Quantenmechanik II. Übung 2.

FS 11 *Abgabe:* Di 8. März 2011

1. Drehimpulsmatrizen

Bestimme die Matrizen M_i $(i = 1, 2, 3, +, -)$ des Drehimpulses in der Darstellung $\mathcal{D}_1$ bezüglich der Normalbasis $\{|j = 1, m\rangle\}_{m=-1}^{1}$.

2. Zeitumkehr und Spin

Von der Zeitumkehr T wird verlangt, dass Ort und Impuls gemäss $T : (\vec{x}, \vec{p}) \mapsto (\vec{x}, -\vec{p})$ transformieren, und damit $\vec{L} = \vec{x} \wedge \vec{p} \mapsto -\vec{L}$; aus Analogie ebenso der Spin, $\vec{S} \mapsto -\vec{S}$. Allgemein gilt für den (antiunitären) Zeitumkehroperator U_T, dass $U_T^2 = c_T \mathbb{1}$ mit $c_T = \pm 1$ (vgl. Skript S. 64).

i) In der Theorie ohne Spin, $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$, ist (bis auf eine beliebige Phase) $U_T = K$, die komplexe Konjugation $(K\psi)(\vec{x}) = \overline{\psi(\vec{x})}$, womit $c_T = +1$. Finde den Zeitumkehroperator für ein Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen, $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2$. Insbesondere muss $U_T^* \vec{S} U_T = -\vec{S}$ gelten. Zeige $c_T = -1$.

Hinweis: Verifiziere, dass

$$U_T = \sigma_2 K \equiv (\mathbb{1} \otimes \sigma_2)(K \otimes \mathbb{1})$$

den Anforderungen genügt.

ii) Sei H ein Operator, z.B. der Hamiltonoperator eines abstrakten Systems für welches $c_T = -1$ ist. Zeige: Falls H invariant unter Zeitumkehr ist, $U_T^* H U_T = H$, dann ist die Entartung aller Eigenräume von H geradzahlig (Kramers-Entartung).

Hinweis: Zeige, dass mit $|\psi\rangle$ auch $U_T|\psi\rangle$ ein Eigenvektor von H zum selben Eigenwert ist. Berechne $\langle\psi|U_T\psi\rangle$.

3. Spin-Präzession

Betrachte die Bewegung eines Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchens in einem möglicherweise zeitabhängigen, magnetischen Feld $\vec{B}(t)$, wobei die räumliche Bewegung des Teilchens wegzulassen ist. Der Hamiltonoperator ist gegeben durch die Energie $-\vec{B} \cdot \vec{\mu}$ des magnetischen Moments $\vec{\mu} = \gamma \vec{S}$, $(\gamma > 0)$, das zum Spin $\vec{S}$ gehört:

$$H(t) = -\gamma \vec{B}(t) \cdot \vec{S} , \qquad \vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} .$$

i) Betrachte die Schrödinger-Gleichung

$$\mathrm{i}\hbar |\dot{\psi}(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle ,$$

für den reinen Zustand $|\psi(t)\rangle \in \mathbb{C}^2$, wobei $\cdot = d/dt$. Wie lautet die Gleichung, wenn der Zustand als Projektor $P(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ aufgefasst wird?

ii) Der Spinzustand zur Zeit $t = 0$ sei entlang der Richtung $\vec{e}(0)$ ($|\vec{e}(0)| = 1$) ausgerichtet: $|\psi(0)\rangle = |\vec{e}(0)\rangle$ (vgl. Skript S. 76). Zeige, dass die Lösung der Gleichung aus Teilaufgabe (i) gegeben ist durch

$$P(t) = \frac{1}{2}(1 + \vec{\sigma} \cdot \vec{e}(t)) ,$$

wobei $\vec{e}(t)$ die Lösung von

$$\dot{\vec{e}}(t) = \gamma \vec{e}(t) \wedge \vec{B}(t) \tag{1}$$

ist. Beachte: Dies ist die klassische Gleichung für einen Drehimpuls $\vec{S}$ in einem Feld $\vec{B}$, das auf μ wirkt:

$$\dot{\vec{S}} = \vec{\mu} \wedge \vec{B} = \gamma \vec{S} \wedge \vec{B} .$$

iii) Sei nun $\vec{B}(t) = B\vec{e}_3$ zeitlich konstant. Bestimme die Lösung für $\vec{e}(t)$, sowie die Wahrscheinlichkeit $P_\downarrow(t)$, den Spin nach unten gerichtet zu finden, wenn S_3 zum Zeitpunkt t gemessen wird.

Hinweis:

$$R(\vec{e}, \varphi)\vec{x} = (\vec{e} \cdot \vec{x})\vec{e} + (\vec{x} - (\vec{e} \cdot \vec{x})\vec{e}) \cos\varphi + (\vec{e} \wedge \vec{x}) \sin\varphi .$$

Zeige, dass

$$|\langle \vec{e}_1 | \vec{e}_2 \rangle|^2 = \cos^2 \frac{\theta}{2} , \tag{2}$$

wobei $\theta = \angle(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

iv) Spinresonanz liegt der Spin-Tomographie zu Grunde: Das Magnetfeld

$$\vec{B}(t) = B_0 \vec{e}_3 + B_1(\vec{e}_1 \cos\omega t + \vec{e}_2 \sin\omega t)$$

bestehe aus einem zeitunabhängigen Feld B_0 in 3-Richtung und einem mit der Frequenz ω rotierenden Feld B_1 in der (12)-Ebene. Sei $\vec{e}(0) = \vec{e}_3$. Bestimme $P_\downarrow(t)$ und deren Maximum in t. Zeige, dass in Abhängigkeit von ω eine Resonanz auftritt.

Hinweis: Löse (1) durch Transformation auf ein gleichmässig rotierendes Koordinatensystem. Gleichung (2) kann ohne Rücktransformation verwendet werden (wieso?).