Kontinuumsmechanik. Übung 2.

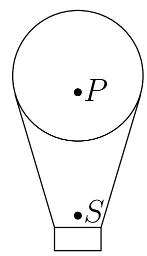
FS10 *Abgabe: 11.3.09*

1. Differentialoperatoren in Zylinderkoordinaten

Ergänze die Rechnungen in Zylinderkoordinaten aus der Vorlesung durch die Herleitung folgender Ausdrücke (f: Skalarfeld, u: Vektorfeld)

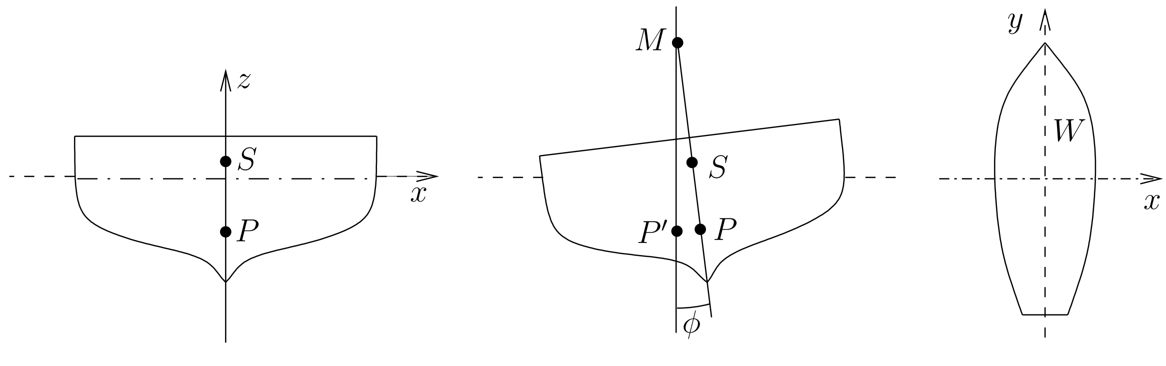
$$\begin{aligned}
\Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \,, \\
\Delta u &= (\Delta u_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{u_r}{r^2})\vec{e}_r + (\Delta u_\varphi + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r^2})\vec{e}_\varphi + (\Delta u_z)\vec{e}_z \,, \\
\operatorname{div} u &= \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \,.
\end{aligned}$$

2. Stabilität tauchender und schwimmender Körper



a) Ein tauchender Körper (Luftballon, Unterseeboot):
S: Schwerpunkt; P: geometrischer Mittelpunkt.
Wie lautet die Stabilitätsbedingung gegenüber Neigungen?

b) Ein schwimmender Körper (Schiff):



S: Schwerpunkt; P, P': geometrischer Mittelpunkt (ohne und mit Neigung) des eingetauchten Teils (Volumen V); M: 'Metazentrum': W: Schnitt des Schiffskörpers mit der Wasserebene. Die Achse y der Neigung soll eine Hauptachse von W sein: $\int_W xy\,dxdy = 0$. Zeige, dass die Lage von M relativ zum Schiff unabhängig von der (kleinen) Neigung ϕ ist. Wie lautet nun die Stabilitätsbedingung? Zeige, dass

$$\overline{PM} = \frac{\Theta}{V} \,,$$

wobei Θ das Tragheitsmoment der Fläche W bzgl. der Neigungsachse ist.

Hinweise: (i) Die Bedingung aus a) ist zwar hinreichend für Stabilität im Fall b), aber nicht notwendig, wie man am Beispiel eines Eisbergs sieht. (ii) Bei b) berechne die Lage von P, bzw. P' bzgl. eines körperfesten Systems.

3. Eine stationäre Atmosphäre

Die Zustandsgleichung der Atmosphäre sei gegeben durch

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n , \qquad (n \geq 1) . \tag{1}$$

In der Vorlesung wurde zur Modellierung der Atmosphäre der Fall eines linearen Gravitationspotentials $\Phi(z) = gz$ betrachtet. Man untersuche hier den Fall

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r} \tag{2}$$

einer sphärischen Gestalt. Wie verläuft das Druckprofil $p(r)$ in Abhängigkeit von n? Bleibt die Atmosphäre endlich ausgedehnt? Diskutiere insbesondere die Fälle $n > 1$ (z.B. adiabatisch) und $n = 1$ (isotherm).