Kontinuumsmechanik. Übung 3.

HS10 *Abgabe: 18.3.10*

Die Gestalt der Erde

Die Erde dreht sich um ihre Achse und erfährt aufgrund der Zentrifugalbeschleunigung eine Abplattung an den Polen. Sie soll als homogenes, inkompressibles Fluidum behandelt werden. Gesucht ist eine Gestalt, in der Gravitation und Zentrifugalbeschleunigung im Gleichgewicht stehen. Hier soll gezeigt werden, dass diese Gestalt in Form eines Ellipsoids

$$B : \qquad \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i^2}{a_i^2} \leq 1$$

(a_1, a_2, a_3: Halbachsen) gefunden werden kann. In der Tat sind alle stabilen Gleichgewichte von dieser Form (ohne Beweis).

Die folgenden Aufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden.

1. Das Gravitationspotential eines Ellipsoids

Zeige, dass das Potential

$$\phi(\vec{x}) = -\frac{G}{4\pi} \int_B \frac{\rho}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \tag{1}$$

(ρ: homogene Massendichte) folgendes ist (Gauss, Rodrigues, Ivory):

(i) ausserhalb des Ellipsoids ($\vec{x} \notin B$)

$$\phi_\mathrm{a}(\vec{x}) = -\pi G\rho \Big(I(\lambda) - \sum_{i=1}^{3} A_i(\lambda) x_i^2 \Big) \ , \tag{2}$$

wobei $\lambda = \lambda(\vec{x}) \in (0, \infty)$ implizit definiert ist durch

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{x_i^2}{a_i^2 + \lambda} = 1 \tag{3}$$

und

$$I(\lambda) = a_1 a_2 a_3 \int_\lambda^\infty \frac{du}{\Delta} \ , \qquad A_i(\lambda) = a_1 a_2 a_3 \int_\lambda^\infty \frac{du}{(a_i^2 + u)\Delta} \ ,$$

$$\Delta^2 = \Delta^2(u) = \prod_{i=1}^{3} (a_i^2 + u) \ .$$

(ii) innerhalb des Ellipsoids ($\vec{x} \in B$)

$$\phi_\mathrm{i}(\vec{x}) = -\pi G\rho \Big(I - \sum_{i=1}^{3} A_i x_i^2 \Big) \tag{4}$$

mit $I = I(0)$, $A_i = A_i(0)$.

Vorgehen: Die direkte Berechnung von (1) ist schwierig. Liegen (2, 4) bereits als Behauptung vor, so ist es einfacher zu verifizieren, dass ϕ der Differentialgleichung

$$\Delta\phi = 4\pi G \begin{cases} 0 & (\vec{x} \notin B) \\ \rho & (\vec{x} \in B) \end{cases}$$

genügt mitsamt Randbedingungen

$$\begin{aligned} \phi_{\mathrm{i}}(\vec{x}) &= \phi_{\mathrm{a}}(\vec{x}) \,, \\ \vec{\nabla}\phi_{\mathrm{i}}(\vec{x}) &= \vec{\nabla}\phi_{\mathrm{a}}(\vec{x}) \end{aligned} \qquad (\vec{x} \in \partial B) \,.$$

(Die Tangentialkomponenten der zweiten Bedingung sind bereits in der ersten inbegriffen.)

Hinweise: Die Berechnung von $\Delta\phi_{\mathrm{a}}$ führt u.a. auf Ausdrücke, die $\Delta\lambda$ und $\vec{\nabla}\lambda$ beinhalten. Nur letztere müssen berechnet werden (anhand von (3)); die ersteren heben sich weg. Nützlich sind ferner die Beziehungen

$$\frac{1}{\Delta}\frac{d\Delta}{du} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{a_i^2+u} \,, \qquad \sum_{i=1}^{3} A_i(\lambda) = 2\frac{a_1 a_2 a_3}{\Delta(\lambda)} \,.$$

2. Das hydrostatische Gleichgewicht

Das Ellipsoid rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die 3-Achse. Finde eine Gleichung für a_1, a_2, a_3, so dass ∂B eine Äquipotentialfläche für

$$\phi(\vec{x}) - \tfrac{1}{2}\omega^2(x_1^2 + x_2^2)$$

ist (wieso?). Zeige, dass

$$\frac{\omega^2}{2\pi G\rho} = A_1 - A_3\frac{a_3^2}{a_1^2} \,, \tag{5}$$

und dass zwei Sorten von Lösungen existieren:

(i) (Maclaurin) Rotationsellipsoide: $a_1 = a_2$,

(ii) (Jacobi) Ellipsoide: $a_1 \neq a_2$ mit

$$a_1^2 a_2^2 \frac{A_2 - A_1}{a_1^2 - a_2^2} = a_3^2 A_3 \,, \tag{6}$$

d.h.

$$a_1^2 a_2^2 \int_0^\infty \frac{du}{(a_1^2+u)(a_2^2+u)\Delta} = a_3^2 \int_0^\infty \frac{du}{(a_3^2+u)\Delta} \,.$$

Zeige ferner, dass es ein Ellipsoid gibt, das den beiden Lösungsscharen gemeinsam ist (Bifurkation).

Hinweis: Die A_i's hängen von den a_i's nur über ihre Verhältnisse ab.

3. Graphische Darstellung

Die Gestalt eines Ellipsoids ist durch die Verhältnisse a_2/a_1, a_3/a_1 gegeben. Im Fall $a_1 \geq a_2 \geq a_3$ können sie durch zwei Winkel, $0 \leq \vartheta, \varphi \leq \pi/2$, parametrisiert werden:

$$\frac{a_2}{a_1} = (1 - \sin^2\vartheta \sin^2\varphi)^{1/2} , \qquad \frac{a_3}{a_1} = \cos\varphi .$$

$\varphi > 0$ steht für die Abplattung, $\vartheta > 0$ für die Abweichung von der Rotationsform.

Stelle die beiden Scharen (i) und (ii) aus Aufgabe 2 als Kurven in der ϑ, φ-Ebene (oder $a_2/a_1, a_3/a_1$-Ebene) dar. Stelle auch den jeweiligen Verlauf von $\omega^2/(2\pi G\rho)$ als Funktion von $e = \sqrt{1-(a_3/a_1)^2}$ (Exzentrizität des 13-Schnitts) dar. Verwende die Darstellung der A_i mittels unvollständiger elliptischer Integrale

$$E(\vartheta,\varphi) = \int_0^\varphi (1 - \sin^2\vartheta \sin^2\phi)^{1/2} d\phi , \qquad F(\vartheta,\varphi) = \int_0^\varphi (1 - \sin^2\vartheta \sin^2\phi)^{-1/2} d\phi ,$$

und zwar (nicht herleiten!)

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{2a_2a_3}{a_1^2 \sin^3\varphi \sin^2\vartheta} (F(\vartheta,\varphi) - E(\vartheta,\varphi)) , \\
A_2 &= \frac{2a_2a_3}{a_1^2 \sin^3\varphi \sin^2\vartheta \cos^2\vartheta} \left(E(\vartheta,\varphi) - F(\vartheta,\varphi)\cos^2\vartheta - \frac{a_3}{a_2} \sin^2\vartheta \sin\varphi \right) , \\
A_3 &= \frac{2a_2a_3}{a_1^2 \sin^3\varphi \cos^2\vartheta} \left(\frac{a_2}{a_3} \sin\varphi - E(\vartheta,\varphi) \right) .
\end{aligned} \tag{7}$$

Falls $a_1 = a_2$, sind die Ausdrücke (7) durch elementare Funktionen darstellbar:

$$A_1 = A_2 = \frac{(1-e^2)^{1/2}}{e^3} \arcsin e - \frac{1-e^2}{e^2} , \qquad A_3 = \frac{2}{e^2} - \frac{2(1-e^2)^{1/2}}{e^3} \arcsin e .$$

Hinweis: Verwende ein Programm wie z.B. MATHEMATICA, in dem E und F vordefiniert sind.