Elektrodynamik
Serie 3

Aufgabe 3.1 Laplace Operator

a) In Polarkoordinaten $(r,\,\phi)$ ist der Laplace Operator gegeben durch:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \tag{1}$$

b) In Kugelkoordinaten $(r,\,\theta,\,\phi)$ ist der Laplace Operator gegeben durch:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \tag{2}$$

Leite die Gleichungen (1) und (2) her.

Aufgabe 3.2 Kapazitäten

Die Kapazität eines Kondensators ist definiert durch

$$C = \frac{|Q|}{|\Delta\Phi|}, \tag{3}$$

wobei Q die Ladung und $\Delta\Phi$ die Potentialdifferentz ist. Leite die Kapazitäten folgender Kondensatoren her:

a) Kugelkondensator (zwei konzentrische Kugelschalen mit den Radien r_1 und r_2):

$$C = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}. \tag{4}$$

b) Zylinderkondensator (zwei koaxiale Zylinderoberflächen der Länge l und den Radien r_1 und r_2, wobei $l >> r_1, r_2$ gilt):

$$C = \frac{l}{2\ln(r_2/r_1)}. \tag{5}$$

Tipp: Die Potentialdifferenz $\Delta\Phi$ kann man als Linienintegral des elektrischen Feldes berechnen.

Aufgabe 3.3 Elektrische Energie einer geladenen Kugel

Betrachte eine homogen geladene Kugel (Radius R) mit Gesamtladung Q. Berechne die Feldenergie des davon erzeugten elektrischen Feldes.
Tipp: Die Energiedichte eines elektrischen Feldes $\mathbf{E}$ ist $u = \frac{1}{8\pi}|\mathbf{E}|^2$.

Aufgabe 3.4 Ladung in leitender Hohlkugel

a) Eine Punktladung q sitzt am Punkt $\mathbf{a}$ in einer leitenden, ungeladenen und geerdeten Hohl-Kugel mit Radius R ($|\mathbf{a}| < R$). Berechne das Potential und das elektrische Feld im Innenraum der Kugel. Berechne ferner die induzierte Ladungsdichte auf der Kugeloberfläche und zeige, dass die Gesamtladung auf der Kugeloberfläche $-q$ ist. Was sagt der Satz von Gauss nun über das elektrische Feld im Aussenraum der Kugel?

b) Wiederhole die Analyse aus (a) für den Fall, dass die Kugel mit Radius R isoliert und ungeladen ist.

c) Was verändert sich in (b) wenn die Kugel geladen ist (Ladung Q)?

Tipp:

a) Um das richtige Potential im Inneren der Kugel zu finden, kannst Du eine Spiegelladung q' auf die Position $\mathbf{a}'$ setzen.

b) Bestimme erst das elektrische Feld ausserhalb der Kugel. Passe dann das Potential aus (a) der neuen Randbedingung an.