Kontinuumsmechanik. Übung 10.

FS10 *Abgabe: 13.5.10*

1. Wirbeldynamik in der Halbebene

Zwei Wirbel entgegengesetzt gleicher Stärke laufen parallel und im Abstand d voneinander, sowie senkrecht gegen den Rand, zumindest in grosser Entfernung davon. Bestimme deren Bahnkurven.

Hinweis: Verwende Spiegelwirbel und die Erhaltungsgrösse H aus (7.18).

2. Die Jeans-Instabilität in der Newtonschen Kosmologie

Die Gravitation begünstigt die Bildung von Galaxien, die Expansion des Universums wirkt ihr entgegen. Der richtige Rahmen dafür ist die Allgemeine Relativitätstheorie. Da hier nicht darauf Bezug genommen werden kann, verwenden wir die Newtonsche Gravitationstheorie; die Resultate erweisen sich dennoch als qualitativ richtig.

a) Newtonsche Kosmologie. Gesucht ist eine Lösung $(\rho, \vec{v})$ der an die Gravitation gekoppelten Euler-Gleichungen

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \operatorname{div} \vec{v}\,, \tag{1}$$

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} - \vec{\nabla}\varphi\,, \tag{2}$$

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho \tag{3}$$

mit $p = p(\rho)$, und zwar folgender Form:

$$\rho(\vec{x}, t) = \rho(t)\,, \qquad \vec{v}(\vec{x}, t) = H(t)\vec{x}\,. \tag{4}$$

Die zweite Gleichung beinhaltet das Hubble-Gesetz: Zwei Teilchen $\vec{x}_i(t)$, $(i = 1,\, 2)$ in der Strömung, d.h. mit $\dot{\vec{x}}_i(t) = \vec{v}(\vec{x}_i(t), t)$, haben eine Relativgeschwindigkeit

$$\dot{\vec{x}}_1(t) - \dot{\vec{x}}_2(t) = H(t)(\vec{x}_1(t) - \vec{x}_2(t))\,,$$

die proportional zu ihrem Abstand ist. Somit stellt (4) ein homogenes, isotropes Universum dar.

Zeige: Die Lösung, bei der die t-Abhängigkeiten durch Potenzgesetze gegeben sind, lautet

$$H(t) = \frac{2}{3t}\,, \qquad \rho(t) = \frac{1}{6\pi G t^2}\,. \tag{5}$$

Hinweis: Verwende die Lösung

$$\varphi(\vec{x}, t) = \frac{2}{3}\pi G\rho(t)\vec{x}^{\,2}$$

von (3).

Man beschreibe die Lage eines Teilchens mit $\vec{x}(t) = R(t)\vec{r}$ ($\vec{r}$ fest). Zeige: $R(t) \propto t^{2/3}$. Die Gravitation verlangsamt die Expansion immer mehr.

b) Fluktuationen. Es bezeichne $(\rho_0, \vec{v}_0)$ die Lösung von Teil a), und $(\rho_0 + \rho, \vec{v}_0 + \vec{v})$ sei eine Störung davon. Zeige, dass in linearer Näherung in ρ, $\vec{v}$ gilt

$$\frac{D}{Dt}\frac{\rho}{\rho_0} = -\operatorname{div}\vec{v}\,, \tag{6}$$

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} + H(t)\,\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla}p}{\rho_0} - \vec{\nabla}\varphi\,, \tag{7}$$

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho\,, \tag{8}$$

nun mit $D/Dt = \partial/\partial t + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}$. Zur Lösung der analogen Gleichung in der Vorlesung (keine Expansion des Universums) wurden ρ, $\vec{v}$ als ebene Wellen fester Frequenz angesetzt. Dies ist hier nicht möglich, da die Gleichungen wegen $\vec{v}_0 = H(t)\vec{x}$ weder räumlich noch zeitlich translationsinvariant sind. Erstere Invarianz kann aber durch Verwendung mitbewegter Koordinaten erzielt werden:

$$\tilde{\vec{x}} := \frac{\vec{x}}{R(t)}\,, \qquad \tilde{f}(\tilde{\vec{x}}, t) := f(\vec{x}, t)$$

für $f = \rho$, $\vec{v}$. Dann ist

$$\vec{\nabla} = \frac{1}{R(t)}\tilde{\vec{\nabla}}\,, \qquad \frac{Df}{Dt} = \frac{\partial\tilde{f}}{\partial t}\,.$$

Zeige: Die reskalierten Fluktuationen

$$d(\tilde{\vec{x}}, t) := \frac{\rho(\vec{x}, t)}{\rho_0(t)}\,, \qquad \vec{u}(\tilde{\vec{x}}, t) := \frac{\vec{v}(\vec{x}, t)}{R(t)}$$

erfüllen

$$\frac{\partial d}{\partial t} = -\operatorname{div}\,\vec{u}\,, \tag{9}$$

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + 2H\vec{u} = -\frac{p'(\rho_0)}{\rho_0 R^2}\vec{\nabla}\rho - \frac{1}{R^2}\vec{\nabla}\varphi$$

nach Weglassung von $\tilde{}$ auf $\vec{\nabla}$, div. Für $d, \vec{u} \propto e^{i\vec{k}\vec{r}}$ ist

$$\frac{\partial^2 d}{\partial t^2} + 2H\frac{\partial d}{\partial t} = (4\pi G\rho_0 - (k/R)^2 p'(\rho_0))d\,.$$

Im Grenzfall grosser Wellenlänge, $(k/R)^2 p'(\rho_0) \ll 4\pi G\rho_0$, ist die Lösung von der Form $d(t) \propto t^\alpha$ mit $\alpha = \frac{2}{3}, -1$.

Bemerkung. Die Fluktuationen wachsen bloss algebraisch mit der Zeit. Dadurch erlauben heutige astronomische Beobachtungen einen Rückschluss auf die Inhomogenitäten im frühen Universum. Bei einem exponentiellen Wachstum (vgl. Vorlesung) wäre dies nicht möglich.