Aufgabe 12.1 Potential einer Punktladung

Das Ziel dieser Aufgabe ist es eine Entwicklung in Kugelfunktionen zu finden für das Potential am Punkt $\mathbf{x}$ einer Punktladung am Punkt $\mathbf{x}'$:

$$\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) \,, \tag{1}$$

wobei $r_< = \min\{r, r'\}$, und $r_> = \max\{r, r'\}$. Diese Entwicklung ist nützlich, da sie zwei Koordinatensysteme faktorisiert. (Das eine beschreibt die Ladungsverteilung, das andere den Punkt bei dem wir das Potential bestimmen wollen.) Somit kann zum Beispiel eine Integration über eine Ladungsverteilung unabhängig von der Koordinate $\mathbf{x}$ durchgeführt werden. Zusätzlich wird diese Entwicklung auch bei der Analyse von Antennen im Limit $kr' \ll 1$ verwendet (Siehe dazu Kapitel 8 im Skript). Die Herleitung ist in fünf Schritte aufgeteilt.

(a) Gegeben die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung in sphärischen Koordinaten,

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos\theta) \,, \tag{2}$$

wobei P_l die Legendre-Polynome der Ordnung l sind. Welche Form hat die Lösung auf der positiven z-Achse?

Tipp: Es gilt $P_l(1) = 1$ für alle l.

(b) Betrachte das Potential am Punkt $\mathbf{x}$ einer Punktladung bei $\mathbf{x}'$. Zeige, dass

$$\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\gamma) \tag{3}$$

gilt, wobei γ der Winkel zwischen den Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{x}'$ ist und $r_<, r_>$ wie oben definiert sind.

Tipp: Betrachte zuerst den Fall wo $\mathbf{x}'$ parallel zu $\mathbf{x}$ ist und daher $\gamma = 0$ gilt.

(c) Eine allgemeine Funktion $g(\theta, \phi)$ von zwei Winkeln in sphärischen Koordinaten kann durch Kugelfunktionen ausgedrückt werden als

$$g(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} A_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \,, \tag{4}$$

wobei die Koeffizienten A_{lm} gegeben sind durch

$$A_{lm} = \int d\Omega Y_{lm}^*(\theta, \phi) g(\theta, \phi). \tag{5}$$

Finde Ausdrücke für $g(0,\phi)$ und A_{l0}.

Tipp: Für $m=0$ sind die Kugelfunktionen gegeben durch

$$Y_{l0}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\theta)\,. \tag{6}$$

Ausserdem gilt $Y_{lm}(0,\phi)=0$ für alle $m\neq 0$.

(d) Betrachte zwei Punkte $\mathbf{x}$ und $\mathbf{x}'$ mit einem Winkel γ wie in Teil (b). Zeige, dass die Legendre-Polynome in $\cos\gamma$ wie folgt in Kugelfunktionen ausgedrückt werden können:

$$P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi)\,, \tag{7}$$

wobei $\cos\gamma$ gegeben ist durch $\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi')$.

Tipp: Interpretiere $\gamma(\phi,\theta)$ als Funktion von ϕ und θ und entwickle $P_l(\cos\gamma)$ in Kugelfunkttionen wie in Teil (c), wobei die Koeffizienten $A_{lm}(\phi',\theta')$ Funktionen von ϕ' und θ' sind. Betrachte nun zuerst einen Vektor $\mathbf{x}'$ entlang der z-Achse und rotiere dann das Koordinatensystem. Was sagt uns dies über Entwicklung der Legendre-Polynomen in Kugelfunktionen? Finde schliesslich die Koeffizienten der Entwicklung.

Tipp: Die Legendre-Polynome als Funktion von $\cos\theta$ erfüllen die Differentialgleichung

$$\nabla^2 P_l(\cos\theta) + \frac{l(l+1)}{r^2}P_l(\cos\theta) = 0. \tag{8}$$

Tipp: Der Operator ∇^2 ist invariant unter Rotationen. Wieso?

(e) Kombiniere die Resultate aus Teil (b) und (d) um zu zeigen, dass

$$\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}\frac{4\pi}{2l+1}Y^*_{lm}(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{9}$$

Aufgabe 12.2 Vektorpotential einer Kugelwelle

In Serie 8, Aufgabe 2 haben wir die Wellengleichung für das Vektorpotential betrachtet:

$$\Box\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{tr}(\mathbf{r},t) \tag{10}$$

wobei $\Box = 1/c^2\,\partial_t^2 - \nabla^2$. Dabei fanden wir die Greensfunktionen

$$G^{r,a}(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t') = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\delta\left[t-\left(t'\mp\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)\right]. \tag{11}$$

Betrachte nun das Feld ausserhalb einer Antenne, welche durch die (transversaler) Stromdichte $\mathbf{j}_{tr}(\mathbf{r},t) = \mathbf{j}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ beschrieben sei. Welche Greensfunktion benutzen wir?

(a) Zeige, dass das Vektorpotential, gegeben durch

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^3r' \int dt' \mathbf{j}_{tr}(\mathbf{r}', t') G(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t) , \tag{12}$$

vereinfacht werden kann zu

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}) \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{13}$$

wobei $k = \omega/c$ und $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$.

(b) Das Resultat von (a) definiert eine neue Greensfunktion

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} , \tag{14}$$

welche die Differentialgleichung

$$(\nabla^2 + k^2) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{15}$$

löst. Wir können diesen Ausdruck für das Vektorpotential nun mit einer ähnlichen Überlegung wie in Aufgabe 12.1 weiter zerlegen:

$$\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} g_l(r, r') Y^*_{lm}(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi). \tag{16}$$

Zeige, dass $g_l(r, r')$ die Differentialgleichung

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] g_l(r, r') = -\frac{4\pi}{r^2}\delta(r - r') \tag{17}$$

erfüllt.

Tipp: Die Kugelfunktionen erfüllen

$$\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right] Y_{lm}(\theta, \phi) = l(l+1) Y_{lm} . \tag{18}$$

Ausserdem gilt die Orthogonalitätsrelation

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) = \delta(\phi - \phi')\delta(\cos\theta - \cos\theta') . \tag{19}$$

(c) Die Lösung von Gleichung (17) ist gegeben durch $g_l(r, r') = 4\pi i k j_l(kr_<) h_l^{(1)}(kr_>)$, wobei j_l die sphärischen Bessel-Funktionen der Ordnung l und $h_l^{(1)}$ die Hankel-Funktionen der ersten Art der Ordnung l sind. Ausserdem sei $r_< := \min(r, r')$, sowie $r_> := \max(r, r')$ wie oben. Zeige, dass in der Strahlungszone ($d \ll \lambda \ll r$), wobei d die Ausdehnung der Antenne ist, das Vektorpotential durch

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx 4\pi \frac{e^{ikr}}{cr} \sum_{l,m} Y_{lm}(\theta, \phi) \frac{(-ik)^l}{(2l+1)!!} \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}) r'^l Y^*_{lm}(\theta', \phi') \tag{20}$$

approximiert werden kann. (Es sei $(2l+1)!! := (2l+1)\cdot(2l-1)\cdots 3\cdot 1$.)

Tipp: Im Limit $x \ll 1$ und $y \gg 1$ gilt

$$j_l(x) \approx \frac{x^l}{(2l+1)!!}, h_l^{(1)}(y) \approx (-i)^{l+1}\frac{e^{iy}}{y}\,. \tag{21}$$

Aufgabe 12.3 Addition von Geschwindigkeiten

(a) Betrachte das Szenario wo sich ein Koordinatensystem $(\mathbf{x}', t')$ mit einer Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ relativ zu einem anderen Koordinatensystem $(\mathbf{x}, t)$ bewegt. Ein Objekt bewegt sich mit einer Geschwindigkeit $\mathbf{u}'$ in Bezug auf das Koordinatensystem $(\mathbf{x}', t')$. Was ist die Geschwindigkeit $\mathbf{u}$ dieses Objekts in Bezug auf das andere Koordinatensystem?

Tipp: Teile die Geschwindigkeit $\mathbf{u}$ in einen Teil $\mathbf{u}_\parallel$ parallel zu $\mathbf{v}$ und einen Teil $\mathbf{u}_\perp$ orthogonal zu $\mathbf{v}$ auf.

(b) Zeige, dass sich die Geschwindigkeiten im klassischen Limit kleiner Geschwindigkeiten (d.h. $v \ll c$ und $u' \ll c$) wie folgt addieren: $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{u}'$.