Aufgabe 6.1 Magnetischer Monopol

Der Dirac-Ansatz für das Vektorpotential eines magnetischen Monopols ist

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = g \int_{\mathcal{L}} \frac{d\mathbf{l}' \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} ,$$

wobei das Linienintegral entlang des Dirac-Strings $\mathcal{L}$ zu nehmen ist. Wir betrachten einen Diract-String $\mathcal{L}$, der entlang der negativen z-Achse von $z = -\infty$ nach $z = 0$ liegt.

a.) Berechne $\mathbf{A}$ explizit und zeige, dass die Komponenten des Vektorpotentials in Kugelkoordinaten $A_r = 0$, $A_\theta = 0$ und $A_\phi = \frac{g}{r} \tan \frac{\theta}{2}$ sind.

b.) Zeige, dass das zugehörige Magnetfeld $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$ überall (abgesehen von $\theta = \pi$, auf $\mathcal{L}$) dieselbe Form wie das Coulomb-Feld einer elektrischen Punktladung am Ursprung hat.

Tipps: Benutze bei der Berechnung von $\mathbf{A}$ das lösbare Integral

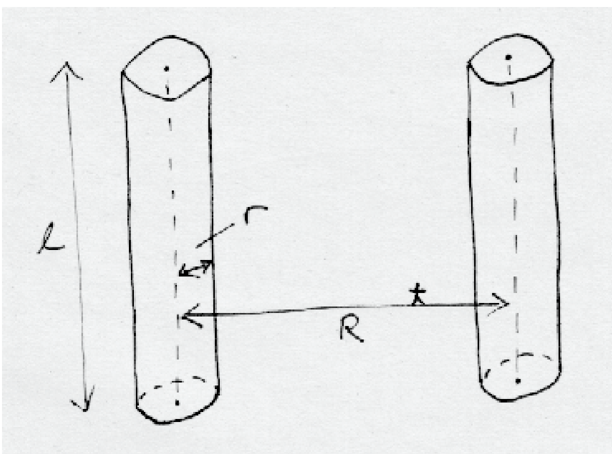
$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}} .$$

Des weiteren gilt für die Umwandlung in sphärischen Koordinaten

$$\nabla \wedge (A_\phi \mathbf{e}_\phi) = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta)\, \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi)\, \mathbf{e}_\theta .$$

Aufgabe 6.2 Selbstinduktivität

Berechne die Selbstinduktivität L zweier paralleler Leiter mit Radius r und Länge ℓ im Abstand R (Siehe Skizze), mit $\ell \gg R \gg r$. In den Leitern fliesse der Strom I, wobei ein Leiter als Hin- und der andere Leiter als Rückleiter dient.



Tipps: Die direkte Anwendung der Formel aus dem Skript ist sehr aufwendig. Einfacher ist das Berechnen des Vektorpotentials eines Drahtes, und daraus anschliessend L mithilfe der potentiellen Energie W. Zur Berechnung von $\vec{A}(\vec{r})$ bieten sich zylindrischen Koordinaten an. In diesen gilt

$$\nabla \wedge \left(A_z \vec{e}_z\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi}\vec{e}_\rho - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\vec{e}_\phi \, .$$

Nimm ausserdem an, dass die Stromdichte jeweils über den ganzen Durchmesser homogen ist. (*Für Interessierte: Diese Annahme ist nur im Falle von Gleichstrom gerechtfertigt. Im Wechselstrom-Regime bei hohen Frequenzen fliesst der Strom stattdessen nur auf der Oberfläche des Leiters. Was ändert sich für L?*)

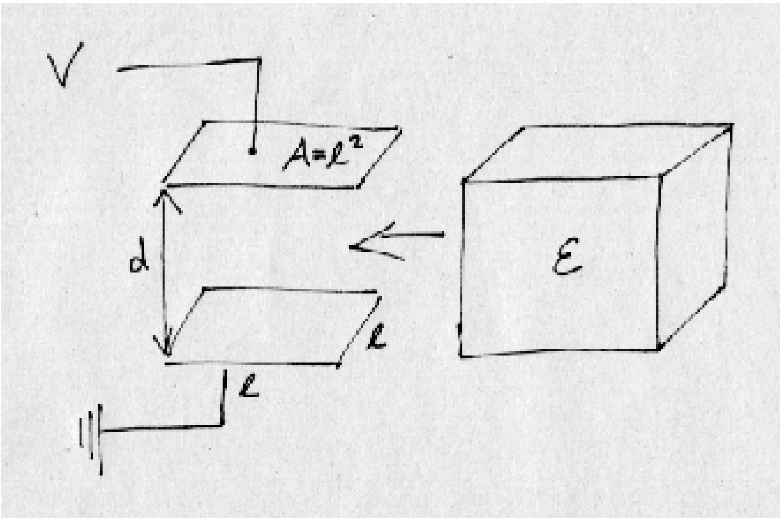
Aufgabe 6.3 Plattenkondensator im Medium

Wir betrachten zuerst einen Plattenkondensator bestehend aus zwei Platten im Abstand d, mit Kantenlänge ℓ und Fläche $A = \ell^2$ (Siehe Skizze). Der Kondensator sei direkt an einer Batterie mit Spannung V angeschlossen.

a.) Wie gross ist die Gesamtladung Q, bzw. $-Q$ auf den beiden Platten?

b.) Es wird nun ein dielektrischer Klotz mit Kantenlängen $d \times \ell \times \ell$ und isotroper Dielektrizitätskonstante $\varepsilon > 1$ zwischen die Platten geschoben. Wie verändert sich Q, wenn die Platten an der Batterie angeschlossen bleiben? Welche Kraft F wirkt auf den Klotz und in welche Richtung?

c.) Diesmal trennen wir die Platten von der Batterie, bevor das Dielektrikum eingeschoben wird. Was passiert mit der Potentialdifferenz V und welche Kraft wirkt diesmal auf den Klotz?



Tipp: Vernachlässige Randeffekte. Das heisst, nimm an, dass das elektrische Feld zwischen den Platten homogen ist und ausserhalb verschwindet.