Elektrodynamik
Serie 9

Aufgabe 9.1 Galilei Transformation

Die Gesetze der Newtonschen Mechanik sind invariant gegenüber Transformationen zwischen Inertialsystemen (Galilei Transformation):

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{v}t, \qquad t' = t. \tag{1}$$

Wir zeigen, dass dies in der Elektrodynamik nicht mehr der Fall ist.

a) Für die Maxwellgleichungen

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = 4\pi\rho(\mathbf{x}, t), \qquad & \nabla \wedge \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c}\partial_t \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0, \qquad & \nabla \wedge \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c}\partial_t \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \tag{2}$$

soll eine Galilei Transformation $\{t, x_i\} \rightarrow \{t', x_i'\}$ durchgeführt werden.

b) Für welchen Grenzwert bleibt die Galilei Transformation gültig?

Aufgabe 9.2 Welle im Medium

Wir betrachten eine ebene Welle im nichtleitenden Medium (in welchem σ verschwindet und ε sowie μ konstant sind).

a) Leite die Wellengleichungen für das elektromagnetische Feld direkt aus den Maxwellgleichungen her. Zeige, dass die ebene Welle

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{E}_0 \\ \mathbf{B}_0 \end{Bmatrix} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)} \tag{3}$$

eine Lösung dieser Gleichungen darstellt und und bestimme die Dispersionsbeziehung. Welche Geschwindigkeit hat die Welle im Medium und welche im Vakuum?

Nun machen wir dieselben Überlegungen für ein leitendes Medium mit Leitfaehigkeit σ.

b) Wie sehen in diesem Fall die Wellengleichungen des elektromagnetischen Feldes aus? Zeige, dass eine ebene Welle beim Eindringen in ein leitendes Material gedämpft wird.

c) Berechne die Eindringtiefe δ für eine Welle mit tiefer Frequenz. Welche Schlüsse können aus diesem Resultat gezogen werden?

Tipp: Die Eindringtiefe δ ist definiert als die Distanz, bei welcher die ursprüngliche Welle um e^{-1} abgeschwächt ist.

Aufgabe 9.3 Pointing-Vektor

Wir haben uns in der vorigen Aufgabe mit dem elektromagnetischen Feld einer ebenen Welle beschäftigt. Nun betrachten wir den Pointingvektor, welcher definiert ist durch

$$\mathbf{S} := \frac{c}{4\pi}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}). \tag{4}$$

a) Berechne den über die Zeit gemittelten Pointingvektor $\langle \mathbf{S} \rangle$ von einer ebenen Welle im nicht leitenden Medium.

b) Berechne den über die Zeit gemittelten Pointingvektor $\langle \mathbf{S} \rangle$ von einer ebenen Welle im leitenden Medium. Wie stehts mit der Impulserhaltung?