tanh u, \quad x^2 = 0, \quad x^3 = 0. \quad (5.3.15)$$

Dies bedeutet, dass $\Lambda(u)$ das Inertialsystem S auf ein sich mit der Relativgeschwindigkeit

$$v = c \tanh u \quad (5.3.16)$$

in der x^1 -Richtung bewegendes Inertialsystem \hat{S} abbildet. Da $-1 < \tanh u < 1$ gilt insbesondere, dass $-c < v < c$. Der andere Hauptunterschied zu den üblichen Galileitransformationen besteht ausserdem darin, dass nun auch die Zeitkomponente nicht-trivial transformiert wird.

Wir können natürlich auch die speziellen Lorentztransformationen statt durch u durch die Relativgeschwindigkeit v parametrisieren. Da

$$\frac{1}{\cosh^2 u} = 1 - \tanh^2 u \quad (5.3.17)$$

folgt aus (5.3.16), dass

$$\cosh u = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \sinh u = \frac{v}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (5.3.18)$$

und die obige Koordinatentransformation lautet

$$\begin{aligned} \hat{t} &= \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{x^1 v}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, & \hat{x}^2 &= x^2 \\ \hat{x}^1 &= \frac{x^1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - vt \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, & \hat{x}^3 &= x^3. \end{aligned}$$

Im Limes $c \rightarrow \infty$ gehen die speziellen Lorentztransformationen daher in die entsprechende Galilei-Transformation

$$\hat{t} = t, \quad \hat{x}^1 = x^1 - vt, \quad \hat{x}^2 = x^2, \quad \hat{x}^3 = x^3 \quad (5.3.19)$$

über. Im Gegensatz zu diesen Galileitransformationen (bei denen die Relativgeschwindigkeiten additiv sind) ist das bei den Lorentztransformationen nicht der Fall. [Dort

ist statt dessen der Parameter u additiv!] Führt man zwei Transformationen mit Relativgeschwindigkeiten v_1 und v_2 (beide in der x^1 Richtung) hintereinander aus, dann resultiert daraus eine Transformation mit Relativgeschwindigkeit

$$v = c \tanh(u_1 + u_2) = c \frac{\tanh u_1 + \tanh u_2}{1 + \tanh u_1 \tanh u_2} = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}. \quad (5.3.20)$$

Dies ist das relativistische Additionsgesetz für Geschwindigkeiten. Es sorgt insbesondere dafür, dass die Relativgeschwindigkeit v immer im Betrag kleiner als die Lichtgeschwindigkeit c bleibt!

5.4 Zwischenspiel: Tensoranalysis

Die Forminvarianz der Maxwell Gleichungen unter den Lorentztransformationen kann am einfachsten in der Sprache von Tensorfeldern verstanden werden. Dazu benötigen wir ein paar mathematische Vorbereitungen.

Sei V ein Vektorraum über den reellen (oder komplexen) Zahlen, und sei V^* sein Dualraum. Wir bezeichnen Elemente von V mit kleinen lateinischen und Elemente von V^* mit kleinen griechischen Buchstaben. Der Wert von $\varphi \in V^*$ auf $a \in V$ wird mit $\varphi(a)$ oder (φ, a) bezeichnet.

Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis von V . Dann kann man auf V^* die duale Basis $\{\epsilon^1, \dots, \epsilon^n\}$ einführen, die durch die Eigenschaft

$$(\epsilon^i, e_j) = \delta_j^i \quad (5.4.1)$$

eindeutig festgelegt ist. Die Komponenten von $a \in V$ sind durch die Gleichung

$$a = \sum_{i=1}^n a^i e_i \equiv a^i e_i \quad (5.4.2)$$

bestimmt. Entsprechend schreiben wir $\varphi = \varphi_i \epsilon^i$. Wegen (5.4.1) gilt dann

$$(\varphi, a) = \varphi_i a^i. \quad (5.4.3)$$

Jeder linearen Abbildung $A : V \rightarrow V$ kann eine $n \times n$ Matrix (A^k_l) zugeordnet werden

$$Ae_i = A^j_i e_j. \quad (5.4.4)$$

Die adjungierte Abbildung $A^* : V^* \rightarrow V^*$ ist durch

$$(A^* \varphi, a) \equiv (\varphi, Aa), \quad (5.4.5)$$

wobei $a \in V$ beliebig ist, eindeutig festgelegt. In Komponenten gilt dann offensichtlich

$$(A^* \varphi)_i = A^j_i \varphi_j. \quad (5.4.6)$$

Die Wahl der Basis e_i ist nicht kanonisch. Wir müssen daher verstehen, wie sich die verschiedenen Begriffe, die wir eingeführt haben, verändern, falls wir eine andere Basis betrachten. Sei also eine andere Basis durch $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$ gegeben. Wir können die neuen Basisvektoren durch die alten ausdrücken,

$$\tilde{e}_i = R^j{}_i e_j. \quad (5.4.7)$$

Die Transformation der dualen Basis ist dann durch

$$\tilde{e}^i = (R^{-1})^i{}_j e^j \quad (5.4.8)$$

und diejenige der Komponenten durch

$$\tilde{a}^j = (R^{-1})^j{}_k a^k, \quad \tilde{\varphi}_i = R^l{}_i \varphi_l \quad (5.4.9)$$

gegeben.

Im folgenden ist es weiterhin wichtig, auf dem Vektorraum eine Metrik zu definieren. Eine Metrik G ist eine Abbildung von V auf V^* mit der Eigenschaft, dass

$$(Ga, a) \geq 0. \quad (5.4.10)$$

Weiterhin soll die so definierte quadratische Form symmetrisch sein

$$(Ga, b) = (Gb, a). \quad (5.4.11)$$

Eine Metrik definiert also ein Skalarprodukt auf V (im reellen Fall). In Komponenten schreiben wir $(Ga)_i = g_{ji} a^j$ und daher

$$(Ga, b) = a^j g_{ji} b^i. \quad (5.4.12)$$

Die Bedingung, dass die quadratische Form symmetrisch ist, ist dann einfach

$$g_{ij} = g_{ji}. \quad (5.4.13)$$

Im folgenden werden wir es häufig auch mit indefiniten Metriken zu tun haben; diese erfüllen dieselben Bedingungen wie G , mit Ausnahme von (5.4.10). [Wir verlangen lediglich, dass die so definierte quadratische Form nicht degeneriert ist.] Zum Beispiel ist die Minkowski-Metrik $g_{\mu\nu}$, die wir in (5.2.4) eingeführt haben, eine solche indefinite Metrik. Sie wird im weiteren eine zentrale Rolle spielen.

Nun kommen wir zum Begriff der Tensoren. Wir betrachten das kartesische Produkt

$$V^{\times p} = \underbrace{V \times \dots \times V}_{p \text{ mal}}, \quad (V^*)^{\times q} = \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{q \text{ mal}}. \quad (5.4.14)$$

Ein p -fach kovarianter, q -fach kontravarianter Tensor T ist ein (stetiges) multi-lineares Funktional auf $V^{\times p} \times (V^*)^{\times q}$, d.h. eine Abbildung

$$T : (a^{(1)}, \dots, a^{(p)}, \varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(q)}) \mapsto T(a^{(1)}, \dots, a^{(p)}, \varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(q)}) \in \mathbb{R}, \quad (5.4.15)$$

die in allen $p + q$ Einträgen linear ist. Wir definieren die Komponenten von T durch

$$T_{j_1, \dots, j_p}^{k_1, \dots, k_q} \equiv T(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}, \epsilon^{k_1}, \dots, \epsilon^{k_q}). \quad (5.4.16)$$

Man kann leicht zeigen, dass die Gesamtheit aller p -fach kovarianten, q -fach kontravarianten Tensoren einen Vektorraum der Dimension n^{p+q} bildet (wobei n die Dimension von V ist); diesen bezeichnet man mit

$$\underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_p \otimes \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_q = \otimes_p^q V. \quad (5.4.17)$$

In diesem Tensorproduktraum definiert man eine Basis

$$\{\epsilon^{j_1} \otimes \dots \otimes \epsilon^{j_p} \otimes e_{k_1} \otimes \dots \otimes e_{k_q}\} \quad (5.4.18)$$

durch die Bedingungen

$$[\epsilon^{j_1} \otimes \dots \otimes \epsilon^{j_p} \otimes e_{k_1} \otimes \dots \otimes e_{k_q}](e_{m_1}, \dots, e_{m_p}, \epsilon^{n_1}, \dots, \epsilon^{n_q}) = \delta_{m_1}^{j_1} \dots \delta_{k_q}^{n_q}. \quad (5.4.19)$$

Bezüglich dieser Basis gilt dann

$$T = \sum T_{j_1, \dots, j_p}^{k_1, \dots, k_q} \epsilon^{j_1} \otimes \dots \otimes \epsilon^{j_p} \otimes e_{k_1} \otimes \dots \otimes e_{k_q}. \quad (5.4.20)$$

Für das weitere ist es wichtig im Detail zu verstehen, wie sich Tensoren unter Transformationen der Basis modifizieren. Seien also $A_1, \dots, A_p, B_1, \dots, B_q$ lineare Abbildungen von $V \rightarrow V$. Dann definieren wir eine Abbildung

$$A_1^* \otimes \dots \otimes A_p^* \otimes B_1 \otimes \dots \otimes B_q \quad (5.4.21)$$

des Tensproduktraumes durch

$$\begin{aligned} (A_1^* \otimes \dots \otimes A_p^* \otimes B_1 \otimes \dots \otimes B_q \quad T) & (a^{(1)}, \dots, a^{(p)}, \varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(q)}) \\ & = T(A_1 a^{(1)}, \dots, A_p a^{(p)}, B_1^* \varphi^{(1)}, \dots, B_q^* \varphi^{(q)}). \end{aligned}$$

Dadurch kann jeder linearen Abbildung $A : V \rightarrow V$ eine Abbildung

$$\underbrace{A^* \otimes \dots \otimes A^*}_p \otimes \underbrace{A \otimes \dots \otimes A}_q \quad (5.4.22)$$

zugeordnet werden. Insbesondere entspricht einer durch (5.4.7) und (5.4.8) gegebenen Änderung der Basen in V und V^* eine eindeutig bestimmte Änderung der Basis im Tensorproduktraum. Die Tensorproduktkomponenten transformieren sich dabei wie folgt:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{j_1, \dots, j_p}^{k_1, \dots, k_q} & = T(\tilde{e}_{j_1}, \dots, \tilde{e}_{j_p}, \tilde{\epsilon}^{k_1}, \dots, \tilde{\epsilon}^{k_q}) \\ & = R^{i_1}_{j_1} \dots R^{i_p}_{j_p} (R^{-1})^{k_1}_{l_1} \dots (R^{-1})^{k_q}_{l_q} T(e_{i_1}, \dots, \epsilon^{l_q}) \\ & = R^{i_1}_{j_1} \dots R^{i_p}_{j_p} (R^{-1})^{k_1}_{l_1} \dots (R^{-1})^{k_q}_{l_q} T_{i_1, \dots, i_p}^{l_1, \dots, l_q}. \end{aligned} \quad (5.4.23)$$

Im weiteren werden spezielle Klassen von Tensoren in $(V^*)^{\otimes p}$ eine wichtige Rolle spielen: die *symmetrischen* Tensoren, die dadurch ausgezeichnet sind, dass

$$T(a^{(1)}, \dots, a^{(p)}) = T(a^{(\pi(1))}, \dots, a^{(\pi(p))}), \quad (5.4.24)$$

wobei π eine beliebige Permutation von p Objekten ist. Und die *total anti-symmetrischen* Tensoren, bei denen stattdessen gilt

$$T(a^{(1)}, \dots, a^{(p)}) = \text{sign}(\pi) T(a^{(\pi(1))}, \dots, a^{(\pi(p))}). \quad (5.4.25)$$

Letztere Tensoren bilden einen Unterraum des Tensorproduktraumes, den man mit

$$\Lambda_p V^* = (V^*)^{\wedge p} = \underbrace{V^* \wedge \dots \wedge V^*}_{p \text{ mal}} \quad (5.4.26)$$

bezeichnet. Die Elemente von $\Lambda_p V^*$ nennt man auch *p-Formen*. Man bemerke, dass die Elemente von $\Lambda_n V^*$, wobei n die Dimension von V ist, nur eine unabhängige Komponente besitzen, nämlich die Determinante

$$\varphi^{(1)} \wedge \dots \wedge \varphi^{(n)}. \quad (5.4.27)$$

Weiterhin ist klar, dass $\Lambda_p V^* = 0$ falls $p > n$. Natürlich kann man ‘symmetrische’ und ‘total anti-symmetrischen’ Tensoren auch für die kontravarianten Tensoren definieren.

5.4.1 Operationen auf Tensoren

Auf Tensoren können wir verschiedene natürliche Operationen definieren. Zum einen können wir Tensoren (in offensichtlicher Weise) tensorieren, d.h. es gibt eine Abbildung

$$\left(\otimes_{p_1}^{q_1} V \right) \otimes \left(\otimes_{p_2}^{q_2} V \right) \rightarrow \otimes_{p_1+p_2}^{q_1+q_2} V. \quad (5.4.28)$$

Wir können Tensoren jedoch auch kontrahieren (oder verjüngen): seien $T \in \otimes_p^q V$ und $S \in \otimes_{q_1}^{p_1} V$, wobei $p \geq p_1$ und $q \geq q_1$. Dann definieren wir die Kontraktion von T mit S , $T \cdot S$ durch

$$(T \cdot S)(a^{(1)}, \dots, a^{(p-p_1)}, \varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(q-q_1)}) \equiv (T, S \otimes a^{(1)} \otimes \dots \otimes a^{(p-p_1)} \otimes \varphi^{(1)} \otimes \dots \otimes \varphi^{(q-q_1)}). \quad (5.4.29)$$

In Komponenten

$$(T \cdot S)_{j_1, \dots, j_{p-p_1}}^{k_1, \dots, k_{q-q_1}} = T_{i_1, \dots, i_{p_1}, j_1, \dots, j_{p-p_1}}^{l_1, \dots, l_{q_1}, k_1, \dots, k_{q-q_1}} \cdot S_{l_1, \dots, l_{q_1}}^{i_1, \dots, i_{p_1}}. \quad (5.4.30)$$

Es ist leicht zu sehen, dass $T \cdot S$ ein Tensor in $\otimes_{p-p_1}^{q-q_1} V$ ist. Natürlich kann man T auch nur teilweise mit S kontrahieren, usw.

Indem man $T \otimes S$ betrachtet, kann man die Kontraktion $T \cdot S$ auch als Spur (oder Verjüngung) schreiben; dies ist die Operation

$$\text{Sp}_i^j : \otimes_p^q V \rightarrow \otimes_{p-1}^{q-1} V \quad (5.4.31)$$

die durch

$$\begin{aligned} & (\text{Sp}_i^j T)(a^{(1)}, \dots, a^{(p-1)}, \varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(q-1)}) \\ & \equiv \sum_{\lambda=1}^n T(a^{(1)}, \dots, e_\lambda, \dots, a^{(p-1)}, \varphi^{(1)}, \dots, \epsilon^\lambda, \dots, \varphi^{(q-1)}) \end{aligned} \quad (5.4.32)$$

definiert wird. [Hiert wird e_λ an der i ten, und ϵ^λ an der $(p+j)$ ten Stelle eingesetzt.]

Wir wollen nun annehmen, dass auf V eine Metrik $G : V \rightarrow V^*$ definiert sei. Dann definiert $G^{-1} : V^* \rightarrow V$ eine Metrik auf V^* . Wir definieren nun eine von G abhängige Abbildung

$$g_i : \otimes_p^q V \rightarrow \otimes_{p+1}^{q-1} V \quad (5.4.33)$$

durch

$$\begin{aligned} (g_i \ T) \ (a^{(1)}, \dots, a^{(p+1)}, \varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(q-1)}) \\ \equiv T(a^{(1)}, \dots, a^{(p)}, \varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(i-1)}, G a^{(p+1)}, \varphi^{(i)}, \dots, \varphi^{(q-1)}) . \end{aligned} \quad (5.4.34)$$

In Komponenten ist das

$$(g_i T)_{j_1, \dots, j_{p+1}}^{k_1, \dots, k_{q-1}} = g_{j_{p+1} l} T_{j_1, \dots, j_p}^{k_1, \dots, k_{i-1}, l, k_i, \dots, k_{q-1}} . \quad (5.4.35)$$

Wir bezeichnen die Matrixelemente von G^{-1} durch g^{ij} , d.h.

$$g_{ij} g^{jl} = g^{lj} g_{ji} = \delta_i^l . \quad (5.4.36)$$

Mit Hilfe von G^{-1} kann man Tensorindizes heben; dazu definieren wir

$$g^i : \otimes_p^q V \rightarrow \otimes_{p-1}^{q+1} V \quad (5.4.37)$$

durch

$$\begin{aligned} (g^i \ T) \ (a^{(1)}, \dots, a^{(p-1)}, \varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(q+1)}) \\ \equiv T(a^{(1)}, \dots, a^{(i-1)}, G^{-1} \varphi^{(1)}, a^{(i)}, \dots, a^{(p-1)}, \varphi^{(2)}, \dots, \varphi^{(q+1)}) \end{aligned} \quad (5.4.38)$$

In Komponenten ist das

$$(g^i T)_{j_1, \dots, j_{p-1}}^{k_1, \dots, k_{q+1}} = g^{k_1 l} T_{j_1, \dots, j_{i-1}, l, j_i, \dots, j_{p-1}}^{k_2, \dots, k_{q+1}} . \quad (5.4.39)$$

Schliesslich wollen wir noch die sogenannte Hodge-Dualität erklären. Diese bildet einen p -fach kovarianten total anti-symmetrischen Tensor in einen $(n-p)$ -fachen kovarianten total anti-symmetrischen Tensor ab

$$* : \Lambda_p V^* \rightarrow \Lambda_{n-p} V^* . \quad (5.4.40)$$

Eine derartige Abbildung kann nur definiert werden, wenn auf V eine Metrik vorgegeben ist. Es bezeichne G eine (möglicherweise indefinite) Metrik of V mit Komponenten

g_{ij} . Wir schreiben $g = \det(g_{ij})$. Nun definieren wir einen n -fach kovarianten, total antisymmetrischen Tensor E durch

$$\begin{aligned} E(a^{(1)}, \dots, a^{(n)}) &= |g|^{1/2} \det(a^{(1)}, \dots, a^{(n)}) \\ &= |g|^{1/2} \sum_{\pi \in S_n} (\text{sign } \pi) \prod_{l=1}^n a_{\pi(l)}^{(l)}. \end{aligned}$$

Man zeigt leicht (siehe Übungsaufgabe), dass E ein Pseudo-Tensor ist, d.h. dass gilt

$$\begin{aligned} E(a^{(1)}, \dots, a^{(n)}) &= |g|^{1/2} \det(a^{(1)}, \dots, a^{(n)}) \\ &= |\det(R)|^{-1} |\tilde{g}|^{1/2} \det(R) \det(\tilde{a}^{(1)}, \dots, \tilde{a}^{(n)}) \\ &= \tilde{E}(\tilde{a}^{(1)}, \dots, \tilde{a}^{(n)}) \end{aligned} \quad (5.4.41)$$

falls $\det(R)$ positiv ist, d.h. falls R orientierungstreu ist.

Es sei nun T ein p -fach kovarianter antisymmetrischer Tensor. Durch Hochziehen aller seiner Tensorindizes können wir daraus einen p -fach kontravarianten antisymmetrischen Tensor $g^1 \cdots g^p T$ bilden. Anschliessend können wir E mit diesem kontravarianten Tensor kontrahieren. Den resultierenden $(n-p)$ -fach kovarianten Tensor nennen wir den zu T dualen Tensor und bezeichnen ihn mit $*T$. Also

$$*T \equiv \frac{1}{p!} E \cdot g^1 \cdots g^p T, \quad (5.4.42)$$

oder in Komponenten

$$(*T)_{j_1, \dots, j_{n-p}} = \frac{1}{p!} |g|^{1/2} \epsilon_{j_1, \dots, j_{n-p}, k_1, \dots, k_p} g^{k_1 l_1} \cdots g^{k_p l_p} T_{l_1, \dots, l_p}. \quad (5.4.43)$$

5.4.2 Tensorfelder

Für die Beschreibung der Elektrodynamik benötigen wir Tensorfelder. Tensorfelder spielen in der Differentialgeometrie eine zentrale Rolle. Ohne sie wäre eine mathematisch und physikalisch korrekte Formulierung der allgemeinen Relativitätstheorie undenkbar gewesen.

Der natürliche Kontext, in dem Tensorfelder diskutiert werden sollten, ist die Theorie der Faserbündel auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Im folgenden werden wir uns jedoch auf den einfachen Fall beschränken, in dem die zu Grunde liegende Mannigfaltigkeit der \mathbb{R}^n ist. Sei V ein Vektorraum über \mathbb{R} (oder \mathbb{C}). Ein Tensorfeld ist dann eine Funktion T , die zu jedem Punkt in \mathbb{R}^n (oder zumindest in einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$) ein Element

$$T(x) \in \otimes_p^q V_x, \quad V_x \cong V, x \in \Omega \quad (5.4.44)$$

zuordnet. Im Allgemeinen gibt es dabei keinen direkten Zusammenhang zwischen dem 'physikalischen Raum' \mathbb{R}^n , und dem Vektorraum V . [Zum Beispiel kann die Dimension von V unabhängig von \mathbb{R}^n gewählt werden.]

Im folgenden werden wir einen Spezialfall eines solchen Tensorfeldes betrachten, bei dem V_x gerade der Tangentialraum zu dem physikalischen Raum am Punkt x ist. In diesem Fall ist insbesondere $V \cong \mathbb{R}^n$. Unter einer Koordinatentransformation

$$\tilde{x}^j = \phi^j(x), \quad x \in \Omega \quad (5.4.45)$$

transformiert sich dann die Basis in V_x ,

$$e_1 = \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, e_n = \partial_n = \frac{\partial}{\partial x^n} \quad (5.4.46)$$

gerade wie

$$e_j \mapsto \tilde{e}_j, \quad \text{wobei} \quad \tilde{e}_j = \tilde{\partial}_j = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}. \quad (5.4.47)$$

Mit Hilfe der Kettenregel gilt dann also

$$\partial_i = \frac{\partial \phi^j}{\partial x^i}(x) \tilde{\partial}_j. \quad (5.4.48)$$

Die Komponenten eines Vektors $a \in V_x$ transformieren sich also gemäss der Gleichung

$$\begin{aligned} \tilde{a}^j(\tilde{x}) &= \frac{\partial \phi^j}{\partial x^i}(x) a^i(x) \\ &= \frac{\partial \phi^j}{\partial x^i}(\phi^{-1}(\tilde{x})) a^i(\phi^{-1}(\tilde{x})). \end{aligned} \quad (5.4.49)$$

Im folgenden bezeichnen wir mit $D\phi_x$ die Transformation von V_x^* auf $V_{\tilde{x}}^*$, die durch die Matrix mit Matrixelementen $\frac{\partial \phi^j}{\partial x^i}(x)$ gegeben ist. Für die Komponenten einer Linearform $\varphi \in V_x^*$ gilt dann

$$\tilde{\varphi}_j(\tilde{x}) = \left(D\phi_x^{-1} \right)^i_j \varphi_i(x). \quad (5.4.50)$$

Nun können wir den Begriff des Tensorfeldes erklären: ein p -fach kovariantes, q -fach kontravariantes Tensorfeld T über $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung

$$T : \Omega \rightarrow \otimes_p^q V_{(\cdot)}, \quad \Omega \ni x \mapsto T(x) \in \otimes_p^q V_x, \quad (5.4.51)$$

wobei $V_x \cong \mathbb{R}^n$ der Tangentialraum am Punkt x ist. Unter einer Koordinatentransformation gilt

$$\tilde{T}(\tilde{x}) = \left(D\phi_x^{-1} \right)^{\otimes p} \left(D\phi_x \right)^{\otimes q} T(x), \quad (5.4.52)$$

oder in Komponenten

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{j_1, \dots, j_p}^{k_1, \dots, k_q} &= \left(D\phi_{\phi^{-1}(\tilde{x})}^{-1} \right)^{i_1}_{j_1} \cdots \left(D\phi_{\phi^{-1}(\tilde{x})}^{-1} \right)^{i_p}_{j_p} \\ &\quad \left(D\phi_{\phi^{-1}(\tilde{x})} \right)^{k_1}_{l_1} \cdots \left(D\phi_{\phi^{-1}(\tilde{x})} \right)^{k_q}_{l_q} T_{i_1, \dots, i_p}^{l_1, \dots, l_q}(\phi^{-1}(\tilde{x})). \end{aligned} \quad (5.4.53)$$

Auf Tensorfelder können wir algebraische Operationen definieren, die punktweise wie oben für Tensoren definiert sind. Für die Differentialgeometrie (und die Anwendung

auf die Elektrodynamik) wichtig sind jedoch die Differentialoperatoren, insbesondere die äussere Ableitung (für den Fall von p -Formen). Wie zuvor bezeichnen wir mit $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ die partielle Ableitung nach der i ten Koordinate. Der Raum der p -Formen auf Ω (d.h. der Raum p -fach kovarianten antisymmetrischen Tensorfelder) bezeichnen wir mit $\Lambda_p(\Omega)$. Die äussere Ableitung wird mit d bezeichnet und ist eine Abbildung

$$d : \Lambda_p(\Omega) \rightarrow \Lambda_{p+1}(\Omega). \quad (5.4.54)$$

In Komponenten ist sie durch

$$(dT)_{j_1, \dots, j_{p+1}}(x) = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_{p+1}} (\text{sign } \pi) \partial_{j_{\pi(1)}} T_{j_{\pi(2)}, \dots, j_{\pi(p+1)}}(x) \quad (5.4.55)$$

definiert. Unter einer Koordinatentransformation $\phi : x \mapsto \tilde{x} = \phi(x)$ gilt

$$\widetilde{(dT)}(\tilde{x}) = (d\tilde{T})(\tilde{x}). \quad (5.4.56)$$

Weiterhin gilt

$$d(dT) = 0 \quad \text{für alle } T \in \Lambda_p(\Omega), p = 0, 1, \dots, n. \quad (5.4.57)$$

p -Formen, die von d vernichtet werden (d.h. $dT = 0$ erfüllen) heissen *geschlossen*; falls $T = dS$ mit $S \in \Lambda_{p-1}(\Omega)$, dann heisst T *exakt*. Jede exakte p -form ist automatisch geschlossen. Für sternförmige Gebiete Ω (z.B. $\Omega = \mathbb{R}^n$) gilt auch die Umkehrung: wenn T geschlossen ist, ist T exakt, d.h. es gibt ein S , so dass $T = dS$. Dabei ist S bis auf eine exakte $(p-1)$ -Form bestimmt, d.h. bis auf $d\chi$, wobei $\chi \in \Lambda_{p-2}(\Omega)$. Die Tatsache, dass aus $dT = 0$ nicht immer folgt, dass $T = dS$ ist, ist in der Untersuchung der Topologie von Ω ein überaus wichtiges Hilfsmittel (Kohomologie).

Schliesslich benötigen wir noch eine Operation δ , die p -Formen auf $(p-1)$ -Formen abbildet; diese kann mit Hilfe der Hodgedualität $*$ wie folgt definiert werden:

$$\delta T = (-1)^{np} * d * T \quad (5.4.58)$$

wobei $T \in \Lambda_p(\Omega)$ und $n = \dim(\Omega)$. Da $*$ eine p -form in eine $(n-p)$ -Form abbildet und d den Rang von p -Formen um eins erhöht, gilt

$$\delta : \Lambda_p(\Omega) \rightarrow \Lambda_{p-1}(\Omega). \quad (5.4.59)$$

Wie für d beweist man leicht, dass unter Koordinatentransformationen

$$\widetilde{(\delta T)} = \delta \tilde{T}. \quad (5.4.60)$$

Ausserdem folgt aus (5.4.57) sofort, dass

$$\delta(\delta T) = 0 \quad \text{für alle } T \in \Lambda_p(\Omega), p = 0, 1, \dots, n. \quad (5.4.61)$$

In Komponenten kann man δ durch (siehe Übungsaufgabe)

$$(\delta T)_{j_1, \dots, j_{p-1}} = -|g|^{-1/2} g_{j_1 r_1} \cdots g_{j_{p-1} r_{p-1}} \frac{\partial}{\partial x^{r_p}} \left(|g|^{1/2} T^{r, r_1, \dots, r_{p-1}} \right) \quad (5.4.62)$$

schreiben, wobei

$$T^{i_1, \dots, i_p} = g^{i_1 k_1} \dots g^{i_p k_p} T_{k_1, \dots, k_p}. \quad (5.4.63)$$

[Hier bezeichnet g^{ij} die Komponenten von G^{-1} .] Schliesslich kann man den Laplace Operator durch

$$\Delta = -d\delta - \delta d \quad (5.4.64)$$

ausdrücken; diese Schreibweise für Δ ist unabhängig vom Koordinatensystem gültig. [Im allgemeinen ist der Laplace(-Beltrami) Operator durch

$$\Delta f = |g|^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(|g|^{1/2} g^{ji} \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) \quad (5.4.65)$$

definiert. Falls die Metrik g konstant (unabhängig von x) ist, dann reduziert sich diese Formel auf die vertraute Formel für den Laplace Operator.]

5.5 Invarianz der Maxwell Gleichungen unter Lorentztransformationen

Nachdem wir nun die Struktur der Lorentztransformationen sowie die notwendige Mathematik besprochen haben, wollen wir nun zeigen, dass die Maxwell Gleichungen tatsächlich unter diesen Transformationen forminvariant sind. Dazu müssen wir insbesondere verstehen, wie sich die elektrischen und magnetischen Felder unter Koordinatentransformationen verhalten. Poincaré hat erkannt, dass die Transformationseigenschaften sich leicht verstehen lassen, wenn man \mathbf{E} und \mathbf{B} als Komponenten des elektromagnetischen Feldstärketensors auffasst:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.5.1)$$

Das Transformationsverhalten ist nun dadurch festgelegt, dass $F_{\mu\nu}$ die Komponenten eines zwei-fach kovarianten anti-symmetrischen Tensorfeldes über dem Minkowski-Raum ist. Konkret, sei

$$\tilde{x}^\mu = \phi^\mu(x) = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (5.5.2)$$

eine Koordinatentransformation, die die Minkowski-Metrik invariant lässt. Dann ist $D\phi_x$ gerade die Matrix $\Lambda^\mu{}_\nu$, und der Feldstärketensor ist in den Koordinaten \tilde{x} [vgl. (5.4.53)]

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu (\Lambda^{-1})^\sigma{}_\nu F_{\rho\sigma}. \quad (5.5.3)$$

Um das Auftreten von Λ^{-1} zu vermeiden, können wir auch den zwei-fach kontravarianten Feldstärketensor betrachten, dessen Komponenten durch die Metrik gehoben worden sind:

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} F_{\rho\sigma}. \quad (5.5.4)$$

Explizit ist $F^{\mu\nu}$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.5.5)$$

Die Komponenten dieses Tensors transformieren sich dann wie

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}. \quad (5.5.6)$$

Zum Beispiel transformieren sich die elektrischen und magnetischen Felder unter der Koordinatentransformation — wir schreiben $\beta = \frac{v}{c}$ und $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$

$$\begin{aligned} \tilde{x}^0 &= \gamma x^0 - \beta\gamma x^1 & \tilde{x}^2 &= x^2 \\ \tilde{x}^1 &= -\beta\gamma x^0 + \gamma x^1 & \tilde{x}^3 &= x^3 \end{aligned} \quad (5.5.7)$$

wie

$$\begin{aligned} \tilde{E}_1 &= E_1, & \tilde{E}_2 &= \frac{E_2 - B_3 v/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, & \tilde{E}_3 &= \frac{E_3 + B_2 v/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ \tilde{B}_1 &= B_1, & \tilde{B}_2 &= \frac{B_2 + E_3 v/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, & \tilde{B}_3 &= \frac{B_3 - E_2 v/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned} \quad (5.5.8)$$

Um dies einzusehen bemerken wir, dass sich die $F^{\mu\nu}$ wie die Produkte $x^\mu y^\nu$ von Vektorkomponenten transformieren. Also erhält man zum Beispiel für $E_1 = F^{10}$

$$\tilde{x}^1 \tilde{y}^0 = (-\beta\gamma x^0 + \gamma x^1)(\gamma y^0 - \beta\gamma y^1) \quad (5.5.9)$$

und daher

$$\begin{aligned} \tilde{E}_1 &= \tilde{F}^{10} = -\beta\gamma^2 F^{00} + \beta^2\gamma^2 F^{01} + \gamma^2 F^{10} - \beta\gamma^2 F^{11} \\ &= \gamma^2(1 - \beta^2)F^{10} = F^{10} = E_1, \end{aligned} \quad (5.5.10)$$

oder für $B_3 = F^{21}$

$$\tilde{x}^2 \tilde{y}^1 = x^2(\gamma y^1 - \beta\gamma y^0), \quad (5.5.11)$$

und daher

$$\tilde{B}_3 = \tilde{F}^{21} = \gamma F^{21} - \beta\gamma F^{20} = \gamma(B_3 - \beta E_2). \quad (5.5.12)$$

Die anderen Terme können entsprechend bestimmt werden. Man erkennt daher, dass sich unter diesen Transformationen elektrische und magnetische Felder ineinander transformieren. Die Aufspaltung in elektrische und magnetische Felder hängt deshalb vom Bezugssystem ab.

Die Maxwell-Gleichungen haben nun in dieser Sprache eine einfache Form. Die homogenen Gleichungen sind einfach

$$dF = 0, \quad (5.5.13)$$

d.h. in Komponenten

$$(dF)_{\mu\nu\sigma} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\sigma} F_{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial x^\nu} F_{\sigma\mu} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} F_{\nu\sigma} = 0. \quad (5.5.14)$$

Zum Beispiel ist

$$(dF)_{012} = +\frac{\partial}{\partial x^2} E_1 - \frac{\partial}{\partial x^0} B_3 - \frac{\partial}{\partial x^1} E_2 = -(\text{rot } \mathbf{E})_3 - \frac{1}{c} \frac{\partial B_3}{\partial t} = 0. \quad (5.5.15)$$

Die Gleichungen $(dF)_{013} = 0$ und $(dF)_{023} = 0$ geben dann gerade die anderen beiden Komponenten der homogenen Maxwell Gleichung $\text{rot } \mathbf{E} + 1/c \partial_t \mathbf{B} = 0$. Andererseits ist

$$(dF)_{123} = -\frac{\partial}{\partial x^3} B_3 - \frac{\partial}{\partial x^2} B_2 - \frac{\partial}{\partial x^1} B_1 = \text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (5.5.16)$$

Wir beobachten, dass der Tensor dritter Ordnung $(dF)_{\mu\nu\sigma}$ nach Konstruktion zyklische Symmetrie besitzt, d.h.

$$(dF)_{\mu\nu\sigma} = (dF)_{\nu\sigma\mu}. \quad (5.5.17)$$

Weiterhin ist er in den drei Indizes total antisymmetrisch, d.h.

$$(dF)_{\nu\mu\sigma} = \partial_\sigma F_{\nu\mu} + \partial_\mu F_{\sigma\nu} + \partial_\nu F_{\mu\sigma} = -\partial_\sigma F_{\mu\nu} - \partial_\nu F_{\sigma\mu} - \partial_\mu F_{\nu\sigma} = -(dF)_{\mu\nu\sigma}. \quad (5.5.18)$$

[Hier ist $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$.] Insbesondere gibt es daher nur vier unabhängige Komponenten dieses Tensors, und sie beschreiben gerade die obigen vier Gleichungen.

Die Formulierung der homogenen Maxwell Gleichungen verlangt keine Metrik. Um die inhomogenen Maxwell Gleichungen zu beschreiben, benötigen wir jedoch eine Metrik, die in unserem Fall gerade die Minkowski-Metrik ist. Wir behaupten nun, dass die inhomogenen Gleichungen gerade durch

$$\delta F = -\frac{4\pi k}{c} j \quad (5.5.19)$$

gegeben sind, wobei j^ν der 4-er Strom ist, der durch

$$j^\nu = (c\rho, \mathbf{j}), \quad j_\nu = (c\rho, -\mathbf{j}) \quad (5.5.20)$$

definiert ist. [Die Metrik taucht hier in der Definition von δ auf!] Unter Benützung von (5.4.62) ist nämlich die linke Seite von (5.5.19) gerade

$$(\delta F)_\nu = -g_{\nu\rho} \partial_\mu F^{\mu\rho}, \quad (5.5.21)$$

und daher kann (5.5.19) einfach als

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} F^{\mu\nu} = \frac{4\pi k}{c} j^\nu \quad (5.5.22)$$

geschrieben werden. Zum Beispiel ist die Null-Komponente der Gleichung (5.5.22) gerade

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{4\pi k}{c} c\rho = 4\pi k\rho, \quad (5.5.23)$$

während die *ite* Komponente gerade

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} E_i + (\text{rot } \mathbf{B})_i = \frac{4\pi k}{c} j^i \quad (5.5.24)$$

ist. Diese Gleichungen sind daher gerade die inhomogenen Maxwell-Gleichungen.

Die Form von (5.5.21) impliziert auch, dass j^ν gerade ein einfach kontravariantes Tensorfeld ist; dieses transformiert sich daher unter der Koordinatentransformation (5.5.2) wie

$$\tilde{j}^\nu = \Lambda^\nu{}_\rho j^\rho. \quad (5.5.25)$$

Es ist instruktiv, die explizite Struktur dieser Transformationen für die obige Lorentz-Transformation (5.5.7) zu betrachten. (Unter Rotationen verhalten sich die elektrischen und magnetischen Felder sowie der 4-er Strom in der offensichtlichen Weise.) Unter dieser Lorentztransformation transformieren sich die Komponenten des 4-er Stroms wie

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= \frac{\rho}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{j_1 v}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, & \tilde{j}^2 &= j^2, \\ \tilde{j}^1 &= \frac{j^1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - v \rho \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, & \tilde{j}^3 &= j^3. \end{aligned} \quad (5.5.26)$$

Aus der inhomogenen Maxwell Gleichung folgt unter Benützung von $\delta^2 = 0$ nun sofort, dass

$$\delta \delta F = -\frac{4\pi k}{c} \delta j = 0, \quad (5.5.27)$$

d.h. die Gleichung $\delta j = 0$. In Koordinaten ist das gerade die Gleichung

$$-\delta j = \partial_\nu j^\nu = 0. \quad (5.5.28)$$

Dies ist natürlich gerade die *Kontinuitätsgleichung*.

Aus unseren allgemeinen Überlegungen folgt nun sofort, dass die Maxwell Gleichungen tatsächlich unter Koordinatentransformationen, die die Minkowski-Metrik invariant lassen (also den Lorentz-Transformationen) Form-invariant sind. [Unter allgemeineren Koordinatentransformationen sind die Gleichungen auch ‘Form-invariant’, wenn man berücksichtigt, dass im allgemeinen auch die Metrik (die ja in der Formulierung der inhomogenen Maxwell-Gleichungen eingeht) transformiert werden muss.]

Man kann die Form-Invarianz unter Lorentz-Transformationen natürlich auch leicht explizit nachprüfen. Zum Beispiel wird (5.5.22)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\mu} \tilde{F}^{\mu\nu} &= \frac{\partial x^\pi}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\pi} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma} \\ &= (\Lambda^{-1})^\pi{}_\mu \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \frac{\partial}{\partial x^\pi} F^{\rho\sigma} \\ &= \Lambda^\nu{}_\sigma \frac{\partial}{\partial x^\rho} F^{\rho\sigma} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Lambda^\nu{}_\sigma \frac{4\pi k}{c} j^\sigma \\
&= \frac{4\pi k}{c} \tilde{j}^\nu,
\end{aligned} \tag{5.5.29}$$

wobei wir benutzt haben, dass

$$x^\sigma = (\Lambda^{-1})^\sigma{}_\tau \tilde{x}^\tau, \quad \text{mit} \quad (\Lambda^{-1})^\pi{}_\tau \Lambda^\tau{}_\sigma = \delta^\pi{}_\sigma. \tag{5.5.30}$$

5.5.1 Elektro-magnetische Dualität

Man kann auch die homogenen und inhomogenen Maxwell Gleichungen in symmetrischer Weise schreiben. Dazu beobachten wir, dass wir (5.5.19) als

$$*d * F = -\frac{4\pi k}{c} j \quad \Longrightarrow \quad d * F = \frac{4\pi k}{c} * j \tag{5.5.31}$$

schreiben können. [In vier Dimensionen ($n = 4$) gilt $\delta F = *d * F$.] Wir definieren den *dualen Feldtensor* $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ durch

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(*F)_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}, \tag{5.5.32}$$

wobei $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ der total antisymmetrische Tensor in vier Dimensionen ist. Explizit ist der duale Feldtensor durch die Matrix

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & -E_3 & E_2 \\ B_2 & E_3 & 0 & -E_1 \\ B_3 & -E_2 & E_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.5.33}$$

gegeben. Man beachte, dass der duale Feldtensor aus dem Feldtensor $F_{\mu\nu}$ durch die Ersetzung

$$\mathbf{E} \mapsto -\mathbf{B}, \quad \mathbf{B} \mapsto \mathbf{E} \tag{5.5.34}$$

hervorgeht, die elektrische und magnetische Größen miteinander vertauscht. Im leeren Raum ist dies eine Symmetrie der Maxwell Gleichungen.

Wir können nun die Maxwell Gleichungen symmetrisch schreiben:

$$\begin{aligned}
d\mathcal{F} &= \frac{2\pi k}{c} * j_{\text{el}} \\
dF &= \frac{2\pi k}{c} * j_{\text{mag}} = 0.
\end{aligned} \tag{5.5.35}$$

Die homogenen Maxwell-Gleichungen drücken dann einfach aus, dass es keine magnetischen Ladungen (und Ströme) gibt.

Die obige Symmetrie (5.5.34) ist der ‘Vorbote’ der sogenannten S-Dualität, die für supersymmetrische Yang-Mills Theorien vor kurzem verstanden wurde (Seiberg-Witten). In diesen Theorien gibt es tatsächlich magnetische Ladungen, und von daher verschwindet die rechte Seite von (5.5.35) nicht einfach. In der Natur gibt es bisher jedoch keine Evidenz für die Existenz magnetischer Monopole. Es gibt jedoch theoretische Gründe, warum man gerne glauben würde, dass magnetische Monopole tatsächlich existieren; insbesondere würden sie die Quantisierung der elektrischen Ladung erklären (Dirac).

5.5.2 Potential, Eichinvarianz und Kontinuitätsgleichung

Natürlich können wir auch die verschiedenen strukturellen Resultate, die wir zuvor besprochen haben, in dieser neuen Tensorschreibweise verstehen. Falls die Raum-Zeit der Minkowski-Raum ist, so können wir die homogenen Maxwell Gleichungen durch Einführen eines Vektorpotentials integrieren. Hier benützen wir das oben erwähnte Resultat, dass jede geschlossene Form F (d.h. jede Form, für die $dF = 0$ gilt), exakt ist, d.h. dass es ein A gibt, so dass $F = dA$. A ist dabei ein kovariantes Vektorfeld. In Komponenten ist die Gleichung $F = dA$ einfach

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (5.5.36)$$

Das Feld A kann mit den zuvor eingeführten Potentialen identifiziert werden, wobei

$$A_\mu = (\Phi, -\mathbf{A}). \quad (5.5.37)$$

Zum Beispiel ist dann

$$F_{0i} = -\frac{1}{c}\partial_t A_i - \partial_i \Phi = E_i, \quad (5.5.38)$$

und

$$F_{ij} = -\partial_i A_j + \partial_j A_i = -\epsilon_{ijk}(\text{rot } A)_k. \quad (5.5.39)$$

Da A_μ ein kovariantes Vektorfeld ist, transformiert es sich wie

$$\tilde{A}_\mu = \left(\Lambda^{-1}\right)^\nu{}_\mu A_\nu. \quad (5.5.40)$$

Die Gleichung $F = dA$ legt A nur bis auf eine exakte 1-Form fest. Dies bedeutet, dass wir A auch durch

$$A \mapsto A' = A + d\chi \quad (5.5.41)$$

ersetzen können, ohne $F = dA = dA'$ zu modifizieren. Hier ist χ eine beliebige Funktion auf dem Minkowskiraum. In Komponenten ist diese Ambiguität

$$A_\nu \mapsto A'_\nu = A_\nu + \partial_\nu \chi, \quad (5.5.42)$$

was wir gerade als die schon zuvor besprochene *Eichtransformation* erkennen. [Dies ist wegen der Definition (5.5.37) offensichtlich; diese Eichtransformation stimmt dann genau mit (3.6.23) überein.]

Die *Lorentz Eichung* ist in der 4-er Schreibweise einfach

$$\partial_\nu A^\nu = 0. \quad (5.5.43)$$

Diese Bedingung ist daher Lorentz invariant. Sie lässt sich in der Sprache der Formen als

$$\delta A = 0 \quad (5.5.44)$$

schreiben. Falls A die Lorentz Eichbedingung erfüllt, dann gilt für A'

$$\begin{aligned} \delta A' &= \delta A + \delta d\chi \\ &= -\square\chi, \end{aligned} \quad (5.5.45)$$

da $\delta\chi = 0$ (δ verschwindet automatisch auf Funktionen!). Hier haben wir benützt, dass der Laplace-Beltrami Operator auf dem Minkowski-Raum gerade mit dem Wellenoperator übereinstimmt (siehe (5.4.65)). Die Lorentz Eichung legt daher die Eichfreiheit bis auf eine Lösung der Wellengleichung fest.

In der Lorentz Eichung sind die inhomogenen Maxwell Gleichungen gerade durch

$$\square A^\nu = \frac{4\pi k}{c} j^\nu \quad (5.5.46)$$

gegeben (vgl. (3.6.28)). Diese Gleichung folgt einfach aus (5.5.22) da

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \square A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = \frac{4\pi k}{c} j^\nu. \quad (5.5.47)$$

Schliesslich können wir das retardierte Potential kompakt als

$$A^\nu(x) = \frac{4\pi k}{c} \int d^4y D_{ret}(x-y) j^\nu(y) \quad (5.5.48)$$

schreiben.

Wie diese Beispiele illustrieren, lassen sich alle Identitäten der Elektrodynamik natürlicherweise in dieser 4-er Schreibweise zusammenfassen. Dieser Umstand ist lediglich eine Folge davon, dass die Elektrodynamik Lorentz-invariant ist. Die Lorentz-Invarianz der Gleichungen ist manifest in dieser Schreibweise.

5.6 Lagrange Formulierung

Das geladene Teilchen im elektromagnetischen Feld ist ein Lagrange'sches System: die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}} = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \right), \quad (5.6.49)$$

sind die Euler-Lagrange Gleichungen zur Lagrange Funktion

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = -mc^2 \sqrt{1-\frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} - e \left(\Phi - \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{A} \right). \quad (5.6.50)$$

Hierbei sind $\Phi(\mathbf{x}, t)$ und $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ die vorgegebenen Potentiale der Felder. Der kanonische Impuls des Teilchens ist

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{mv_i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{e}{c} A_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.6.51)$$

Die Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x_i} \quad (5.6.52)$$

lauten deshalb

$$\frac{d}{dt} \frac{mv_i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial A_i}{\partial x_k} v_k \right) = -e \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{e}{c} \frac{\partial A_k}{\partial x_i} v_k, \quad (5.6.53)$$

was mit (5.6.49) übereinstimmt. [Wir erinnern uns dabei daran, dass

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}.$$

Ausserdem haben wir benutzt, dass

$$(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B})_i = (\mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}))_i = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} v_k - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} v_k.] \quad (5.6.54)$$

Für $v \ll c$ geht diese Lagrange Funktion in die nicht-relativistische Lagrange Funktion über (da dann $-mc^2 \sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2} = -mc^2 + m\mathbf{v}^2/2 + \dots$ — die Konstante mc^2 ist für die Berechnung der Euler-Lagrange Gleichungen natürlich irrelevant). L selber ist nicht Lorentz invariant, jedoch

$$L dt = \frac{L}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} d\tau = (-mc^2 - \frac{e}{c} u^\mu A_\mu) d\tau, \quad (5.6.55)$$

wobei τ die Eigenzeit beschreibt und

$$u^\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} (c, \mathbf{v}) \quad (5.6.56)$$

die 4-er Geschwindigkeit ist. Das Hamilton'sche Variationsprinzip für die Weltlinie eines Teilchens hat somit die invariante Form

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} \left(mc^2 + \frac{e}{c} u^\mu A_\mu \right) d\tau = 0, \quad (5.6.57)$$

wobei die Endpunkte festgehalten werden. L ist auch nicht eichinvariant: unter einer Eichtransformation $A_\nu \mapsto A_\nu - \partial_\nu \Lambda$ ändert sich L um ein totales Differential

$$L \mapsto L + \frac{e}{c} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \Lambda \right) = L + \frac{e}{c} \frac{d\Lambda}{dt}. \quad (5.6.58)$$

Insbesondere bleiben daher die Bewegungsgleichungen (d.h. die zugehörigen Euler-Lagrange Gleichungen) unverändert.

6 Erhaltungssätze

In diesem Kapitel wollen wir verschiedene Erhaltungsgrößen diskutieren.

6.1 Ladung

Wir nehmen an, dass die Stromdichte $j^\mu(x)$ in raumartigen Richtungen (ausserhalb des Lichtkegels) hinreichend stark abfällt. Dann ist in jedem Inertialsystem die *Gesamtladung*

$$Q = \frac{1}{c} \int_{x^0=0} d^3\mathbf{x} j^0(x) = \frac{1}{c} \int d^4x j^\mu(x) \partial_\mu \theta(x^0) \quad (6.1.1)$$

endlich. Dabei ist $\theta(s)$ die Stufenfunktion,

$$\theta(s) = \begin{cases} \theta(s) = 1 & s \geq 0 \\ \theta(s) = 0 & s < 0, \end{cases} \quad (6.1.2)$$

und wir haben benutzt, dass $\theta'(s) = \delta(s)$. Wir wollen nun zeigen, dass diese Definition der Gesamtladung nicht von dem gewählten Inertialsystem abhängt, d.h. dass sie unter den Poincarétransformationen

$$x \mapsto \hat{x} = \Lambda x + a \quad (6.1.3)$$

invariant ist, wobei Λ eine eigentliche orthochrone Lorentztransformation beschreibt. In dem Koordinatensystem \hat{S} gilt

$$\hat{Q} = \frac{1}{c} \int d^4\hat{x} \hat{j}^\mu(\hat{x}) \hat{\partial}_\mu \theta(\hat{x}^0) = \frac{1}{c} \int d^4x j^\mu(x) \partial_\mu \theta(\hat{x}^0). \quad (6.1.4)$$

Wir definieren $F(x) = \theta(x^0) - \theta(\hat{x}^0)$. Dann ist die Differenz

$$Q - \hat{Q} = \frac{1}{c} \int d^4x j^\mu(x) \partial_\mu F(x). \quad (6.1.5)$$

Da $j^\mu(x) F(x)$ in allen Richtungen verschwindet, können wir das Divergenztheorem anwenden und erhalten

$$Q - \hat{Q} = -\frac{1}{c} \int d^4x j^\mu{}_{,\mu}(x) F(x) = 0, \quad (6.1.6)$$

wobei wir die Kontinuitätsgleichung $j^\mu{}_{,\mu} = 0$ angewendet haben. Die Gesamtladung ist daher ein Skalar. Insbesondere ist sie unter Zeitverschiebungen invariant.

6.2 Energie und Impuls

Der Energie-Impulstensor ist definiert durch

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi k} \left[F^\mu{}_\sigma F^{\sigma\nu} - \frac{1}{4} F_{\rho\sigma} F^{\sigma\rho} g^{\mu\nu} \right]. \quad (6.2.1)$$

Er ist homogen vom Grad 2 in den Feldstärken, symmetrisch und spurlos. [Letztere Eigenschaft ist einfach eine Folge davon, dass $SP(T) = T^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 0$.] Aus den Maxwell Gleichungen folgt der *Energie-Impulssatz*

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = -\frac{1}{c} F^{\mu\nu} j_\nu = -f^\mu. \quad (6.2.2)$$

Um dies zu beweisen berechnen wir

$$(F_{\mu\sigma} F^{\sigma\nu})_{,\nu} = F_{\mu\sigma,\nu} F^{\sigma\nu} + F_{\mu\sigma} F^{\sigma\nu}{}_{,\nu}. \quad (6.2.3)$$

Der erste Term ist

$$\begin{aligned} F_{\mu\sigma,\nu} F^{\sigma\nu} &= -(F_{\sigma\nu,\mu} + F_{\nu\mu,\sigma}) F^{\sigma\nu} \\ &= F_{\nu\sigma,\mu} F^{\sigma\nu} - F_{\mu\nu,\sigma} F^{\nu\sigma} \\ &= \frac{1}{2} (F_{\nu\sigma} F^{\sigma\nu})_{,\mu} - F_{\mu\sigma,\nu} F^{\sigma\nu}, \end{aligned}$$

wobei wir die homogene Maxwell Gleichung $dF = 0$ und die Antisymmetrie von F benutzt haben. Dies impliziert nun, dass

$$F_{\mu\sigma,\nu} F^{\sigma\nu} = \frac{1}{4} (F_{\nu\sigma} F^{\sigma\nu})_{,\mu}. \quad (6.2.4)$$

Dieser Term kürzt daher gerade die Ableitung des letzten Terms des Energie-Impulstensors:

$$-\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (F_{\rho\sigma} F^{\sigma\rho}) g^{\mu\nu}. \quad (6.2.5)$$

Damit bleibt lediglich der Beitrag des zweiten Terms in (6.2.3):

$$F_{\mu\sigma} F^{\sigma\nu}{}_{,\nu} = -\frac{4\pi k}{c} F_{\mu\sigma} j^\sigma. \quad (6.2.6)$$

Dies beweist den Energie-Impulssatz.

Durch die Felder ausgedrückt lauten diese Tensoren

$$F_{\mu\sigma} F^{\sigma\nu} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}^2 & \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} \\ -\mathbf{E} \wedge \mathbf{B} & E_i E_k + B_i B_k - \mathbf{B}^2 \delta_{ik} \end{pmatrix} \quad (6.2.7)$$

sowie

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi k} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) & \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} \\ \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} & \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)\delta_{ik} - E_i E_k - B_i B_k \end{pmatrix}. \quad (6.2.8)$$

Weiterhin ist

$$f^\mu = \left(\frac{1}{c} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}, \rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{j} \wedge \mathbf{B} \right). \quad (6.2.9)$$

Einige Komponenten des Energie-Impulstensors sind schon bekannt. Zum Beispiel ist T^{00} einfach die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes und cT^{0i} ist die Energiestromdichte (der Poynting Vektor). Sie werden als 4-er Vektor $\frac{1}{c}T^{\mu 0}$ als die *Impulsdichte*

des Feldes zusammengefasst. Integriert man nämlich den Energie-Impulssatz über ein Raumgebiet $V \subset \mathbb{R}^3$, dann erhält man

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3\mathbf{x} \frac{1}{c} T^{\mu 0} = - \int_{\partial V} \sum_{k=1}^3 T^{\mu k} dS_k - \int_V d^3\mathbf{x} f^\mu, \quad (6.2.10)$$

wobei wir das Divergenztheorem angewendet haben. Wir interpretieren

$$\sum_{k=1}^3 T^{\mu k} dS_k \quad (6.2.11)$$

als die μ -te Komponente des *Impulsstroms* durch $d\mathbf{S}$. Die $\mu = 0$ Komponente von (6.2.10) drückt die schon bekannte Energieerhaltung aus und die übrigen Komponenten beschreiben die Erhaltung des Impulses

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3\mathbf{x} \frac{1}{c^2} S_i = - \int_{\partial V} T_{ik} dS_k - \int_V d^3\mathbf{x} f_i, \quad (6.2.12)$$

wobei wir hier die 3-dimensionalen Indizes unten geschrieben haben. Zusammen beschreibt daher (6.2.10) die Erhaltung des gesamten 4-er Impulses von Feld und Materie.

6.2.1 Freie Felder

Im Fall eines freien Feldes (d.h. $\rho = \mathbf{j} = 0$) ist der Energie-Impulssatz einfach

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0. \quad (6.2.13)$$

Wie im Fall der Ladungserhaltung kann man dann zeigen, dass sich der gesamte Feldimpuls

$$P^\mu = \frac{1}{c} \int_{x^0=0} d^3\mathbf{x} T^{\mu 0}(x) \quad (6.2.14)$$

unter Poincarétransformationen gemäss

$$\hat{P}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu P^\nu \quad (6.2.15)$$

transformiert, wobei Λ eine eigentliche orthochrone Lorentztransformation ist. [Hierbei haben wir natürlich vorausgesetzt, dass $F^{\mu\nu}$ in raumartigen Richtungen hinreichend schnell abfällt.] Insbesondere ist daher P^μ unter Zeitverschiebungen invariant: Impulserhaltung.

6.2.2 Statische Felder

Für statische Felder kann man die Impulserhaltung (6.2.12) als

$$F_i \equiv \int_V d^3\mathbf{x} f_i = \int_{\partial V} (-T_{ik}) dS_k = \int_{\partial V} \sigma_{ik} dS_k \quad (6.2.16)$$

schreiben; $\sigma_{ik} \equiv -T_{ik}$ wird der Maxwell'sche Spannungstensor genannt. Diese Gleichung impliziert, dass man die Kraft \mathbf{F} auf eine Strom- und Ladungsverteilung aus der Kenntnis der Felder auf einer umschliessenden Fläche ∂V berechnen kann. Insbesondere gibt es zwei hübsche Anwendungen dieser Gleichung:

(1) Die resultierende Kraft einer statischen Ladungs- und Stromverteilung auf sich selbst verschwindet: betrachte dazu V als Kugel vom Radius R mit $R \rightarrow \infty$. Da \mathbf{E} und \mathbf{B} wie R^{-2} abfallen, fällt σ_{ik} wie R^{-4} ab, und das Oberflächenintegral über ∂V verschwindet im Limes $R \rightarrow \infty$.

(2) Actio = Reactio zwischen zwei statischen Verteilungen: da die Summe der Kräfte wegen (1) verschwindet, ist die Kraft, die auf System 1 von System 2 ausgeübt wird gerade von derselben Stärke (und entgegengesetzter Richtung) wie die Kraft, die auf System 2 von System 1 ausgeübt wird.

An Leiterflächen haben die Maxwell'schen Spannungen eine reale Bedeutung. Im Innern des Leiters verschwinden das elektrische und magnetische Feld, und daher besitzt an der äusseren Leiterfläche \mathbf{E} nur eine Normalkomponente, und \mathbf{B} nur eine Tangentialkomponente. [Die Tangentialkomponente von \mathbf{E} und die Normalkomponente von \mathbf{B} sind, wie wir schon früher gesehen haben, stetig!] Falls der Leiter bei $x^1 = 0$ in der $x^2 - x^3$ Ebene liegt, können daher an der äusseren Leiterfläche lediglich E_1 sowie B_2 und B_3 von null verschieden sein. Der Maxwell'sche Spannungstensor ist

$$\sigma_{ik} = \frac{1}{4\pi k} \left(E_i E_k - \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 \delta_{ik} \right) + \left(B_i B_k - \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 \delta_{ik} \right) \quad (6.2.17)$$

und hat daher die Form

$$\sigma = \frac{1}{8\pi k} \begin{pmatrix} \mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}. \quad (6.2.18)$$

Auf das Flächenelement $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$ wirkt daher die Kraft $F_i = \sigma_{ik} n_k$, d.h.

$$\mathbf{f} = \frac{1}{8\pi k} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \mathbf{n}. \quad (6.2.19)$$

Der erste Term stellt einen 'Zug' dar, der zweite einen 'Druck'.

6.3 Drehimpuls

Der Drehimpuls eines Teilchens in der Mechanik wird durch

$$L^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu \quad (6.3.1)$$

beschrieben. $L^{\mu\nu}$ ist ein anti-symmetrischer Tensor, d.h. er transformiert sich unter eigentlichen orthochronen Lorentztransformationen in der üblichen Weise,

$$L^{\mu\nu} \mapsto \hat{L}^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma L^{\rho\sigma}. \quad (6.3.2)$$

Für $i = 1, 2, 3$ ist

$$L^{i0} = (p^0 \mathbf{x} - ct \mathbf{p})_i, \quad L^{(i+1)(i+2)} = (\mathbf{x} \wedge \mathbf{p})_i. \quad (6.3.3)$$

Da $\frac{dx}{dt}$ parallel zu p ist folgt der Drehimpulssatz

$$\frac{dL^{\mu\nu}}{dt} = x^\mu \frac{dp^\nu}{dt} - x^\nu \frac{dp^\mu}{dt}. \quad (6.3.4)$$

Die rechte Seite beschreiben die 4-dimensional erweiterten Drehmomente der Kraft $\frac{dp^\mu}{dt}$.

Für das elektromagnetische Feld definiert man den Drehimpulstensor mit Hilfe des Energie-Impulstensors

$$\Theta^{\mu\nu\sigma} = x^\mu T^{\nu\sigma} - x^\nu T^{\mu\sigma}. \quad (6.3.5)$$

Aus dem Energie-Impulssatz (sowie der Symmetrie von T) folgt nun der Drehimpulssatz

$$\Theta^{\mu\nu\sigma}{}_{,\sigma} = -(x^\mu f^\nu - x^\nu f^\mu). \quad (6.3.6)$$

Integriert über ein räumliches Gebiet $V \subset \mathbb{R}^3$ erhält man dann

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{c} \Theta^{\mu\nu 0} = - \int_{\partial V} \Theta^{\mu\nu k} dS_k - \int_V d^3 \mathbf{x} (x^\mu f^\nu - x^\nu f^\mu). \quad (6.3.7)$$

Der letzte Term beschreibt das Drehmoment des Feldes auf die Strom- und Ladungsverteilung in V . Wir interpretieren deshalb $\frac{1}{c} \Theta^{\mu\nu 0}$ als die *Drehimpulsdichte des Feldes*, sowie $\Theta^{\mu\nu k} dS_k$ als den *Drehimpulsstrom* durch die Oberfläche $d\mathbf{S}$. In Komponenten ausgeschrieben ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \Theta^{i00} &= \frac{1}{c} (u \mathbf{x} - t \mathbf{S})_i, \\ \frac{1}{c} \Theta^{(i+1)(i+2)0} &= \left(\mathbf{x} \wedge \frac{1}{c^2} \mathbf{S} \right)_i. \end{aligned}$$

6.3.1 Freie Felder

Falls $\rho = \mathbf{j} = 0$ dann ist

$$\Theta^{\mu\nu\sigma}{}_{,\sigma} = 0. \quad (6.3.8)$$

Mit denselben Argumenten wie zuvor für den Fall der Ladungs- oder Impulserhaltung folgt dann wieder, dass sich der Gesamtdrehimpuls

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{c} \int_{x^0=0} d^3 \mathbf{x} \Theta^{\mu\nu 0}(x) \quad (6.3.9)$$

unter eigentlichen orthochronen Lorentztransformationen wie

$$L^{\mu\nu} \mapsto \hat{L}^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\sigma \Lambda^\nu{}_\rho L^{\sigma\rho} \quad (6.3.10)$$

transformiert. Aus (6.3.7) mit $V = \mathbb{R}^3$ folgt dann die Drehimpulserhaltung $\frac{dL^{\mu\nu}}{dt} = 0$. [Hier haben wir wiederum angenommen, dass die Feldstärken in raumartige Richtungen hinreichend schnell abfallen.]

6.3.2 Statische Felder

Die Raum-Raum Komponenten von (6.3.7) lauten

$$\int_V d^3\mathbf{x} (x_i f_j - x_j f_i) = \int_{\partial V} dS_k (x_i \sigma_{jk} - x_j \sigma_{ik}), \quad (6.3.11)$$

wobei σ_{jk} wiederum der Maxwell'sche Spannungstensor ist. In Vektorschreibweise kann man das als

$$\int_V d^3\mathbf{x} (\mathbf{x} \wedge \mathbf{f}) = \int_{\partial V} \mathbf{x} \wedge d\sigma, \quad (6.3.12)$$

wobei $d\sigma_i = \sigma_{ik} dS_k$ die durch den Spannungstensor σ auf das Flächenelement $d\mathbf{S}$ ausgeübte Kraft ist. Auch zur Berechnung des Drehmomentes auf eine Strom- und Ladungsverteilung genügt also die Kenntnis der Felder auf einer umschliessenden Fläche ∂V .

7 Das Feld einer Punktladung

Eine andere interessante Anwendung der Maxwell Gleichungen betreffen bewegte Punktladungen, so wie sie zum Beispiel bei Beschleunigern auftreten.

7.1 Das retardierte Potential

Die Bewegung einer Punktladung e sei gegeben durch ihre (zeitartige) Weltlinie $y(\tau)$, wobei τ die Eigenzeit beschreibt. Die zugehörige Stromdichte ist

$$j^\mu(x) = ec \int d\tau u^\mu(\tau) \delta^{(4)}(x - y(\tau)), \quad (7.1.1)$$

wobei $u = dy/d\tau$ die 4-er Geschwindigkeit ist. Für das retardierte Potential ergibt sich daraus (siehe Kapitel 5.4):

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= 4\pi ke \int d^4y \int d\tau u^\mu(\tau) \delta^{(4)}(y - y(\tau)) \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \delta(x^0 - y^0 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \\ &= ke \int d\tau \frac{u^\mu(\tau)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}(\tau)|} \delta(x^0 - y^0(\tau) - |\mathbf{x} - \mathbf{y}(\tau)|). \end{aligned}$$

Das Argument der delta-Funktion

$$f(\tau) \equiv x^0 - y^0(\tau) - |\mathbf{x} - \mathbf{y}(\tau)| \quad (7.1.2)$$

ist null, falls für

$$R = x - y(\tau) \quad (7.1.3)$$

die Gleichung

$$(R, R) = (R^0)^2 - \sum_i (R^i)^2 = 0 \quad (7.1.4)$$

erfüllt ist und $R^0 > 0$ ist. Tatsächlich hat für jedes $x \in \mathbb{R}^4$, $\tau \mapsto (R, R)$ genau eine Nullstelle, $\tau \equiv \tau(x)$ mit $R^0 > 0$. An dieser Nullstelle gilt insbesondere $x^0 - y^0 = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, und daher ist

$$f'(\tau) = -u^0 + \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = -\frac{(R, u)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \quad (7.1.5)$$

Damit wird also das retardierte Potential

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= ke \int d\tau \frac{u^\mu(\tau)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}(\tau)|} \delta(f(\tau)) \\ &= ke \int df \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{(R, u)} \frac{u^\mu(\tau)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \delta(f) \\ &= ke \frac{u^\mu}{(R, u)}, \end{aligned} \quad (7.1.6)$$

wobei $u = u(\tau)$, $R = x - y(\tau)$ und $\tau \equiv \tau(x)$ die Nullstelle von $(R, R) = 0$ mit $R^0 > 0$ beschreibt. Der Ausdruck (7.1.6) heisst *Liénard-Wiechert-Potential*.

7.2 Retardiertes Feld

Zur Berechnung des Feldes $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ aus (7.1.6) brauchen wir die ersten Ableitungen von $\tau(x)$. Diese ergeben sich aus der definierenden Gleichung

$$(R, R) = 0 \quad \text{mit} \quad R(x) = x - y(\tau(x)). \quad (7.2.1)$$

Ableiten nach x^μ ergibt nun

$$0 = \partial_\mu R^\alpha R_\alpha = 2(\delta^\alpha_\mu - u^\alpha \tau_{,\mu}) R_\alpha, \quad (7.2.2)$$

und daher ist also

$$\tau_{,\mu} = \frac{R_\mu}{(R, u)}. \quad (7.2.3)$$

Aus (7.1.6) folgt dann

$$\partial_\mu A_\nu = ke \frac{R_\mu}{(R, u)} \frac{d}{d\tau} \frac{u_\nu}{(R, u)} - \frac{ke}{(R, u)^2} u_\mu u_\nu. \quad (7.2.4)$$

[Der letzte Term kommt von der direkten Ableitung von R nach x^ν ; da er symmetrisch in $\mu \leftrightarrow \nu$ ist, trägt er bei der Berechnung des Feldes nicht bei.] Weiterhin berechnet man

$$\frac{d}{d\tau}(R, u) = -(u, u) + (R, w) = -c^2 + (R, w), \quad (7.2.5)$$

wobei

$$w = \frac{du}{d\tau} \quad (7.2.6)$$

die Beschleunigung ist. Damit erhält man für das retardierte Feld

$$F_{\mu\nu} = \frac{ke}{(R, u)^3} \left[(c^2 - (R, w))(R_\mu u_\nu - R_\nu u_\mu) + (R, u)(R_\mu w_\nu - R_\nu w_\mu) \right]. \quad (7.2.7)$$

Für das weitere ist es nützlich, das retardierte Feld als

$$F^{\mu\nu} = \frac{ke}{(R, u)^3} \left[R^\mu b^\nu - R^\nu b^\mu \right] \quad (7.2.8)$$

zu schreiben, wobei

$$b^\nu = c^2 u^\nu + (R, u) w^\nu - (R, w) u^\nu. \quad (7.2.9)$$

Insbesondere ist daher klar, dass eine Komponente $\sim u$ von w nichts zum Feld beiträgt!

7.3 Dreidimensionale Form

Wir benützen die Notation:

$$R^\mu = r(1, \mathbf{n}), \quad r = |\mathbf{R}| = R^0, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{r}, \quad \beta = \frac{\mathbf{v}}{c}, \quad \dot{\beta} = \frac{d\beta}{dt}. \quad (7.3.1)$$

Aus $E_i = F^{i0}$, $B_i = -F^{(i+1)(i+2)}$ folgt dann

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{ke r}{(R, u)^3} (b^0 \mathbf{n} - \mathbf{b}) \\ \mathbf{B} &= -\frac{ke r}{(R, u)^3} (\mathbf{n} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}.\end{aligned}\quad (7.3.2)$$

Zur Berechnung von \mathbf{E} (und damit auch von \mathbf{B}) brauchen wir weiterhin

$$u^\mu = \frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}}(1, \beta), \quad w^\mu = \frac{c}{(1-\beta^2)}(0, \dot{\beta}) + \frac{(\beta \cdot \dot{\beta})}{(1-\beta^2)^{3/2}} u^\mu. \quad (7.3.3)$$

Wegen der obigen Bemerkung können wir den letzten Term ignorieren. Dann finden wir

$$(R, u) = \frac{rc}{\sqrt{1-\beta^2}}(1 - \mathbf{n} \cdot \beta), \quad (R, w) = -\frac{rc}{(1-\beta^2)}(\mathbf{n} \cdot \dot{\beta}), \quad (7.3.4)$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{ke r c^3}{(R, u)^3 \sqrt{1-\beta^2}}(\mathbf{n} - \beta) \\ &\quad + \frac{ke r^2 c^2}{(R, u)^3 (1-\beta^2)^{3/2}} [(\mathbf{n} \cdot \dot{\beta})(\mathbf{n} - \beta) - (1 - \mathbf{n} \cdot \beta)\dot{\beta}] \\ &= \frac{ke(1-\beta^2)}{r^2(1-\mathbf{n} \cdot \beta)^3}(\mathbf{n} - \beta) + \frac{ke}{rc(1-\mathbf{n} \cdot \beta)^3} \mathbf{n} \wedge [(\mathbf{n} - \beta) \wedge \dot{\beta}].\end{aligned}\quad (7.3.5)$$

Für $\dot{\beta} = 0$ bleiben nur die Terme der Ordnung r^{-2} übrig: eine gleichförmig bewegte Punktladung strahlt nicht! Die Glieder der Ordnung r^{-1} sind proportional zu $\dot{\beta}$. In dieser Ordnung ist auch \mathbf{E} transversal zu \mathbf{n} , d.h. \mathbf{E} , \mathbf{B} und \mathbf{n} verhalten sich wiederum wie eine ebene Welle. Zu beachten ist stets, dass sich die Grössen r , \mathbf{n} , β und $\dot{\beta}$ immer auf die retardierte Position der Punktladung beziehen.

7.4 Ausgestrahlte Energie

Wir definieren die ausgestrahlte Leistung als

$$\begin{aligned}W(t) &= \text{Energiestrom zur Zeit } t + r/c \text{ durch die} \\ &\quad \text{Kugel vom Radius } r \text{ um } \mathbf{y}(t).\end{aligned}\quad (7.4.1)$$

Diese Grösse wird für $r \rightarrow \infty$ unabhängig von r . Für $\beta = 0$ folgt aus den obigen Formeln für \mathbf{E} und \mathbf{B}

$$\mathbf{S} = \frac{ke^2}{4\pi cr^2} |\dot{\beta}|^2 \sin^2 \theta \mathbf{n} + o(r^{-2}), \quad (7.4.2)$$

wobei θ der Winkel zwischen $\dot{\beta}$ und \mathbf{n} ist. Die zugehörige Leistung ist dann

$$W = \frac{2ke^2}{3c} |\dot{\beta}|^2. \quad (7.4.3)$$

Dies entspricht genau der elektrischen Dipolstrahlung (vgl. Kapitel 4.4.1 mit $\dot{\mathbf{p}} = e\mathbf{v} = ce\boldsymbol{\beta}$). Diese Formel ist die sogenannte ‘Larmor Formel’, die die abgestrahlte Leistung eines nicht-relativistischen ($\beta = 0$) beschleunigten geladenen Teilchens beschreibt.

Larmor’s Formel kann vermöge eines Kovarianzargumentes (oder durch direktes Nachrechnen!) für Teilchen beliebiger Geschwindigkeit verallgemeinert werden. Man kann zeigen, dass W tatsächlich Lorentz invariant ist. Die gesuchte Formel für W soll daher manifest Lorentz invariant sein, und die Larmor Formel für $\beta \rightarrow 0$ reproduzieren. Ausserdem ist klar, dass diese Formel lediglich $\boldsymbol{\beta}$ und $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ involvieren kann (da die Formeln für \mathbf{E} und \mathbf{B} lediglich davon abhängen). Dies legt die allgemeine Formel bereits eindeutig fest. Um die gesuchte Verallgemeinerung der Larmor Formel zu finden schreiben wir W in der suggestiven Form

$$W = \frac{2k e^2}{3 m^2 c^3} \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right), \quad (7.4.4)$$

wobei m die Masse des geladenen Teilchens und \mathbf{p} sein Impuls ist. Die Lorentz invariante Verallgemeinerung ist dann

$$W = -\frac{2k e^2}{3 m^2 c^3} \left(\frac{dp_\mu}{d\tau} \frac{dp^\mu}{d\tau} \right), \quad (7.4.5)$$

wobei $d\tau = dt/\gamma$ das Eigenzeitelement ist, und p^μ der 4er-Implus. Das obige 4er Skalarprodukt ist

$$-\frac{dp_\mu}{d\tau} \frac{dp^\mu}{d\tau} = \left(\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \right) - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dE}{d\tau} \right)^2 = \left(\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \right) - \beta^2 \left(\frac{dp}{d\tau} \right)^2. \quad (7.4.6)$$

[Hier haben wir benutzt, dass $E = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2}$. Dann ist $1/c dE/d\tau = cp(dp/d\tau)/E = \beta(dp/d\tau)$.] Im Limes $\beta \rightarrow 0$ reduziert sich daher der obige Ausdruck zur Larmor Formel.

Falls man in (7.4.5) die Energie und den Impuls durch

$$E = \gamma m c^2, \quad \mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v} \quad (7.4.7)$$

ausdrückt, erhält man die Liénard Formel (1898)

$$W = \frac{2k e^2}{3 c} \gamma^6 \left[|\dot{\boldsymbol{\beta}}|^2 - |\boldsymbol{\beta} \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}}|^2 \right]. \quad (7.4.8)$$

7.4.1 Linearbeschleuniger

Als Anwendung diskutieren wir die Strahlungsverluste in Beschleunigern, zuerst für den Linearbeschleuniger (Bewegung längs der 1-Achse). Wegen $(p, p) = mc^2$ ist $p^0 dp^0/d\tau = p^1 dp^1/d\tau$, d.h.

$$\frac{dp^0}{d\tau} = \beta \frac{dp^1}{d\tau} \quad (7.4.9)$$

und daher

$$-\left(\frac{dp}{d\tau}, \frac{dp}{d\tau}\right) = \left(\frac{dp^1}{d\tau}\right)^2 (1 - \beta^2) = \left(\frac{dp^1}{dt}\right)^2, \quad (7.4.10)$$

wobei wir benutzt haben, dass $d\tau = \sqrt{1 - \beta^2} dt$. Einsetzen in (7.4.5) ergibt dann

$$W = -\frac{2k e^2}{3m^2 c^3} \left(\frac{dp}{d\tau}, \frac{dp}{d\tau}\right) = \frac{2k e^2}{3m^2 c^3} \left(\frac{dp^1}{dt}\right)^2. \quad (7.4.11)$$

Weiterhin ist nach (7.4.9)

$$\frac{dp^1}{dt} = \frac{1}{v} \frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dx}, \quad (7.4.12)$$

wobei dE/dx die Zunahme der kinetischen Energie pro Längeneinheit ist. Damit findet man

$$\frac{W}{dE/dt} = \frac{2k e^2}{3m^2 c^3} \frac{1}{v} \frac{dE}{dx} \longrightarrow \frac{2k e^2}{3m^2 c^4} \frac{dE}{dx}, \quad \text{für } v \rightarrow c. \quad (7.4.13)$$

Für Elektronen sind die Grössenordnungen $mc^2 = 0.5 \text{ MeV}$ und $e^2/mc^2 = 10^{-15} \text{ m}$. Bei einer typischen Energiezunahme von 10 MeV/m ist $W = 10^{-14} dE/dt$ — Strahlungsverluste in Linearbeschleunigern sind völlig unbedeutend!

7.4.2 Kreisbeschleuniger

Die Situation ist deutlich anders für Kreisbeschleuniger (so wie zum Beispiel die Ringe am CERN in Genf). Im relativistischen Bereich ist die Tangentialbeschleunigung gegenüber der Zentrifugalbeschleunigung vernachlässigbar. Dann ist $|\dot{\beta}| = \beta\omega$, wobei ω die Kreisfrequenz ist: $\omega = c\beta/r$, mit r dem Radius der Kreisbahn. Dann wird (7.4.8)

$$W = \frac{2k e^2}{3c} (1 - \beta^2)^{-3} [\omega^2 \beta^2 - \omega^2 \beta^4] = \frac{2k e^2}{3c} (1 - \beta^2)^{-2} \beta^2 \omega^2. \quad (7.4.14)$$

Der Energieverlust durch Strahlung während einer Umlaufzeit $2\pi/\omega$ ist also

$$\Delta E = \frac{4\pi k e^2}{3c} (1 - \beta^2)^{-2} \beta^2 \omega = \frac{4\pi k e^2}{3r} (1 - \beta^2)^{-2} \beta^3 \approx \frac{4\pi k e^2}{3r} (1 - \beta^2)^{-2}, \quad (7.4.15)$$

wobei wir im letzten Schritt den Limes $\beta \rightarrow 1$ betrachtet haben. Da die Energie $E = mc^2(1 - \beta^2)^{-1/2}$ können wir die letzte Formel auch als

$$\Delta E = \frac{4\pi k e^2}{3r} \left(\frac{E}{mc^2}\right)^4 \quad (7.4.16)$$

schreiben. Typische Grössenordnungen für ein Elektron-Synchrotron sind $E = 10 \text{ GeV} \approx 10^4 mc^2$ und $r = 10 \text{ m}$. Dann ist $e^2/rmc^2 \approx 10^{-16}$ und $\Delta E \approx mc^2 \approx 1 \text{ MeV}$. Dies ist mit der dem Elektron pro Umlauf zugeführten Energie vergleichbar. In Kreisbeschleunigern sind daher die Strahlungsverluste der wichtigste Begrenzungsfaktor für die erreichbare Teilchenenergie.

7.5 Strahlungscharakteristik schneller Teilchen

Der dominante Einfluss auf die Winkelverteilung der Strahlung eines beschleunigten Teilchens kommt von dem Faktor (siehe (7.3.5)) $\mathbf{E} \sim (1 - \mathbf{n} \cdot \beta)^{-3}$, der zu einer Abhängigkeit des Poynting Vektors $\mathbf{S}(\mathbf{n}) = \frac{c}{4\pi k} |\mathbf{E}|^2 \mathbf{n}$ von

$$|\mathbf{S}(\mathbf{n})| \sim (1 - \mathbf{n} \cdot \beta)^{-6} = (1 - \beta \cos \theta)^{-6} \quad (7.5.1)$$

führt. [Der Winkel θ ist hier der Winkel zwischen β und \mathbf{n} .] Für schnelle Teilchen ($\beta \approx 1$) hat diese Funktion ein scharfes Maximum bei $\theta = 0$. Im Fall $\dot{\beta} \parallel \beta$ (so wie das für Linearbeschleuniger der Fall ist) gilt zum Beispiel [wir ignorieren wiederum Terme der Ordnung $o(r^{-2})$]

$$|\mathbf{S}| = \frac{k e^2}{4\pi c r^2} |\dot{\beta}|^2 \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^6}. \quad (7.5.2)$$

Da nur kleine θ wichtig sind, entwickeln wir

$$\gamma^{-2} \equiv 1 - \beta^2 = (1 + \beta)(1 - \beta) \approx 2(1 - \beta) \quad (7.5.3)$$

und daher finden wir

$$1 - \beta \cos \theta \approx 1 - \beta(1 - \theta^2/2) \approx \frac{1}{2\gamma^2} (1 + (\gamma\theta)^2). \quad (7.5.4)$$

Figure 2: Die Funktion $\frac{(\gamma\theta)^2}{(1+(\gamma\theta)^2)^6}$ für $\gamma = 0.1$.

Die Winkelverteilung ist also durch die Funktion

$$|\mathbf{S}(\theta)| \sim \frac{(\gamma\theta)^2}{(1 + (\gamma\theta)^2)^6} \quad (7.5.5)$$

(siehe ‘Figure 2’) gegeben; der charakteristische Öffnungswinkel des Strahlungskegels ist

$$\theta_0 \approx \gamma^{-1}. \quad (7.5.6)$$

Dies gilt auch im Fall $\dot{\beta} \not\parallel \beta$, nur ist dann die Winkelverteilung auch von dem Winkel $(\mathbf{n} - \beta)$ zu β abhängig. Mit der Abschätzung (7.5.6) kann man die *Synchrotronstrahlung* qualitativ verstehen: Es sei ω_0 die Winkelgeschwindigkeit des Elektrons im Synchrotron. Der Strahlungsimpuls, der bei \mathbf{x} empfangen wird, rührt nach (7.5.6) von einem Bahnelement des Winkels γ^{-1} her, wird also während der ‘Sendezeit’

$$\frac{dy^0}{c} = \frac{1}{\omega_0\gamma} \quad (7.5.7)$$

emittiert. Da sich das Elektron dabei fast mit Lichtgeschwindigkeit in der Ausstrahlungsrichtung bewegt, ist die ‘Empfangszeit’ dx^0/c des Pulses bei \mathbf{x} viel kürzer. Wie in Kapitel 7.2 und 7.3 gezeigt gilt nämlich

$$\frac{\partial y^0}{\partial x^0} = \frac{\partial y^0}{\partial \tau} \tau_{,0} = u^0 \frac{R^0}{(R, u)} = c\gamma \frac{r}{r c \gamma (1 - \mathbf{n} \cdot \beta)} = (1 - \mathbf{n} \cdot \beta)^{-1} \approx 2\gamma^2, \quad (7.5.8)$$

und daher ist die Pulsdauer bei \mathbf{x}

$$\frac{dx^0}{c} \approx \frac{dy^0}{2c\gamma^2} \approx \frac{1}{2\omega_0\gamma^3}. \quad (7.5.9)$$

Die Pulse folgen sich mit der Periode $T = 2\pi/\omega_0$. Die zeitliche ‘Breite’ eines Impulses ist dabei $\Delta t = 1/\omega_0\gamma^3$. Deshalb hat die Fourier Transformierte eines Impulses $f(t)$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{i\omega t} \quad (7.5.10)$$

die Breite $\Delta\omega = (\Delta t)^{-1} = \omega_0\gamma^3$. Die spektrale Zusammensetzung der Synchrotronstrahlung wird aus der Fourier Reihe des gesamten Impulses

$$F(t) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} f(t - sT) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{-i\omega_0 n t} \quad (7.5.11)$$

ersichtlich, wobei

$$c_n = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^T dt f(t) e^{i\omega_0 n t} = \omega_0 \hat{f}(n\omega_0). \quad (7.5.12)$$

Dabei ist c_n nur bis zur Ordnung $n \approx \gamma^3$ von null verschieden, d.h. die Strahlung setzt sich aus den diskreten Frequenzen $n\omega_0$ zusammen, wobei $n = 1, 2, \dots \approx \gamma^3$. Wegen $v \approx c$ entspricht die Grundfrequenz $\omega_0 = v/r$ der Lichtwellenlänge $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0 = 2\pi r$, d.h. des Umfangs des Synchrotrons. Für 1 GeV Elektronen ist $\gamma \approx 10^3$, so dass das Spektrum quasikontinuierlich bis hinunter zu Wellenlängen $\lambda = \lambda_0\gamma^3 \approx r10^{-9}$ reicht.

8 Elektrodynamik von Materie

Manche elektromagnetischen Erscheinungen spielen sich auf Längenskalen ab, die gross sind relativ zu den typischen atomaren Abmessungen (ca. 1 \AA). [Als Beispiel sei die Fortpflanzung von Licht in Materie genannt.] Für solche Fälle ist eine Beschreibung gesucht, die von der mikroskopischen Struktur der Materie absieht, bzw. sich nur mit räumlichen Mittelwerten (über Längen der Grösse $\gg 100 \text{ \AA}$) befasst.

8.1 Das Modell und mittlere Felder

Die Stromdichte in Materie hat die Form

$$j^\mu(x) = \sum_{(a)} j_{(a)}^\mu(x), \quad \partial_\mu j_{(a)}^\mu = 0. \quad (8.1.1)$$

Hier ist $j_{(a)}^\mu(x)$ die Stromdichte eines ‘Atoms’ a (oder entsprechend eines Ions, Elektrons, etc.), die stets in einer Umgebung atomarer Grössenordnung um dessen Mittelpunkt $\mathbf{r}_a(t)$ konzentriert ist.

Ein makroskopisches System enthält typischerweise $10^{23\pm 5}$ Elektronen oder Atome; diese sind alle in fortwährender Bewegung, und produzieren elektromagnetische Felder, die sich sehr schnell in Raum und Zeit verändern (ca. 10^{-8} cm und 10^{-13} s). Makroskopische Messungen mitteln daher immer über Intervalle (in Raum und Zeit), die viel grösser sind. Die komplizierten mikroskopischen Fluktuationen mitteln sich in solchen Messungen aus, und man erhält relativ glatte und langsam variierende makroskopische Grössen. Im folgenden wollen wir die Elektrodynamik dieser gemittelten Felder studieren.

Für jede Feldkomponente f definieren wir einen räumlichen Mittelwert über viele Atome durch

$$\bar{f}(\mathbf{x}, t) = \int d^3\mathbf{y} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}, t), \quad (8.1.2)$$

wobei g eine glatte Gewichtsform ist, deren Integral auf 1 normiert ist,

$$\int d^3\mathbf{y} g(\mathbf{y}) = 1. \quad (8.1.3)$$

[Der Träger von g erstreckt sich dabei über viele Atomabstände.] Diese gemittelten Grössen sind dann glatte Funktionen. Da die Mittelbildung linear ist, gelten die Maxwell Gleichungen unverändert für die mittleren Felder $\bar{\mathbf{E}}$, $\bar{\mathbf{B}}$ sowie Ladungs- und Stromverteilungen $\bar{\rho}$ und $\bar{\mathbf{j}}$.

8.1.1 Multipolentwicklung

Betrachte nun den Beitrag eines einzelnen momentan ruhenden Atoms an der Stelle \mathbf{r} zur gemittelten Stromdichte. Dann erstreckt sich das Integral

$$\bar{\mathbf{j}}^\mu(x) = \int d^3\mathbf{y} g(\mathbf{x} - \mathbf{r} - \mathbf{y}) j^\mu(\mathbf{r} + \mathbf{y}, t) \quad (8.1.4)$$

nur über ein Gebiet $|\mathbf{y}| \leq \text{Atomdurchmesser}$; in diesem Bereich können wir $g(\mathbf{x} - \mathbf{r} - \mathbf{y})$ in guter Näherung linearisieren:

$$g(\mathbf{x} - \mathbf{r} - \mathbf{y}) = g(\mathbf{x} - \mathbf{r}) - \partial_k g(\mathbf{x} - \mathbf{r}) y_k. \quad (8.1.5)$$

Dies ergibt

$$\bar{j}^\mu(x) = g(\mathbf{x} - \mathbf{r}) a^\mu(t) - \partial_k g(\mathbf{x} - \mathbf{r}) a^{\mu k}(t), \quad (8.1.6)$$

wobei wir die atomaren Multipolmomente bezüglich \mathbf{r} eingeführt haben

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} a^0 &= \int d^3 \mathbf{y} \rho(\mathbf{r} + \mathbf{y}, t) = e \quad (\text{Ladung}) \\ \frac{1}{c} a^{0k} &= \int d^3 \mathbf{y} y_k \rho(\mathbf{r} + \mathbf{y}, t) = p_k(t) \quad (\text{elektrisches Dipolmoment}) \\ a^k &= \int d^3 \mathbf{y} j^k(\mathbf{r} + \mathbf{y}, t) = \frac{dp_k}{dt} \\ a^{lk} &= \int d^3 \mathbf{y} j^l(\mathbf{r} + \mathbf{y}, t) y_k. \end{aligned} \quad (8.1.7)$$

Die letzten Multipolmomente hängen auch mit den zuvor eingeführten Multipolmomenten einfach zusammen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(a^{l(l+1)} - a^{(l+1)l}) &= \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{y} (y_{l+1} j_l - y_l j_{l+1}) \\ &= -c m_{l+2}, \end{aligned} \quad (8.1.8)$$

wobei das magnetische Dipolmoment durch

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int d^3 \mathbf{y} (\mathbf{y} \wedge \mathbf{j}) \quad (8.1.9)$$

definiert ist. Entsprechend ist (diese Rechnung funktioniert wie jene in Kapitel 4.4.3 (Elektrische Dipolstrahlung))

$$\frac{1}{2}(a^{lk} + a^{kl}) = \frac{1}{6} \dot{T}_{lk}, \quad (8.1.10)$$

wobei T durch

$$T_{lk} = 3 \int d^3 \mathbf{y} y_l y_k \rho(\mathbf{r} + \mathbf{y}, t) \quad (8.1.11)$$

gegeben ist. Man findet dann,

$$\begin{aligned} \partial_\mu \bar{j}^\mu &= \frac{1}{c} g \dot{a}^0 - \partial_k g \left(\frac{1}{c} \dot{a}^{0k} - a^k \right) - \partial_k \partial_l g a^{lk} \\ &= -\frac{1}{2} \partial_k \partial_l g (a^{lk} + a^{kl}), \end{aligned} \quad (8.1.12)$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass $\dot{a}^0 = 0$ (wegen Ladungserhaltung). In der obigen Näherung für den gemittelten Strom ist daher die Kontinuitätsgleichung verletzt; allerdings tritt dies erst in der Ordnung $O(y^2)$ auf, die wir in der Ableitung von \bar{j} vernachlässigt hatten. In dieser Approximation kann dann auch a^{lk} durch den antisymmetrischen Teil ersetzt werden, und dann gilt wiederum die Kontinuitätsgleichung für die gemittelten Ströme. In dieser Approximation ist also dann

$$\begin{aligned}\bar{\rho}(\mathbf{x}, t) &= g(\mathbf{x} - \mathbf{r})e - \operatorname{div}(g(\mathbf{x} - \mathbf{r})\mathbf{p}(t)), \\ \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial}{\partial t}g(\mathbf{x} - \mathbf{r})\mathbf{p}(t) + c \operatorname{rot}(g(\mathbf{x} - \mathbf{r})\mathbf{m}(t)).\end{aligned}\quad (8.1.13)$$

Dies entspricht den mittleren Felder mit Ersetzung des Atoms durch ein (ebenfalls ruhendes) Punktteilchen

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{x}, t) &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r})e - \operatorname{div}(\delta(\mathbf{x} - \mathbf{r})\mathbf{p}(t)) \\ \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial}{\partial t}(\delta(\mathbf{x} - \mathbf{r})\mathbf{p}(t)) + c \operatorname{rot}(\delta(\mathbf{x} - \mathbf{r})\mathbf{m}(t)),\end{aligned}\quad (8.1.14)$$

das durch seine Ladung und Dipolmomente charakterisiert ist. Für Materie aus ruhenden Atomen ergibt sich so insgesamt

$$\begin{aligned}\bar{\rho}(\mathbf{x}, t) &= \rho_L(\mathbf{x}, t) - \operatorname{div}(\mathbf{P}(\mathbf{x}, t)) \\ \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + c \operatorname{rot} \mathbf{M}(\mathbf{x}, t),\end{aligned}\quad (8.1.15)$$

wobei

$$\begin{aligned}\rho_L(\mathbf{x}) &= \sum_{(a)} g(\mathbf{x} - \mathbf{r}_{(a)}) e_{(a)}, && \text{Leitungsladungsdichte} \\ \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{(a)} g(\mathbf{x} - \mathbf{r}_{(a)}) \mathbf{p}_{(a)}(t), && \text{elektrische Polarisation} \\ \mathbf{M}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{(a)} g(\mathbf{x} - \mathbf{r}_{(a)}) \mathbf{m}_{(a)}(t), && \text{magnetische Polarisation.}\end{aligned}\quad (8.1.16)$$

Die Verallgemeinerung von (8.1.14) für bewegte Atome erhalten wir durch Umschreiben auf eine manifest kovariante Form:

$$j^\mu(x) = c \int e u^\mu(\tau) \delta^{(4)}(x - x(\tau)) d\tau + c^2 \frac{\partial}{\partial x^\nu} \int p^{\mu\nu}(\tau) \delta^{(4)}(x - x(\tau)) d\tau, \quad (8.1.17)$$

wobei τ die Eigenzeit, u^μ die 4-er Geschwindigkeit, und $p^{\mu\nu}$ der Tensor mit den Komponenten ist

$$p^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \begin{pmatrix} 0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & 0 & m_3 & -m_2 \\ p_2 & -m_3 & 0 & m_1 \\ p_3 & m_2 & -m_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.1.18)$$

die im Ruhesystem des Teilchens wie oben definiert sind. Um dies mit (8.1.15) zu vergleichen beachtet man, dass

$$c \int f(\tau) \delta^{(4)}(x - x(\tau)) d\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2} f(t) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)), \quad (8.1.19)$$

da

$$c \int f(\tau) \delta(ct - x^0(\tau)) d\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2} c \int f(\tau(t')) \delta(ct - ct') dt', \quad (8.1.20)$$

wobei $ct' = x^0(\tau)$ mit $dt' = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$. Dann gilt also

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}, t) &= e \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)) - \operatorname{div}(\delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)) \mathbf{p}(t)) \\ \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) &= ev \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)) + \frac{\partial}{\partial t}(\delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)) \mathbf{p}(t)) + c \operatorname{rot}(\delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)) \mathbf{m}(t)) \end{aligned} \quad (8.1.21)$$

was für $\mathbf{v} = 0$ mit (8.1.14) übereinstimmt. Da $p^{\mu\nu}$ ein Tensor ist, transformieren sich

$$\frac{\mathbf{p}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \text{und} \quad \frac{-\mathbf{m}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (8.1.22)$$

wie \mathbf{E} und \mathbf{B} . Unter der Benutzung der für diese Felder abgeleiteten Transformationsgleichungen (siehe Kapitel 5.4) folgt dann, dass

$$\mathbf{p}_{\parallel} = \mathbf{p}_{\parallel}^{(0)} \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad \mathbf{p}_{\perp} = \mathbf{p}_{\perp}^{(0)} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{m}^{(0)} \quad (8.1.23)$$

und

$$\mathbf{m}_{\parallel} = \mathbf{m}_{\parallel}^{(0)} \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad \mathbf{m}_{\perp} = \mathbf{m}_{\perp}^{(0)} - \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{p}^{(0)}, \quad (8.1.24)$$

wobei $\mathbf{p}^{(0)}$ und $\mathbf{m}^{(0)}$ die Dipolmomente im Ruhesystem sind, und \parallel und \perp die Anteile parallel und orthogonal zu \mathbf{v} bezeichnen. Für $v \ll c$ können wir die Wurzeln ignorieren, und wir erhalten einfach

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}^{(0)} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{m}^{(0)}, \quad \mathbf{m} = \mathbf{m}^{(0)} - \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{p}^{(0)}. \quad (8.1.25)$$

Für Materie aus bewegten Atomen erweitert sich daher (8.1.15) zu

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(\mathbf{x}, t) &= \rho_L(\mathbf{x}, t) - \operatorname{div}(\mathbf{P}(\mathbf{x}, t)) \\ \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{j}_L(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + c \operatorname{rot} \mathbf{M}(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (8.1.26)$$

wobei ρ_L , \mathbf{P} und \mathbf{M} wie zuvor durch (8.1.16) gegeben sind, wobei jedoch die gemäss (8.1.25) berechneten Dipolmomente einzusetzen sind. Ausserdem haben wir jetzt noch zusätzlich die Leitungsstromdichte

$$\mathbf{j}_L(\mathbf{x}, t) = \sum_{(a)} g(\mathbf{x} - \mathbf{r}_{(a)}) e_{(a)} \mathbf{v}_{(a)}, \quad (8.1.27)$$

wobei $\mathbf{v}_{(a)}$ die Geschwindigkeit des Atoms a ist.

8.2 Die makroskopischen Maxwell Gleichungen

Wie wir zuvor bemerkt haben erfüllen die mittleren Felder (die wir nun im folgenden ohne Überstrich als \mathbf{E} , \mathbf{B} , ρ und \mathbf{j} bezeichnen wollen) immer noch die ursprünglichen Maxwell Gleichungen. Mit den obigen Relationen (8.1.26) lauten die makroskopischen Maxwell Gleichungen jetzt nun

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \quad (8.2.1)$$

sowie

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi k \rho_L, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \frac{4\pi k}{c} \mathbf{j}_L, \end{aligned} \quad (8.2.2)$$

wobei wir

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi k \mathbf{P}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi k \mathbf{M} \quad (8.2.3)$$

definiert haben. Wir bezeichnen im folgenden

$$\begin{array}{ll} \mathbf{E} & \text{elektrisches Feld,} \\ \mathbf{B} & \text{magnetische Induktion,} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \mathbf{D} & \text{elektrische Verschiebung} \\ \mathbf{H} & \text{magnetisches Feld.} \end{array}$$

Ein geschlossenes System von Feldgleichungen entsteht erst dann, wenn sich die Polarisationen \mathbf{P} und \mathbf{M} sowie \mathbf{j}_L durch die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} ausdrücken lassen. Dazu dienen phänomenologische Verknüpfungsgleichungen; im einfachsten Fall sind diese

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E}, & \epsilon: & \text{Dielektrizitätskonstante} \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}, & \mu: & \text{magnetische Permeabilität} \\ \mathbf{j}_L &= \sigma \mathbf{E}, & \sigma: & \text{elektrische Leitfähigkeit.} \end{aligned} \quad (8.2.4)$$

Die letzte Gleichung ist das sogenannte *Ohm'sche Gesetz*. Diese Zusammenhänge sind linear, isotrop, lokal und instantan (im einfachsten Fall!). Die Konstanten ϵ, μ, σ sind Materialgrößen, und hängen von Zustandsparametern der Materie wie Druck und Temperatur ab. In anisotropen Medien, wie in gewissen Kristallen, muss \mathbf{D} nicht dieselbe Richtung wie \mathbf{E} haben:

$$D_i = \epsilon_{ik} E_k, \quad (8.2.5)$$

und entsprechend für μ und σ . Allenfalls können diese Gleichungen auch die Abweichungen der Felder um konstante Felder \mathbf{E}_0 und \mathbf{B}_0 herum beschreiben; letztere Felder bewirken dann eine Anisotropie, z.B.

$$\sigma_{ik} \equiv \sigma_{ik}(\mathbf{B}_0) \quad (\text{Hall Effekt}). \quad (8.2.6)$$

Die Zusammenhänge können auch im Allgemeinen nicht lokal sein, oder sogar nicht-linear (Ferromagnetismus). Im Folgenden beschäftigen wir uns mit dem Fall, dass der Zusammenhang nicht instantan ist.

8.3 Dispersion

Für rasch veränderliche Felder sind die Verknüpfungen (8.2.4) nicht instant. Wir illustrieren das am Beispiel der elektrischen Polarisierung $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ an einem festen Punkt \mathbf{x} . Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass der Zusammenhang zwischen \mathbf{P} und \mathbf{E} isotrop ist; dann genügt es, sich auf eine Komponente von \mathbf{P} und \mathbf{E} einzuschränken, die wir einfach mit $P = 4\pi k\mathbf{P}_i$, bzw. $E = \mathbf{E}_i$ bezeichnen. Der Zusammenhang zwischen $P(t)$ und $E(t)$ ist dann

$$P(t) = \int \chi(t-s) E(s) ds . \quad (8.3.7)$$

Die Funktion $\chi(t) = \epsilon(t) - 1$ wird elektrische Suszeptibilität genannt und beschreibt die Polarisierbarkeit des Mediums. Man nennt sie auch ‘Stossantwort’, denn für $E(t) = \delta(t)$ (Stoss bei $t = 0$) ist $P(t) = \chi(t)$. Die Kausalität verlangt, dass vor dem Stoss $P(t) = 0$ ist, d.h. dass $\chi(t) = 0$ für $t < 0$. Wir nehmen an, dass $\chi(t)$ für grosse t rasch abfällt, so dass das Integral

$$\int_0^\infty |\chi(t)| dt < \infty . \quad (8.3.8)$$

Wir definieren die Fouriertransformierte durch

$$\hat{f}(\omega) = \int dt f(t) e^{i\omega t} , \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \hat{f}(\omega) e^{-i\omega t} . \quad (8.3.9)$$

Mit dieser Notation gilt dann im statischen Fall, d.h. für $E(t) \equiv E$

$$P(t) = \int \chi(t-s) E(s) ds = E \cdot \int \chi(s) ds = E \cdot \hat{\chi}(0) . \quad (8.3.10)$$

Der Koeffizient $\hat{\chi}(0)$ wird statische Suszeptibilität genannt.

Im allgemeinen Fall haben wir

$$\begin{aligned} P(t) &= \int \chi(t-s) E(s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int d\omega \hat{\chi}(\omega) \int ds e^{-i\omega(t-s)} E(s) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int d\omega \hat{\chi}(\omega) \hat{E}(\omega) e^{-i\omega t} , \end{aligned} \quad (8.3.11)$$

wobei wir benutzt haben, dass das s Integral in der vorletzten Zeile gerade die Fouriertransformation von E ergibt. Insbesondere folgt also daraus, dass die Fouriertransformierte von P gerade durch

$$\hat{P}(\omega) = \hat{\chi}(\omega) \hat{E}(\omega) \quad (8.3.12)$$

gegeben ist. (Das ist einfach eine Folge davon, dass $P(t)$ die ‘Faltung’ von χ und E ist — unter Fouriertransformation geht eine Faltung immer in das Produkt der Fouriertransformierten über.)

Man kann $\hat{\chi}(\omega)$ als frequenzabhängige Suszeptibilität auffassen: für die Anregung $E(t) = E e^{-i\omega t}$ ist $P(t) = \hat{\chi}(\omega) E e^{-i\omega t}$. Im Unterschied zur statischen Suszeptibilität

ist $\hat{\chi}(\omega)$ jedoch nicht mehr reell. Eine reelle Suszeptibilität führt nämlich zu einer symmetrischen Funktion $\chi(t)$, da

$$\chi(-t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \hat{\chi}(\omega) e^{i\omega t} = \bar{\chi}(t) = \chi(t), \quad (8.3.13)$$

was im Widerspruch zur Kausalität steht — die einzige Ausnahme ist der Fall eines instantanen Zusammenhangs, $\chi(t) = \chi\delta(t)$, in welchem Fall $\hat{\chi}(\omega) = \chi \in \mathbb{R}$ für alle ω .

Unter der Annahme (8.3.8), dass $\chi(t)$ hinreichend schnell abfällt, so dass das Integral konvergiert, hat $\hat{\chi}(\omega)$ die Eigenschaften

- (i) $\hat{\chi}(\omega)$ ist analytisch in ω in der oberen Halbebene, $\Im\omega > 0$.
- (ii) $\hat{\chi}(\omega)$ ist stetig und beschränkt für $\Im\omega \geq 0$ und $\hat{\chi}(\omega) \rightarrow 0$ für $|\omega| \rightarrow \infty$ (in $\Im\omega \geq 0$).
- (iii) $\overline{\hat{\chi}(\omega)} = \hat{\chi}(-\bar{\omega})$.

In der Tat gilt nämlich wegen der Kausalität

$$\hat{\chi}(\omega) = \int_0^\infty dt \chi(t) e^{i\omega t} \quad (8.3.14)$$

und da $|e^{i\omega t}| = e^{-\Im\omega t}$ konvergiert das Integral und die Analytizität (i) folgt direkt. Ausserdem ist $\hat{\chi}$ offenbar in $\Im\omega \geq 0$ beschränkt. Die Stetigkeit in der abgeschlossenen Halbebene $\Im\omega \geq 0$ und das Verschwinden für $|\omega| \rightarrow \infty$ folgen aus dem Riemann-Lebesgue Lemma, da χ gemäss (8.3.8) L^1 ist. Schliesslich folgt (iii) aus

$$\begin{aligned} \overline{\hat{\chi}(\omega)} &= \overline{\int_0^\infty dt \chi(t) e^{i\omega t}} \\ &= \int_0^\infty dt \chi(t) e^{-i\bar{\omega}t} = \hat{\chi}(-\bar{\omega}), \end{aligned} \quad (8.3.15)$$

da $\chi(t)$ reell ist.

Diese Eigenschaften führen nun dazu, dass sich die Funktionen $\Re\hat{\chi}(\omega)$ und $\Im\hat{\chi}(\omega)$ gegenseitig bestimmen — das ist der Inhalt der sogenannten *Dispersionsrelationen*. Für reelles ω gelten nämlich die Kramers-Kronig Relationen:

$$\begin{aligned} \Im\hat{\chi}(\omega) &= \frac{-2\omega}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\Re\hat{\chi}(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \\ \Re\hat{\chi}(\omega) &= \frac{2}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\omega' \Im\hat{\chi}(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'. \end{aligned} \quad (8.3.16)$$

Hier ist $P \int$ der Hauptwert des singulären Integrals

$$P \int_0^\infty d\omega' \cdots = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left(\int_0^{\omega-\delta} d\omega' \cdots + \int_{\omega+\delta}^\infty d\omega' \cdots \right). \quad (8.3.17)$$

Um diese Relationen zu beweisen stellen wir $\hat{\chi}(\omega + i\epsilon)$ durch die Cauchy-Integralformel

$$\hat{\chi}(\omega + i\epsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\hat{\chi}(\omega')}{\omega' - (\omega + i\epsilon)} d\omega' \quad (8.3.18)$$

dar, wobei Γ die Kontour ist, die entlang der reellen Achse von $-R$ bis R verläuft, und dann in der oberen Halbebene durch einen Halbkreis (bei $|\omega'| = R$) geschlossen wird. Für grosse R trägt der Halbkreis wegen (ii) zum Integral nicht bei. Im Limes $\epsilon \rightarrow 0$ wird der Integrand singularär bei $\omega' = \omega$. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass $\hat{\chi}(\omega')$ eine analytische Fortsetzung um ω herum hat, so dass Γ in die untere Halbebene deformiert werden kann. Dann können wir den Limes $\epsilon \rightarrow 0$ direkt auswerten, und finden

$$\hat{\chi}(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{-\infty}^{\omega-\delta} \frac{\hat{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' + \int_{\Gamma_{\delta}} \frac{\hat{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' + \int_{\omega+\delta}^{\infty} \frac{\hat{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \right), \quad (8.3.19)$$

wobei Γ_{δ} der Halbkreis in der negativen Halbebene von $\omega - \delta$ nach $\omega + \delta$ ist. Für $\delta \rightarrow 0$ gilt nun

$$\int_{\Gamma_{\delta}} \frac{\hat{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' = i\pi \hat{\chi}(\omega) \quad (8.3.20)$$

und daher folgt

$$\hat{\chi}(\omega) = \frac{1}{\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'. \quad (8.3.21)$$

Aufgeschlüsselt nach Real- und Imaginärteil folgt

$$\Re \hat{\chi}(\omega) + i \Im \hat{\chi}(\omega) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im \hat{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' - i \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Re \hat{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'. \quad (8.3.22)$$

Schliesslich beobachten wir, dass (iii) impliziert, dass für $\omega' \in \mathbb{R}$

$$\Re \hat{\chi}(-\omega') = \Re \hat{\chi}(\omega'), \quad \Im \hat{\chi}(-\omega') = -\Im \hat{\chi}(\omega'). \quad (8.3.23)$$

Dann wird zum Beispiel

$$\begin{aligned} \Re \hat{\chi}(\omega) &= \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im \hat{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \\ &= \frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \left(\frac{\Im \hat{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega} - \frac{\Im \hat{\chi}(\omega')}{-\omega' - \omega} \right) d\omega' \\ &= \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\omega' \Im \hat{\chi}(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'. \end{aligned} \quad (8.3.24)$$

Die Herleitung der Formel für $\Im \hat{\chi}(\omega)$ ist völlig analog.

8.3.1 Dissipativität

Neben der Kausalität spielt auch die Dissipativität eine Rolle: jede Polarisierung braucht Arbeit $W > 0$. Da die Polarisierung zu der Stromdichte wie $j(t) = \dot{P}(t)$ beiträgt, ist diese Arbeit gerade

$$W = \int dt E(t)j(t) = \int dt E(t)\dot{P}(t) > 0 . \quad (8.3.25)$$

Dies impliziert, dass

(iv) $\hat{\chi}(0) > 0$, also insbesondere $\Im\hat{\chi}(0) = 0$.

(v) $\Im\hat{\chi}(\omega) > 0$ für $\omega > 0$.

(vi) $\hat{\chi}(\omega)$ ist in $\Im\omega \geq 0$ nirgends reell, ausser auf der imaginären Achse. Dort nimmt $\hat{\chi}(\omega)$ monoton ab von $\hat{\chi}(0) > 0$ zu $\hat{\chi}(i\infty) = 0$.

Um (iv) zu beweisen beobachten wir, dass für $E(t) = \theta(t)$,

$$P(t) = \int_0^\infty \chi(t-s)ds = \int_{-\infty}^t \chi(\hat{s})d\hat{s} . \quad (8.3.26)$$

Also ist $\dot{P}(t) = \chi(t)$ und

$$W = \int_{-\infty}^\infty dt E(t)\dot{P}(t) = \int_0^\infty \chi(t) = \hat{\chi}(0) > 0 . \quad (8.3.27)$$

Aus $j(t) = \dot{P}(t)$ folgt, dass $\hat{j}(\omega) = -i\omega\hat{P}(\omega) = -i\omega\hat{\chi}(\omega)\hat{E}(\omega)$. Zusammen mit der Parseval Identität, die besagt, dass

$$\int dt E(t)j(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \hat{E}(\omega)\hat{j}(\omega) , \quad (8.3.28)$$

gilt dann

$$W = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty d\omega \omega \hat{\chi}(\omega) |\hat{E}(\omega)|^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\omega \omega \Im\hat{\chi}(\omega) |\hat{E}(\omega)|^2 , \quad (8.3.29)$$

da $\Re\hat{\chi}(\omega)$ und $|\hat{E}(\omega)|^2$ gerade Funktionen von ω sind. Da $\hat{E}(\omega)$ für $\omega > 0$ eine beliebige Funktion von ω ist, folgt dann wegen (8.3.25), dass $\Im\hat{\chi}(\omega) > 0$ für $\omega > 0$.

Wegen (iv) und (v) sind die einzigen Nullstellen von $\Im\hat{\chi}$ für reelles ω bei $\omega = 0$ und $\omega = \infty$. Weiterhin gilt wegen (ii), dass $\hat{\chi}(\infty) = 0$, also dass auch der Realteil von $\hat{\chi}$ bei $\omega = \infty$ verschwindet. Sei nun a eine reelle Zahl. Die Anzahl der Punkte innerhalb Γ , für die $\hat{\chi}(\omega) = a$ gilt, ist gleich

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma d\omega \frac{\hat{\chi}'(\omega)}{\hat{\chi}(\omega) - a} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{\chi}(\Gamma)} \frac{d\hat{\chi}}{\hat{\chi} - a} . \quad (8.3.30)$$

Für grosses R besteht die Kurve $\hat{\chi}(\Gamma)$ im wesentlichen nur aus dem Bild der reellen Achse, da im Limes $R \rightarrow \infty$, $\hat{\chi} = 0$ entlang des ganzen oberen Halbkreises. Also schneidet $\hat{\chi}(\Gamma)$ die reelle Achse nur bei $0 = \hat{\chi}(\infty)$ und $\hat{\chi}(0)$. Wegen des Argumentprinzips kann daher N maximal $N = 1$ sein, und zwar nur dann, falls $a \in (0, \hat{\chi}(0)]$.

Schliesslich beobachten wir, dass wegen (iii) $\hat{\chi}(\omega) = \hat{\chi}(-\bar{\omega})$. Da es aber nur eine Lösung von $\hat{\chi}(\omega) = a$ auf der oberen Halbebene gibt, muss für diese Lösung $\omega = -\bar{\omega}$ gelten, also muss ω rein imaginär sein. Die Eindeutigkeit impliziert dann auch sofort die Monotonie von $\hat{\chi}$ entlang der imaginären Achse.

8.4 Wellen im Dielektrikum

Um ein Gefühl für die physikalische Bedeutung dieser Eigenschaften zu gewinnen, betrachten wir nun ein homogenes isotropes Medium mit $\mu = 1$ und $\epsilon = \hat{\epsilon}(\omega) = 1 + \hat{\chi}(\omega)$, unabhängig von \mathbf{x} . Wir definieren den *Brechungsindex* $n(\omega)$ durch

$$n(\omega) = \sqrt{\hat{\epsilon}(\omega)}, \quad \Re n(\omega) > 0. \quad (8.4.31)$$

Wegen (vi) ist $n(\omega)$ stetig in $\Im\omega \geq 0$ und analytisch in $\Im\omega > 0$. Zudem gilt wegen (v) und (iii)

$$\Im n(\omega) \begin{cases} < 0 & \text{falls } \Re\omega < 0 \\ > 0 & \text{falls } \Re\omega > 0 \end{cases} \quad (8.4.32)$$

Ausserdem erfüllt auch $n(\omega) - 1$ die Bedingungen (i)–(iii) von oben, und daher gelten auch für $n(\omega) - 1$ die Kramers-Kronig Relationen (8.3.16).

Wir studieren Wellenlösungen im freien Fall, $\rho_L = 0$, $\mathbf{j}_L = 0$. Die nach der Zeit Fourier-transformierten Felder $\mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega)$ und $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \omega)$ erfüllen dann die Maxwell-Gleichungen (8.2.1) und (8.2.2) in der Form

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} - \frac{i\omega}{c} \mathbf{B} = 0 \quad (8.4.33)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} + \frac{i\omega}{c} \hat{\epsilon}(\omega) \mathbf{E} = 0, \quad (8.4.34)$$

wobei wir benutzt haben, dass $\partial_t \mathbf{B}(\omega, \mathbf{x}) = -i\omega \mathbf{B}(\omega, \mathbf{x})$ und entsprechend für die anderen Felder. Desweiteren haben wir als Beziehung zwischen der elektrischen Verschiebung \mathbf{D} und dem elektrischen Feld \mathbf{E}

$$\mathbf{D}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) + \int ds \chi(t-s) \mathbf{E}(s, \mathbf{x}) \quad (8.4.35)$$

angesetzt; nach Fouriertransformation nach der Zeit gilt dann

$$\mathbf{D}(\omega, \mathbf{x}) = (1 + \hat{\chi}(\omega)) \mathbf{E}(\omega, \mathbf{x}) = \hat{\epsilon}(\omega) \mathbf{E}(\omega, \mathbf{x}), \quad (8.4.36)$$

wobei wir (8.3.12) benutzt haben. Einführen des Wellenvektors \mathbf{k} , d.h. Fouriertransformation bezüglich der Ortskoordinate, führt dann auf die Wellengleichung

$$(\Delta + \mathbf{k}^2) \mathbf{E} = (\Delta + \mathbf{k}^2) \mathbf{B} = 0, \quad (8.4.37)$$

wobei nun

$$\mathbf{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\epsilon}(\omega) \quad (8.4.38)$$

gelten muss. Nach dem, was wir oben erklärt haben, ist das nun eine komplexe Gleichung.

Spezielle Lösungen sind *ebene Wellen*

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad \mathbf{k} = \frac{\omega}{c} n(\omega) \mathbf{e}, \quad (8.4.39)$$

wobei \mathbf{e} ein Einheitsvektor ist, der die Ausbreitungsrichtung der Welle beschreibt. Ausserdem verlangen die Gleichungen (wie zuvor), dass

$$\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{e} = 0, \quad \mathbf{B} = n(\omega) \mathbf{e} \wedge \mathbf{E}. \quad (8.4.40)$$

Ausgedrückt als Funktion von Ort und Zeit ist diese Lösung also von der Form

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \exp \left[i \frac{\omega}{c} \mathbf{e} \cdot \mathbf{x} \Re n(\omega) - \frac{\omega}{c} \mathbf{e} \cdot \mathbf{x} \Im n(\omega) \right]. \quad (8.4.41)$$

Der erste Term ist der übliche Wellenterm, und die Wellenlänge der Welle ist also

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega \Re n(\omega)}. \quad (8.4.42)$$

Der zweite Term im Exponential beschreibt die Dämpfung der Welle, die durch $\Im n(\omega)$ bestimmt wird. Die Kramers-Kronig Relationen (8.3.16) beschreiben daher einen Zusammenhang zwischen diesen beiden Eigenschaften.

Als Anwendung der obigen Analyse wollen wir nun beweisen, dass die Analytizitätseigenschaften von $n(\omega)$ implizieren, dass die *Ausbreitungsgeschwindigkeit* des Feldes immer kleiner als die Lichtgeschwindigkeit c ist. (Andererseits können die Phasengeschwindigkeit v_P und die Gruppengeschwindigkeit v_G ,

$$v_P(\omega) = \frac{\omega}{\Re k} = \frac{c}{\Re n(\omega)} \quad \text{und} \quad v_G(\omega) = c \frac{d\omega}{d\Re n(\omega)} \quad (8.4.43)$$

in bestimmten Frequenzbereichen grösser als c sein!) Wir diskutieren den Fall eines Wellenpakets mit Fortpflanzungsrichtung $\mathbf{e} = (1, 0, 0)$:

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{E}}(\omega) e^{i(kx - \omega t)} d\omega, \quad (8.4.44)$$

wobei $k = \frac{\omega}{c} n(\omega)$ und

$$\hat{\mathbf{E}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(t, \mathbf{0}) e^{i\omega t} dt. \quad (8.4.45)$$

Wir wollen annehmen, dass $\mathbf{E}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ für $t < 0$, d.h. dass das Wellenpaket $\mathbf{x} = 0$ erst zur Zeit $t = 0$ erreicht. Wir wollen zeigen, dass dann $\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$ für $t < \frac{x}{c}$ ($x > 0$).

Unter der Annahme, dass

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} dt |\mathbf{E}(t, \mathbf{0})|^2 < \infty$$

ist $\hat{\mathbf{E}}(\omega)$ analytisch in $\Im\omega > 0$ — vergleiche Eigenschaft (i) von $\hat{\chi}$. Wegen der Parseval Identität (8.3.28) gilt dann für $\sigma > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\mathbf{E}}(\rho + i\sigma)|^2 d\rho = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{E}(t, \mathbf{0})e^{-\sigma t}|^2 dt \leq 2\pi C . \quad (8.4.46)$$

Nun betrachten wir eine reell-wertige Testfunktion $\varphi(t)$, deren Träger $\text{supp } \varphi \subset [0, \infty)$ auf der positiven Halbachse liegt. Wir wollen beweisen, dass

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} dt \bar{\varphi}\left(\frac{x}{c} - t - 2\epsilon\right) \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = 0 , \quad (8.4.47)$$

für jedes $\epsilon > 0$. Da die Testfunktion L^2 ist, gilt mit demselben Argument wie oben, dass $\hat{\varphi}(\omega)$ in der oberen Halbebene analytisch ist, sowie dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\rho + i\sigma)|^2 d\rho \leq C_1 \quad (8.4.48)$$

für alle $\sigma \geq 0$. Ausserdem haben wir wegen der Reellwertigkeit $\overline{\hat{\varphi}(-\omega)} = \hat{\varphi}(\omega)$. Mit der Parseval'schen Identität erhalten wir dann für (8.4.47)

$$S = \int d\omega e^{i\omega\left(\frac{x}{c} - 2\epsilon\right)} \overline{\hat{\varphi}(-\omega)} \cdot \hat{\mathbf{E}}(\omega) e^{ikx} = \int d\omega \hat{\mathbf{E}}(\omega) \hat{\varphi}(\omega) e^{i\omega\left[(n-1)\frac{x}{c} + 2\epsilon\right]} . \quad (8.4.49)$$

Für $\Im\omega \geq 0$ ist

$$|e^{i\omega(n-1)\frac{x}{c}}| \leq e^{-\Im[\omega(n-1)]\frac{x}{c}} , \quad \Im[\omega(n(\omega) - 1)] = \Im\omega \cdot (\Re n(\omega) - 1) + \Re\omega \cdot \Im n(\omega) . \quad (8.4.50)$$

Wegen (8.4.32) ist der zweite Term in $\Im[\omega(n(\omega) - 1)]$ immer positiv. Wegen (ii) — angewendet auf $n(\omega) - 1$ — kann der erste Term für hinreichend grosse $|\omega|$ wie

$$(\Re n(\omega) - 1) \leq \epsilon \quad (8.4.51)$$

abgeschätzt werden kann. Also gilt dann für $x > 0$ und hinreichend grosse $|\omega|$

$$|e^{i\omega\left[(n-1)\frac{x}{c} + 2\epsilon\right]}| \leq e^{\Im\omega \cdot \epsilon - \Im\omega \cdot 2\epsilon} = e^{-\Im\omega \cdot \epsilon} . \quad (8.4.52)$$

In (8.4.49) kann daher der Integrationsweg beliebig weit parallel nach $\Im\omega = \sigma > 0$ verschoben werden. Dort ist S durch

$$S \leq e^{-\sigma\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\mathbf{E}}(\rho + i\sigma)| |\hat{\varphi}(\rho + i\sigma)| \quad (8.4.53)$$

beschränkt. Das Integral konvergiert nach (8.4.46) und (8.4.48), sowie unter Benutzung der Schwarz'schen Ungleichung (uniform in σ). Die Behauptung folgt dann im Limes $\sigma \rightarrow \infty$.

8.5 Erhaltungssätze

Die obigen Maxwell Gleichungen implizieren wiederum die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho_L}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_L = 0. \quad (8.5.1)$$

Die Erhaltungssätze für Energie, Impuls und Drehimpuls lassen sich grundsätzlich nicht durch die mittleren Felder ausdrücken, da diese Erhaltungsgrößen in den Feldern nicht linear sind (und der Mittelwert eines Produktes zweier Felder nicht das Produkt der Mittelwerte ist). Dennoch gibt es ein Analogon zum Energiesatz (3.6.13). Definieren wir nämlich den Poynting Vektor in Materie als

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi k} \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}, \quad (8.5.2)$$

dann folgt aus den (makroskopischen) Maxwell Gleichungen

$$\frac{1}{4\pi k} \left(\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) + \operatorname{div} \mathbf{S} + \mathbf{j}_L \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (8.5.3)$$

Der erste Term lässt sich aber nun nur unter sehr speziellen Bedingungen als zeitliche Ableitung einer Energiedichte schreiben; zum Beispiel, falls die Beziehung zwischen \mathbf{D} und \mathbf{E} bzw. zwischen \mathbf{B} und \mathbf{H} die obige einfache (skalare) Form besitzen, dann ist

$$\frac{1}{4\pi k} \left(\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u = \frac{1}{8\pi k} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}). \quad (8.5.4)$$

Damit dies auch noch im anisotropen Fall gilt, müssen die Tensoren ϵ_{ik} und μ_{ik} symmetrisch sein. In diesem beschränkten Rahmen spielt der Energiesatz (8.5.3) eine nützliche Rolle.

8.6 Stetigkeitsbedingungen an Grenzflächen

An Grenzflächen zwischen zwei Medien sind die Felder \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} und \mathbf{H} im Allgemeinen unstetig. Stetigkeitsbedingungen für gewisse Komponenten folgen aber aus den Feldgleichungen unter der Annahme, dass diese Felder und ihre zeitlichen Ableitungen beschränkt sind. Im folgenden bezeichnen wir mit \parallel und \perp die Komponenten der Felder parallel und senkrecht zur Grenzfläche F . Wie schon zuvor folgt nun aus den (makroskopischen) Maxwell Gleichungen, dass

$$\mathbf{B}_\perp \quad \text{und} \quad \mathbf{E}_\parallel \quad (8.6.1)$$

stets stetig sind. [Dies zeigt man mit genau denselben Methoden wie in Kapitel 2.3.3. bzw. 3.3.2.] Falls F keine flächenhaften Ladungen bzw. Ströme trägt ist weiterhin auch

$$\mathbf{H}_\parallel \quad \text{und} \quad \mathbf{D}_\perp \quad (8.6.2)$$

stetig. Insbesondere ist dann auch die Normalkomponente des Poynting Vektors

$$\mathbf{S}_\perp = \frac{c}{4\pi k} (\mathbf{E}_\parallel \wedge \mathbf{H}_\parallel) \quad (8.6.3)$$

an F stetig. In diesem Sinn ist (8.5.2) eine vernünftige Fortsetzung der Energiestromdichte vom Vakuum in das Innere eines materiellen Mediums.

9 Anwendungen

In diesem Kapitel wollen wir einige Anwendungen der makroskopischen Maxwell Gleichungen behandeln.

9.1 Reflexion und Brechung

Zunächst behandeln wir den Fall von homogenen Dielektrika, für die $\epsilon > 0$, $\mu = 1$ und $\sigma = 0$ gilt. Die Lösungen der Feldgleichungen für $\rho_L = 0$ und $\mathbf{j}_L = 0$ sind die ebenen Wellen

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, & \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{k} &= 0 \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= n \mathbf{e} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{x}, t), & \mathbf{k} &= n \frac{\omega}{c} \mathbf{e} .\end{aligned}\tag{9.1.1}$$

Hier ist \mathbf{e} der Einheitsvektor in Fortpflanzungsrichtung und

$$n = \sqrt{\epsilon} \quad \text{der Brechungsindex.}\tag{9.1.2}$$

Die Intensität der Welle ist das Zeitmittel von $|\mathbf{S}|$ und lässt sich wie zuvor in Kapitel 4.1 durch komplexe Felder darstellen

$$I = \frac{c}{8\pi k} n(\mathbf{E}, \mathbf{E}) = \frac{c}{8\pi k n}(\mathbf{B}, \mathbf{B}).\tag{9.1.3}$$

Wir betrachten nun die Reflexion und Brechung einer einfallenden ebenen Welle an der ebenen Grenzfläche F zwischen zwei homogenen Dielektrika: Wir bezeichnen die drei

Figure 3: Skizze der Reflexion und Brechung. Die Brechungsindizes $n_1 = n_2$, aber $n_3 \neq n_1$. Die Winkel zur y -Achse werden mit α_i bezeichnet.

Wellen mit den Indizes 1, 2, 3, und mit x, y, z die Koordinatenachsen. Die Randbedingung für jede stetige Komponente A ist

$$A_1 e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}} + A_2 e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}} = A_3 e^{i\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{x}}, \quad (9.1.4)$$

wobei \mathbf{x} ein beliebiger Punkt auf F ist. Daraus folgt, dass

$$\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \text{ und } \mathbf{k}_3 \text{ haben alle die gleiche Projektion auf } F, \quad (9.1.5)$$

$$A_1 + A_2 = A_3. \quad (9.1.6)$$

Die erste Bedingung (9.1.5) impliziert, dass die drei Wellenvektoren in einer Ebene N senkrecht zu F liegen (Einfallsebene; im vorliegenden Beispiel in der $x - y$ Ebene), und dass gilt

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 = n_3 \sin \alpha_3. \quad (9.1.7)$$

Im gegebenen Beispiel ist $n_1 = n_2$, und daher $\alpha_1 = \alpha_2$. Dies ist das Gesetz von Snellius der Reflexion und Brechung der geometrischen Optik. Darüber hinaus liefert (9.1.6) auch die Intensitätsverhältnisse. Wir betrachten zwei Polarisationsfälle, aus denen der allgemeine Fall durch Superposition entsteht.

9.1.1 Transversales elektrisches Feld (TE)

In diesem Fall ist die Polarisation von \mathbf{E} so dass \mathbf{E} senkrecht auf der Einfallsebene N steht, d.h. \mathbf{E} hat nur eine z -Komponente, die wir durch E_i , $i = 1, 2, 3$ bezeichnen. (Also ist $E_z^{(i)} = E_i$.) Wie in Kapitel 7.4 erklärt sind die stetigen (nicht-verschwindenden) Feldkomponenten dann neben E_z gerade $H_x = B_x = n e_y E_z$ und $B_y = H_y = -n e_x E_z$. Wir erhalten damit die drei Identitäten

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 &= E_3 \\ -n_1 E_1 \cos \alpha_1 + n_2 E_2 \cos \alpha_2 &= -n_3 E_3 \cos \alpha_3 \\ -n_1 E_1 \sin \alpha_1 - n_2 E_2 \sin \alpha_2 &= -n_3 E_3 \sin \alpha_3. \end{aligned} \quad (9.1.8)$$

Da $n_1 = n_2$ und $\alpha_1 = \alpha_2$ wird die zweite Gleichung einfach

$$E_1 - E_2 = E_3 \frac{n_3 \cos \alpha_3}{n_1 \cos \alpha_1}. \quad (9.1.9)$$

Einsetzen der ersten Gleichung in die dritte Gleichung führt andererseits zu der Identität

$$\frac{n_3}{n_1} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_3}. \quad (9.1.10)$$

Kombination von (9.1.9) mit der ersten Gleichung führt daher zu

$$E_1 = \frac{E_3}{2} \left(1 + \frac{n_3 \cos \alpha_3}{n_1 \cos \alpha_1} \right) = \frac{E_3}{2} \left(1 + \frac{\sin \alpha_1 \cos \alpha_3}{\sin \alpha_3 \cos \alpha_1} \right), \quad (9.1.11)$$

und entsprechend

$$E_2 = \frac{E_3}{2} \left(1 - \frac{n_3 \cos \alpha_3}{n_1 \cos \alpha_1} \right) = \frac{E_3}{2} \left(1 - \frac{\sin \alpha_1 \cos \alpha_3}{\sin \alpha_3 \cos \alpha_1} \right). \quad (9.1.12)$$

[Eine Komponente (z.B. E_3) bleibt wegen der Homogenität des Problems unbestimmt.]
Für die Intensitäten folgt aus den obigen Gleichungen

$$\begin{aligned} (I_1 - I_2) \cos \alpha_1 &= \frac{c}{8\pi k} n_1 (\bar{\mathbf{E}}_1 + \bar{\mathbf{E}}_2) (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cos \alpha_1 \\ &= \frac{c}{8\pi k} n_3 |\mathbf{E}_3|^2 \cos \alpha_3 = I_3 \cos \alpha_3, \end{aligned} \quad (9.1.13)$$

und daher

$$I_1 \cos \alpha_1 = I_2 \cos \alpha_2 + I_3 \cos \alpha_3, \quad (9.1.14)$$

entsprechend der Stetigkeit des Energieflusses in der y -Richtung (8.6.3). Für das Reflexionsvermögen erhält man

$$\frac{I_2}{I_1} = \left(\frac{E_2}{E_1} \right)^2, \quad (9.1.15)$$

wobei

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\sin \alpha_3 \cos \alpha_1 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_3}{\sin \alpha_3 \cos \alpha_1 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_3} = \frac{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_3)}. \quad (9.1.16)$$

9.1.2 Transversales magnetisches Feld (TM)

In diesem Fall ist die Polarisation von \mathbf{B} so dass \mathbf{B} senkrecht auf der Einfallsebene N steht, d.h. \mathbf{B} hat nur eine z -Komponente, die wir durch B_i , $i = 1, 2, 3$ bezeichnen. (Also ist $B_z^{(i)} = B_i$.) Wie in Kapitel 7.4 erklärt sind die stetigen (nicht-verschwindenden) Feldkomponenten dann neben $H_z = B_z$ gerade E_x und D_y . Da $\mathbf{E} = -\frac{1}{n}(\mathbf{e} \wedge \mathbf{B})$ ist die Analyse völlig zu dem vorigen Fall analog, vorausgesetzt man ersetzt $\mathbf{E} \mapsto \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \mapsto -\mathbf{E}$ und $n \mapsto 1/n$. Insbesondere erhalten wir daher die Identitäten

$$B_1 = \frac{B_3}{2} \left(1 + \frac{n_1 \cos \alpha_3}{n_3 \cos \alpha_1} \right) = \frac{B_3}{2} \left(1 + \frac{\sin \alpha_3 \cos \alpha_3}{\sin \alpha_1 \cos \alpha_1} \right), \quad (9.1.17)$$

und

$$B_2 = \frac{B_3}{2} \left(1 - \frac{n_1 \cos \alpha_3}{n_3 \cos \alpha_1} \right) = \frac{B_3}{2} \left(1 - \frac{\sin \alpha_3 \cos \alpha_3}{\sin \alpha_1 \cos \alpha_1} \right). \quad (9.1.18)$$

Daraus berechnet man, dass

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{\sin \alpha_1 \cos \alpha_1 - \sin \alpha_3 \cos \alpha_3}{\sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + \sin \alpha_3 \cos \alpha_3} = \frac{\tan(\alpha_1 - \alpha_3)}{\tan(\alpha_1 + \alpha_3)}, \quad (9.1.19)$$

sowie

$$\frac{I_2}{I_1} = \left(\frac{B_2}{B_1} \right)^2. \quad (9.1.20)$$

Die Gleichungen (9.1.11,9.1.12) bzw. (9.1.17,9.1.18) sind die sogenannten Fresnelschen Formeln, die von Fresnel mit einer mechanischen Lichttheorie hergeleitet wurden.

9.2 Diskussion

Verschiedene weitere Spezialfälle verdienen besondere Erwähnung.

9.2.1 Senkrechte Inzidenz

Im Limes $\alpha_1 \rightarrow 0$ folgt aus der ersten Identität von (9.1.11, 9.1.12), dass im TE-Fall

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{n_1 - n_3}{n_1 + n_3}. \quad (9.2.21)$$

Im TM-Fall gilt entsprechend

$$\frac{B_2}{B_1} = -\frac{n_1 - n_3}{n_1 + n_3}, \quad (9.2.22)$$

und von daher ist das Reflexionsvermögen in beiden Fällen gleich

$$\frac{I_2}{I_1} = \left(\frac{n_1 - n_3}{n_1 + n_3} \right)^2. \quad (9.2.23)$$

Dieses Ergebnis ist invariant unter der Vertauschung der beiden Medien ($n_1 \leftrightarrow n_3$).

9.2.2 Brewster Winkel

Der Brewster Winkel ist der Einfallswinkel $\alpha_1 = \alpha_B$, für den der reflektierte Strahl senkrecht auf dem gebrochenen Strahl steht: $\alpha_1 + \alpha_3 = \pi/2$. Dann ist im TM-Fall wegen (9.1.19) $B_2 = 0$, d.h. es gibt keinen reflektierten Strahl! Am Brewster Winkel ist also für eine beliebige einfallende Welle der reflektierte Strahl linear (TE) polarisiert.

9.2.3 Totalreflexion

Betrachte den Fall, dass $n_3 < n_1$. Der Grenzwinkel $\alpha_1 = \alpha_T$ der Totalreflexion ist der Einfallswinkel, für den $\alpha_3 = \pi/2$,

$$\sin \alpha_T = \frac{n_3}{n_1}. \quad (9.2.24)$$

Im Bereich $\alpha_1 > \alpha_T$ hat die Gleichung

$$\sin \alpha_3 = \frac{n_1}{n_3} \sin \alpha_1 \quad (> 1) \quad (9.2.25)$$

nur komplexe Lösungen, nämlich

$$\alpha_3 = \frac{\pi}{2} + i\gamma, \quad (9.2.26)$$

wobei

$$\sin \alpha_3 = \cosh \gamma = \frac{n_1}{n_3} \sin \alpha_1. \quad (9.2.27)$$

Hierbei ist das Vorzeichen von γ unbestimmt. Der Wellenvektor \mathbf{k}_3 ist dann komplex

$$\mathbf{k}_3 = k_3(\sin \alpha_3, -\cos \alpha_3, 0) = k_3(\cosh \gamma, i \sinh \gamma, 0), \quad (9.2.28)$$

($k_3 = n_3 \omega / c$), und damit ist die Phase der gebrochenen Welle

$$e^{i(\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{x} - \omega t)} = e^{i(k_3 x \cosh \gamma - \omega t)} e^{-k_3 y \sinh \gamma}. \quad (9.2.29)$$

Die Welle ist daher also für $y \rightarrow -\infty$ exponentiell gedämpft, falls wir die Lösung $\gamma < 0$ wählen — die andere Lösung entspricht einer unphysikalischen Randbedingung bei $y = -\infty$. Insbesondere kann die gebrochene Welle also keine Energie in der y -Richtung wegtragen. So wird zum Beispiel im TE-Fall

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\sin(\pi/2 - \alpha_1 + i\gamma)}{\sin(\pi/2 + \alpha_1 + i\gamma)} = \frac{\cos \alpha_1 \cosh \gamma + i \sin \alpha_1 \sinh \gamma}{\cos \alpha_1 \cosh \gamma - i \sin \alpha_1 \sinh \gamma}. \quad (9.2.30)$$

Dieser Ausdruck ist vom Betrag 1, und daher ist also $I_1 = I_2$: Totalreflexion. (Skizziere den Intensitätsverlauf für $n_3 > n_1$ und $n_3 < n_1$.)

9.3 Das Feld in einem Leiter

Die Verknüpfungskonstanten in einem Leiter können gut dadurch beschrieben werden, dass $\mu = 1$, und dass ϵ und σ frequenzunabhängig sind. [Diese Annahmen treffen bei tiefen Temperaturen bis in den Mikrowellenbereich zu.] In diesem Fall wird die letzte Maxwell Gleichung in (8.2.2) gerade zu

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c} \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = \frac{4\pi k \sigma}{c} \mathbf{E}. \quad (9.3.1)$$

Für ein freies Feld der Form $\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = e^{-i\omega t} \mathbf{E}(\mathbf{x})$ ist

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = -i\omega \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) \quad (9.3.2)$$

und damit wird aus (9.3.1) die Gleichung

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} + i \frac{\omega}{c} \left(\epsilon + i \frac{4\pi k \sigma}{\omega} \right) \mathbf{E} = \operatorname{rot} \mathbf{B} + i \frac{\omega}{c} \epsilon(\omega) \mathbf{E} = 0, \quad (9.3.3)$$

wobei

$$\epsilon(\omega) = \epsilon + i \frac{4\pi k \sigma}{\omega}. \quad (9.3.4)$$

Der zugehörige Brechungsindex $n = \sqrt{\epsilon(\omega)}$ ist dann

$$\left. \begin{array}{l} \Re(n) \\ \Im(n) \end{array} \right\} = \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{\epsilon^2 + \frac{(4\pi k \sigma)^2}{\omega^2}} \pm \epsilon \right) \right]^{1/2}. \quad (9.3.5)$$

[Man rechnet direkt nach, dass $(\Re(n) + i\Im(n))^2 = \epsilon(\omega)$.] Nach (9.1.1) ist

$$\mathbf{B} = n \mathbf{e} \wedge \mathbf{E} , \quad \text{wobei nun} \quad n = |n| e^{i\varphi} . \quad (9.3.6)$$

Der Betrag von n , $|n|$ bestimmt daher das Amplitudenverhältnis von \mathbf{E} und \mathbf{B} , während φ die Phasenverschiebung beschreibt.

Im Spezialfall eines guten Leiters, also für

$$\frac{\sigma}{\omega} \gg \epsilon \quad (\text{guter Leiter}) \quad (9.3.7)$$

ist der Brechungsindex n von der Form

$$n = (1 + i) \sqrt{\frac{4\pi k \sigma}{2\omega}} , \quad |n| = \sqrt{\frac{4\pi k \sigma}{\omega}} , \quad \varphi = \frac{\pi}{4} . \quad (9.3.8)$$

In diesem Fall ist also das \mathbf{B} -Feld wesentlich stärker als das \mathbf{E} -Feld. Zum Beispiel gilt dann für ein transversal elektrisches Feld gemäss (9.1.11)

$$\frac{E}{E_0} = \frac{2}{\left(1 + n \frac{\cos \alpha_3}{\cos \alpha_1}\right)} \sim \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\omega}{\sigma}}\right) , \quad (9.3.9)$$

wobei der Bereich (1) und (2) der Aussenraum ist, wo $n_1 = 1$ (und wir $E_1 \equiv E_0$ gesetzt haben). Entsprechend finden wir im transversal magnetischen Fall gemäss (9.1.17)

$$\frac{B}{B_0} = \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{n} \frac{\cos \alpha_3}{\cos \alpha_1}\right)} \sim \mathcal{O}(1) . \quad (9.3.10)$$

Im Innenraum fällt das elektrische Feld exponentiell ab. In der Tat gilt für die ebene Welle (8.4.39)

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_0 \exp\left(i \frac{\omega}{c} n(\omega) k \mathbf{e} \cdot \mathbf{x}\right) \quad (9.3.11)$$

und da $n(\omega)$ einen nicht-trivialen Imaginärteil hat mit einer Eindringtiefe von

$$\delta = \frac{c}{\omega} \frac{1}{\Im n(\omega)} = \sqrt{\frac{2c^2}{4\pi k \sigma \omega}} . \quad (9.3.12)$$

Für grosse Frequenzen (mit $\omega \ll \sigma$, so dass (9.3.7) weiterhin gilt) ist δ klein — das ist der sogenannte *Skinneffekt*. Für $\omega \rightarrow 0$ (statischer Grenzfall) divergiert zwar δ , aber dafür verschwindet auch E gemäss (9.3.9). Die Analyse für \mathbf{B} ist ähnlich; der einzige wesentliche Unterschied ist, dass für $\omega \rightarrow 0$ das Magnetfeld wegen (9.3.10) tatsächlich eindringt.

9.4 Das Feld in einem Supraleiter

In einem Supraleiter ist $\sigma = \infty$, und die Ladungsträger (mit Masse m und Ladung e) folgen derselben Bewegungsgleichung wie im Vakuum

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{b} \right) . \quad (9.4.13)$$

Das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t)$ ist hier definiert durch

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t) \quad (9.4.14)$$

und damit ist die Beschleunigung

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \frac{\mathbf{v}^2}{2} - \mathbf{v} \wedge \text{rot} \mathbf{v} . \quad (9.4.15)$$

Nun betrachten wir die Rotation von (9.4.13)

$$\begin{aligned} m \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \mathbf{v} - m \text{rot}(\mathbf{v} \wedge \text{rot} \mathbf{v}) &= e \text{rot} \mathbf{E} + \frac{e}{c} \text{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \\ &= -\frac{e}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} + \frac{e}{c} \text{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \end{aligned} \quad (9.4.16)$$

wobei wir benutzt haben, dass $\text{rot grad} = 0$ sowie $\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$. Nun definieren wir $\boldsymbol{\omega}$ durch

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot} \mathbf{v} + \frac{e}{mc} \mathbf{B} , \quad (9.4.17)$$

wobei $\boldsymbol{\omega}$ die Wirbeldichte $\text{rot} \mathbf{v}'$ in einem mit der Larmorfrequenz $-(e/2mc)\mathbf{B}$ rotierenden Bezugssystem ist, für das gilt $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + (e/2mc)\mathbf{B} \wedge \mathbf{x}$. Mit dieser Definition können wir nun (9.4.16) als

$$\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\omega} = \text{rot}(\mathbf{v} \wedge \text{rot} \boldsymbol{\omega}) \quad (9.4.18)$$

schreiben. In einem Supraleiter vom Typ I gilt

$$\boldsymbol{\omega} = 0 , \quad (9.4.19)$$

was natürlich eine Lösung beschreibt. Weiterhin ist die Dichte der Ladungsträger n konstant. Damit gilt für die Stromdichte $\mathbf{j} = nev$ — multipliziere (9.4.17) mit ne

$$\text{rot} \mathbf{j} + \frac{ne^2}{mc} \mathbf{B} = 0 . \quad (9.4.20)$$

Das ist die sogenannte *London Gleichung*.

Im stationären Fall ist $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$, und die inhomogene Maxwell Gleichung impliziert, dass

$$\text{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi k}{c} \mathbf{j} . \quad (9.4.21)$$

Da $\operatorname{div} \mathbf{j} = \operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ folgt dann

$$\Delta \mathbf{j} = \Lambda^{-2} \mathbf{j}, \quad \Delta \mathbf{B} = \Lambda^{-2} \mathbf{B}, \quad (9.4.22)$$

wobei wir $\operatorname{rot} \operatorname{rot} = \operatorname{grad} \operatorname{div} - \Delta$ benutzt haben und

$$\Lambda = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi k n e^2}} \quad (9.4.23)$$

die *London-Eindringtiefe* ist. Zum Beispiel sind das Analogon der ebenen Wellenlösungen nun von der Form

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_0 e^{-\frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}}{\Lambda}}, \quad \mathbf{j}(\mathbf{x}) = \mathbf{j}_0 e^{-\frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}}{\Lambda}}, \quad (9.4.24)$$

wobei \mathbf{e} ein Einheitsvektor ist und \mathbf{j}_0 und \mathbf{B}_0 vermöge

$$\mathbf{j}_0 = -\frac{c}{4\pi k \Lambda} \mathbf{e} \wedge \mathbf{B}_0 \quad (9.4.25)$$

zusammenhängen. Diese Lösungen fallen exponentiell ab, und dringen nur über eine Länge Λ in den Supraleiter ein (*Meissner-Ochsenfeld-Effekt*). Hierbei schirmt die Stromdichte \mathbf{j} , die in der Nähe des Randes lokalisiert ist, das äussere \mathbf{B} -Feld nach innen ab. Gemäss der Analyse in Kapitel 6.2.2. übt das an der Oberfläche lokalisierte \mathbf{B} -Feld einen Druck auf den Supraleiter aus — dies führt zur *magnetischen Levitation*.

9.5 Streuung von Licht an Materie

Elektromagnetische Strahlung breitet sich im Vakuum geradlinig aus. In inhomogenen Materialien kann jedoch Streuung auftreten. Wir betrachten den Fall, wo die Dielektrizitätskonstante ortsabhängig ist. Dazu entwickeln wir $\epsilon(\mathbf{x}, \omega)$ um einen festen (x -unabhängigen) Wert $\epsilon_0 = \epsilon_0(\omega)$ herum,

$$\epsilon(\mathbf{x}, \omega) = \epsilon_0(\omega) + \epsilon_1(\mathbf{x}, \omega). \quad (9.5.26)$$

Ausserdem sei $\mu = 1$. Wir nehmen an, dass ϵ_1 klein relativ zu ϵ_0 ist und machen eine formale Störungsrechnung. Dazu schreiben wir

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 + \dots, \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \mathbf{D}_0 + \mathbf{D}_1 + \dots, \quad (9.5.27)$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_0 &= \epsilon_0 \mathbf{E}_0 \\ \mathbf{D}_1 &= \epsilon_0 \mathbf{E}_1 + \epsilon_1 \mathbf{E}_0, \end{aligned} \quad (9.5.28)$$

u.s.w. Typischerweise ist \mathbf{E}_0 und \mathbf{B}_0 eine einfallende ebene Welle

$$\mathbf{E}_0 = \mathcal{E}_0 e^{i(k\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad k = \frac{\omega}{c} n, \quad n = \sqrt{\epsilon_0}, \quad (9.5.29)$$

wobei $\mathcal{E}_0 \cdot \mathbf{e} = 0$. Die Formel für das Magnetfeld ist einfach $\mathbf{B}_0 = \mathbf{e} \wedge \mathbf{E}$. Die makroskopischen Maxwell Gleichungen lauten in erster Ordnung — wir nehmen an, dass keine Ladungen oder Ströme vorhanden sind

$$\operatorname{div} \mathbf{B}_1 = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}_1 - \frac{i\omega}{c} \mathbf{B}_1 = 0 \quad (9.5.30)$$

sowie

$$\epsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E}_1 = -\operatorname{div}(\epsilon_1 \mathbf{E}_0), \quad \operatorname{rot} \mathbf{B}_1 + \frac{i\omega}{c} \epsilon_0 \mathbf{E}_1 = -\frac{i\omega}{c} \epsilon_1 \mathbf{E}_0. \quad (9.5.31)$$

[Wir haben hier angenommen, dass die Zeitabhängigkeit aller separaten Störungsterme gleich $e^{-i\omega t}$ ist.]

Diese Gleichungen sind jetzt formal identisch mit den Maxwell Gleichungen im Vakuum, wobei wir die Felder ersetzen durch $\mathbf{E} \mapsto \epsilon_0 \mathbf{E}_1$, $\mathbf{B} \mapsto n \mathbf{B}_1$, die Lichtgeschwindigkeit $c \mapsto c/n$ und als Quellen die Terme

$$\rho = -\frac{1}{4\pi k} \operatorname{div}(\epsilon_1 \mathbf{E}_0), \quad \mathbf{j} = -\frac{1}{4\pi k} i\omega \epsilon_1 \mathbf{E}_0 \quad (9.5.32)$$

haben. (Beachte, dass diese ‘Quellen’ der Kontinuitätsgleichung genügen.) Also können wir die Resultate aus Kapitel 4 benutzen: die retardierte Lösung — wir betrachten die Wellenzone — ist (siehe (4.4.15))

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \mathbf{E}_1 &= -\frac{i\omega n}{c} \mathbf{e} \wedge (\mathbf{e} \wedge \mathbf{A}), \\ \mathbf{A} &= -\frac{i\omega n}{4\pi c r} \int d^3 \mathbf{y} \epsilon_1(\mathbf{y}) \mathcal{E}_0 e^{i\mathbf{k} \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{y}} e^{-i\omega(t - \frac{n}{c} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}. \end{aligned} \quad (9.5.33)$$

Nun entwickeln wir $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = r - \mathbf{e} \cdot \mathbf{y}$, wobei \mathbf{e} die Richtung von \mathbf{x} ist, und erhalten damit

$$\mathbf{E}_1 = -\mathbf{e} \wedge (\mathbf{e} \wedge \mathcal{E}_0) \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{4\pi r} \int d^3 \mathbf{y} \epsilon_1(\mathbf{y}) e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{e} - \mathbf{e}_0) \cdot \mathbf{y}}. \quad (9.5.34)$$

Das ist die sogenannte Born’sche Näherung. Der Polarisationsanteil \mathcal{E} (wobei \mathcal{E} orthogonal zu \mathbf{e} ist) ergibt sich dann einfach zu

$$\mathcal{E} \cdot \mathbf{E}_1 = (\mathcal{E} \cdot \mathcal{E}_0) \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{4\pi r} \int d^3 \mathbf{y} \epsilon_1(\mathbf{y}) e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{e} - \mathbf{e}_0) \cdot \mathbf{y}}. \quad (9.5.35)$$

Wir wollen nun den differentiellen Streuquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ für die Streuung bestimmen, wobei die einfallende Welle sich in Richtung \mathbf{e}_0 ausbreitet und Polarisation \mathcal{E}_0 hat, während die auslaufende Welle in Richtung \mathbf{e} läuft und Polarisation \mathcal{E} hat. Der Streuquerschnitt berechnet sich aus dem Vergleich des einfallenden und auslaufenden Energiestroms

$$\frac{c}{2} |\mathcal{E}_0|^2 d\sigma = \frac{c}{2} |\mathcal{E} \cdot \mathbf{E}_1|^2 r^2 d\Omega. \quad (9.5.36)$$

Mit (9.5.35) folgt damit die sogenannte Rayleigh Formel

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 \frac{(\mathcal{E} \cdot \mathcal{E}_0)^2}{|\mathcal{E}_0|^2} \mathcal{F}(\mathbf{q}) , \quad (9.5.37)$$

wobei $\mathcal{F}(\mathbf{q})$ der Strukturfaktor ist

$$\mathcal{F}(\mathbf{q}) = \left| \int d^3\mathbf{y} \epsilon_1(\mathbf{y}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}} \right|^2 , \quad \mathbf{q} = k(\mathbf{e} - \mathbf{e}_0) . \quad (9.5.38)$$

Für den Fall der Streuung von Licht an Luft kann man $\mathcal{F}(\mathbf{q})$ als ungefähr unabhängig von \mathbf{q} annehmen. Dann folgt aus (9.5.37), dass der Streuquerschnitt zur vierten Potenz der Frequenz proportional ist. Blaues Licht wird also viel stärker gestreut als rotes Licht — dieser Umstand erklärt, warum der Himmel am Tag (wenn man im wesentlichen nur das gestreute Sonnenlicht sieht) blau erscheint, und warum der Sonnenuntergang (wenn man dasjenige Licht sieht, das nicht gestreut wurde) rot ist.

A Identitäten der Vektoranalysis

In diesem Appendix sammeln wir oft benutzte Identitäten der Vektoranalysis. Sie können mit standard Methoden abgeleitet werden.

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) &= \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \\ \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} \\ (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \\ \text{rot grad } \psi &= 0 \\ \text{div}(\text{rot } \mathbf{A}) &= 0 \\ \text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}) &= \text{grad}(\text{div } \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} \\ \text{div}(\psi \mathbf{A}) &= \mathbf{A} \cdot \text{grad } \psi + \psi \text{div } \mathbf{A} \\ \text{rot}(\psi \mathbf{A}) &= (\text{grad } \psi) \wedge \mathbf{A} + \psi \text{rot } \mathbf{A} \\ \text{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} \wedge \text{rot } \mathbf{B} + \mathbf{B} \wedge \text{rot } \mathbf{A} \\ \text{div}(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) &= \mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{B}.\end{aligned}$$

References

- [J] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Wiley & Sons, New York (1975). [Das ‘klassische’ Lehrbuch.]
- [BS] R. Becker und F. Sauter, *Theorie der Elektrizität, Band 1*, Teubner, Stuttgart (1973). [Vielleicht etwas altmodisch.]
- [Sch] M. Schwartz, *Principles of Electrodynamics*, McGraw-Hill, New York (1972). [Spezielle Relativitätstheorie wird nicht diskutiert. Ansonsten aber nicht schlecht.]
- [W] R.K. Wangsness, *Electromagnetic Fields*, John Wiley & Sons, New York (1979).
- [F] R. Fließbach, *Elektrodynamik*, Spektrum Verlag, Heidelberg (1997). [Behandelt nur 1. Hälfte der Vorlesung, diese aber relativ ausführlich.]
- [S] F. Scheck, *Theoretische Physik 3, Klassische Feldtheorie*, Springer, Berlin (2004).
- [EW] G.F.R. Ellis, R.M. Williams, *Flat and curved Space-times*, Clarendon Press, Oxford (1994).