Quantenmechanik II
Serie 2

FS 2010
Prof. Fröhlich

Aufgabe 2.1 Zeeman Effekt

Wir betrachten ein Wasserstoffatom im schwachen homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Unter der Vernachlässignung von relativistischen Korrekturen wird die Dynamik dieses Systems durch den Hamiltonoperator

$$H = H_B + H_S \tag{1}$$

mit

$$\begin{aligned} H_B &= = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 - \frac{e^2}{\|\vec{x}\|}, \\ H_S &= g\frac{e}{2mc}S_z B \end{aligned} \tag{2}$$

beschrieben. Wir verwenden die Coulomb-Eichung ($\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$) in der die Abhängigkeit des Vektorpotentials vom Magnetfeld durch

$$\vec{A} = -\frac{1}{2}\vec{x} \wedge \vec{B} \tag{3}$$

ausgedrückt werden kann.

a) Zeige, dass

$$H_B = \underbrace{\frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{\|\vec{x}\|}}_{H^{(0)}} + \frac{e}{2mc}L_z B + \frac{e^2}{8mc^2}B^2\left(x^2 + y^2\right). \tag{4}$$

b) Berechne die Korrekturen zu $E_1^{(0)}$ in erster und zweiter Ordnung Störungstheorie und zu $E_2^{(0)}$ in erster Ordnung Störungstheorie.

Aufgabe 2.2 Wasserstoffatom im E-Feld: Resonanzen und Auswahlregeln

Die Dynamik eines Wasserstoffatoms im homogenen elektrischen Feld $\vec{E} = E\vec{e}_z$ wird beschrieben durch den Hamiltonoperator

$$H = H_0 + V(E) \tag{5}$$

mit

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{\|\vec{x}\|}, \\ V(E) &= -eEz. \end{aligned} \tag{6}$$

a) Sei A ein selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Zeige, dass

$$\inf \sigma(A) \leq \frac{\langle \psi, A\psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle} \tag{7}$$

für alle $\psi \in \mathcal{H}$.

b) Nutze Teilaufgabe a), um zu zeigen, dass das Spektrum $\sigma(H)$ von H nach unten unbeschränkt ist.

Eine genauere Analyse des Spektrums $\sigma(H)$ ergibt

$$\sigma(H) = \sigma_c(H) = \mathbb{R}. \tag{8}$$

Es existieren demnach keine gebundenen Zustände für H! Dies bedeutet, dass räumlich lokalisierte Anfangsbedingungen für $t \to \infty$ vollständig zerfliessen. Es resultiert das folgende Verhalten: Bei der Anwesenheit eines schwachen E-Feldes sind die gebundenen Zustände des Wasserstoffatoms metastabil. Solche Zustände nennt man **Resonanzen**. Bei schwachen E-Feldern ist die Lebenszeit[1] dieser Resonanzen gross. Demnach verhalten sich Resonanzen für kurze Zeiten wie gebundene Zustände. Bei starken E-Feldern ist die Lebenszeit der Resonanzen kurz. Das Zerfliessen der ursprünglich gebundenen Zustände kann mit fortschreitender Zeit zu Übergängen zwischen den gebundenen Zuständen des ungestörten Problems führen, d.h.

$$\langle \psi_{nlm}, e^{-iHt}\psi_{n'l'm'} \rangle \neq 0, \tag{9}$$

obwohl $(nlm) \neq (n'l'm')$. Dieses Verhalten werden wir nun durch eine explizite Rechnung bestätigen. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass $t \ll 1$, so dass

$$e^{-iHt} \approx 1 - iHt. \tag{10}$$

c) Zeige, dass

$$\langle \psi_{100}, e^{-iHt}\psi_{210} \rangle \approx \langle \psi_{100}, (1 - iHt)\psi_{210} \rangle = -iteE\langle \psi_{100}, z\psi_{210} \rangle \neq 0 \tag{11}$$

für $t \neq 0$.

d) In der Vorlesung wurde im Rahmen der Diskussion des Wigner-Eckart Theorems gezeigt, wie aufgrund von Symmetrieüberlegungen gezeigt werden kann, dass das Matrixelement $\langle \psi_{nlm}, z\psi_{n'l'm'} \rangle$ für viele Kombinationen $((nlm), (n'l'm'))$ gleich Null ist. Diese Indexpaare heissen **Auswahlregeln**. Die Gruppe $G = SU(2) \times \{1, P\}$ ist eine dynamische Symmetriegruppe des ungestörten Problems. Sie ist über

$$U(A)\psi(\vec{x}) = \psi\left(e^{-\vec{\alpha}\cdot\vec{I}}\vec{x}\right) \tag{12}$$

für $A = e^{\vec{\alpha}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2i}} \in SU(2)$ $(\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^3)$ und

$$U(P)\psi(\vec{x}) = \psi(-\vec{x}) \tag{13}$$

auf $L^2(\mathbb{R}^3, d^3x)$ dargestellt. Bestimme die Auswahlregeln für die Matrixelemente $\langle \psi_{nlm}, z\psi_{n'l'm'} \rangle$.

[1] Die Lebenszeit einer Resonanz ist eine charakteristische Zeit für ihr Zerfliessen.